

圓形載流線圈的磁場與電感

徐國誠

臺北市立成淵高級中學

壹、前言

圓形載流線圈的磁效應是大家所熟知的問題，也是高中物理教材和普通物理教科書上必然講到的內容。不過通常所討論的，只是利用必歐-沙伐定律（Biot-Savart law）和簡單的對稱計算出圓形載流線圈中心軸上的磁場；或者是利用球坐標先算出向量勢（vector potential），再利用向量勢的旋度求出遠距離的磁場（Jackson 1998）。本文所討論的內容，是以直角坐標系和必歐-沙伐定律為出發點，利用數值積分（numerical integration）的方式，計算出線圈中心軸上任一點的磁場，以及中心軸之外的磁場狀況，另外還討論了圓線圈之間的自感應（self induction）與互感應（mutual induction）等問題。

貳、圓形載流線圈附近的磁場

必歐-沙伐定律或是安培定律（Ampere's law）都可以處理極為對稱之電流所產生的磁場，圓形載流線圈中心軸上的磁場便是其中之一，而圖 1 就是利用必歐-沙伐定律和簡單的對稱所求出的磁場強度（Halliday 2004）：

$$B(z) = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{2R} \cdot \frac{1}{[1 + (z/R)^2]^{3/2}} \quad (1)$$

圓線圈中心軸(z)上的磁場強度 $B_z(\frac{\mu_0 i}{2R})$

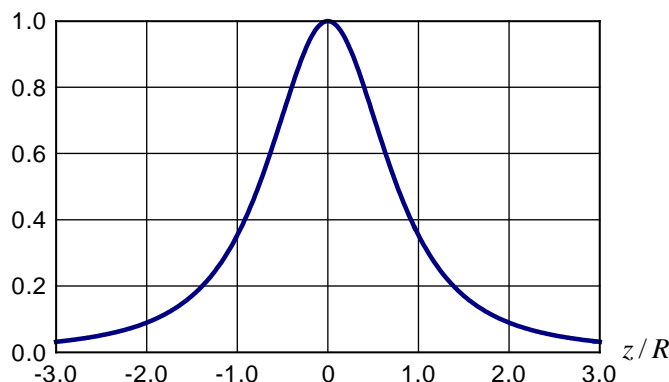


圖 1、圓形載流線圈中心軸上的磁場強度

如果我們要求出線圈附近任意點 $P(x, y, z)$ 的磁場，其計算情形便複雜許多。我們將半徑為 R 、電流為 i 的圓線圈放置在 xy 平面上，線圈的中心為坐標的原點，如圖 2 所示。由必歐-沙伐定律我們知道，線圈上一小段長度

$d\ell(R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$ 的電流，在 P 點所產生的磁場 $d\vec{B}$ 為

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i d\vec{\ell} \times \vec{r}}{4\pi r^3} \quad (2)$$

其中 $\vec{r} = (x - R\cos\theta, y - R\sin\theta, z)$ ， $d\vec{\ell} = (-R\sin\theta d\theta, R\cos\theta d\theta, 0)$ ，因此我們可以計算 $d\vec{B}$ 為

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \cdot \frac{[z\cos\theta, z\sin\theta, R - (x\cos\theta + y\sin\theta)]}{[x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - 2R(x\cos\theta + y\sin\theta)]^{3/2}} d\theta \quad (3)$$

又因為圓線圈對稱 z 軸，因此可以在 xy 平面上任取一直徑方向計算其磁場的變化，在此我們取 x 軸而令 $y = 0$ （這樣是方便的做法，也就是把圖 2 中的 P 點，其投影在 xy 平面上的位置正好落在 x 軸，事實上由於對稱的關係，取任何一軸所得的結果都是相同的）。由此假設得出磁場在三個軸上的分量分別為

$$B_x = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{z\cos\theta d\theta}{[x^2 + z^2 + R^2 - 2Rx\cos\theta]^{3/2}} \quad (4.1)$$

$$B_y = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{z\sin\theta d\theta}{[x^2 + z^2 + R^2 - 2Rx\cos\theta]^{3/2}} \quad (4.2)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{(R - x\cos\theta) d\theta}{[x^2 + z^2 + R^2 - 2Rx\cos\theta]^{3/2}} \quad (4.3)$$

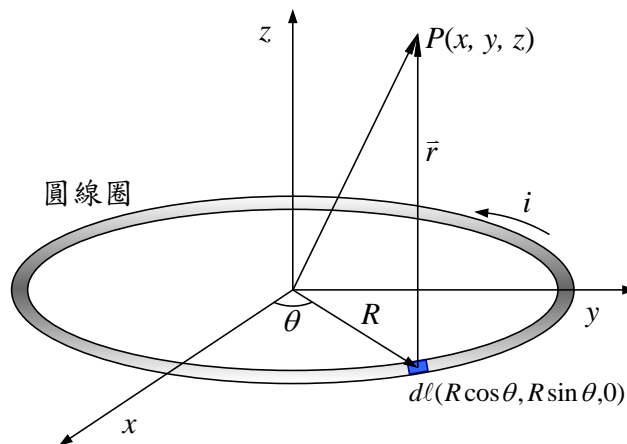


圖 2、圓線圈在必歐-沙伐定律中的坐標示意圖

(4.1) 式至 (4.3) 式就是計算圓形載流線圈周圍附近磁場的方程式，但是實際的積分並不容易做，因此我們藉助數值積分中的辛普森法則 (Simpson's rule, Hughes-Hallett 2008) 的方式，加以適當的誤差控制，利用電腦作大量且重複性的計算。圖 3 是假設線圈半徑 $R = 1$ 公尺，電流 $i = 1$ 安培， xy 平面上在 x 軸的磁場變化，其絕對誤差取至 10^{-10} [1] 以下，其中 B_x 、 B_y 皆為零 (因為 $z = 0$ 的關係)。圖中在線圈範圍內之磁場的最小值剛好在線圈的中心處，其值大約為 6.28×10^{-7} T，這個值也可以由第(1)式中令 $z = 0$ 得之；另外在靠近導線表面位置 (大約在 $x = \pm 1$ m 處) 時的磁場會達到最大，而線圈內與線圈外的磁場是反向的。

事實上，圖 3 的磁場與 x 關係曲線的形狀，與兩條相距 $2R$ ，且具等量且相反方向電流 i 的平行無限長直導線，所產生的磁場情況相類似。圖 4 是兩條電流為 i 的平行長直導線，位置坐標在 xz 平面上分別為 $(-R, 0)$ 與 $(R, 0)$ ，在 x 軸上任一點 $P(x, 0)$ 的磁場為

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi(R+x)} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(R-x)} = \frac{\mu_0 i R}{\pi(R^2 - x^2)} \quad (5)$$

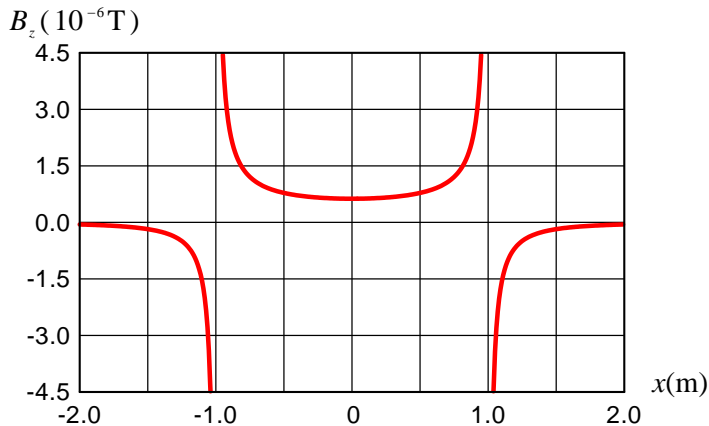


圖 3、線圈半徑 $R = 1$ m，電流 $i = 1$ A， xy 平面上在 x 軸的磁場變化，其絕對誤差取至 10^{-10} 以下

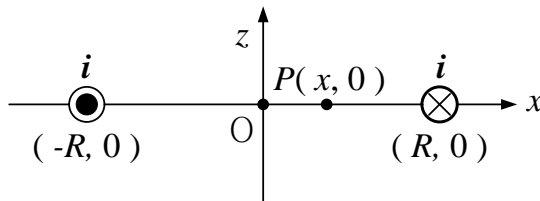


圖 4、兩條相距 $2R$ ，具等量且相反方向電流 i 的平行無限長直導線，導線的位置坐標在 xz 平面上分別為 $(-R, 0)$ 與 $(R, 0)$

從第 (5) 式我們可以得到兩條平行長直導線之磁場的一般式，假設電流 $i = 1$ 安培， $R = 1$ 公尺，則其磁場與 x 的關係曲線如圖 5。圖 5 中的虛線是兩條平行長直導線的磁場，實線是圓形線圈的磁場，其中 $2R$ 在平行直導線為兩導線間的距離，在圓線圈則是線圈的直徑。

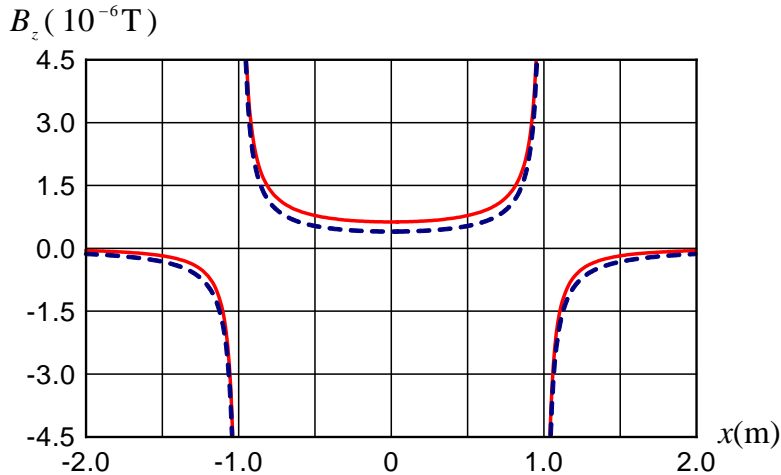
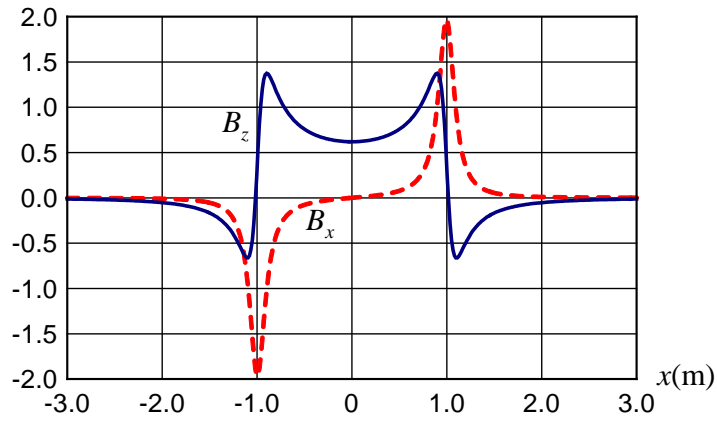


圖 5、 $i = 1\text{A}$ ， $R = 1\text{m}$ 之兩條平行長直導線與圓線圈所產生的磁場。圖中虛線是兩條平行長直導線的磁場，實線是圓形線圈的磁場，其中 $2R$ 在平行直導線為兩導線間的距離，在圓線圈則是線圈的直徑

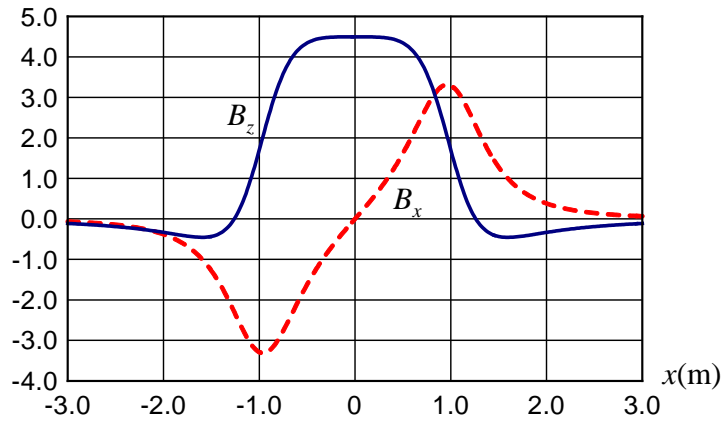
圖 5 中的曲線雖然有些類似，不過其中仍然存在著基本上的差異。首先是在 $-R \sim R$ 的範圍內（例子中是 $-1\text{m} \sim 1\text{m}$ 之間），圓線圈所產生的磁場始終大於兩條平行直導線的磁場，這意味著一條無限長的直導線在磁場上的影響力，還不如用一條長度為 πR 的導線彎成半圓形的情況。另外在 $x < -R$ 或 $x > R$ 的範圍時，兩條平行直導線所產生的磁場大小就會大於圓線圈的磁場大小，這就是說，當距離比較遠的時候，無限長的直導線在磁場上的影響力才會大於圓線圈。

前面所計算圓線圈磁場的例子是在 xy 平面上，所以 B_x 、 B_y 皆為零，不過我們可能對於不在 xy 平面上的某一點的磁場感興趣。圖 6 是計算圓線圈當 $z \neq 0$ 的時候，其磁場在 x 軸的變化情形。其中圖 (A) 是 $z = 0.1\text{m}$ 時在 x 軸上的磁場與 x 坐標的關係曲線： $B_x - x$ 圖、 $B_z - x$ 圖，圖 (B) 和圖 (C) 為 $z = 0.5\text{m}$ 、 $z = 1.0\text{m}$ 時的磁場與 x 坐標的關係曲線，其中 R 和 i 仍為 1 公尺與 1 安培，絕對誤差取至 10^{-11} 以下。由圖 6 我們不難發現，當鎖定的 P 點離 xy 平面愈遠時 (z 愈大)，其磁場的曲線會愈平滑，而 B_z 在 $x = 0$ 處的變化，也由原先凹下去的情形，轉變為曲線的最高峰。另外圖 6 中並沒有出現 B_y ，是因為 (4.2) 式的積分始終為零的關係。

(A) $B (10^{-6}\text{T})$



(B) $B (10^{-7}\text{T})$



(C) $B (10^{-7}\text{T})$

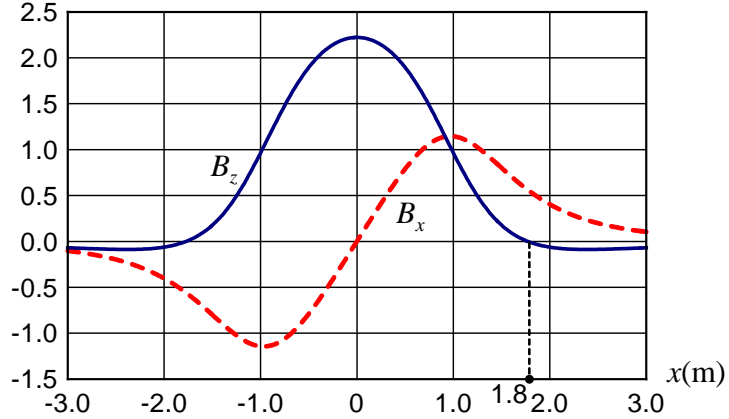


圖 6、(A) $z = 0.1\text{m}$ ；(B) $z = 0.5\text{m}$ ；(C) $z = 1.0\text{m}$ 時圓線圈的磁場與 x 坐標的關係曲線：
 $B_x - x$ 圖、 $B_z - x$ 圖，其中 R 和 i 仍為 1m 與 1A ，絕對誤差取至 10^{-11} 以下

參、單一圓線圈的自感應

線圈中的電流若發生改變，由法拉第感應定律 (Faraday's law of induction) 可以知道，在同一線圈中會產生感應電動勢，這個現象稱為自感應；而感應電動勢的大小與線圈磁通量 ϕ_B (magnetic flux) 的時變率成正比，此磁通量之值在感應現象中是極為重要的特性量。假如一線圈附近沒有磁性物質，則磁通量就與線圈中的電流成正比，即

$$N\phi_B = Li \tag{6}$$

上式中的 N 為線圈的匝數，比例常數 L 即稱為該線圈的電感 (inductance)。

因為線圈面上的磁場只有 z 方向 (第 (4.3) 式) 不為零，且圓線圈呈現 z 軸對稱，因此可以在圓線圈面上取一極小的面積單元 $dS = 2\pi x dx$ ，在這個面積單元裡的磁通量 $d\phi_B = B_z \cdot 2\pi x dx$ ，而磁通量對 x 的積分上限為 $R - a$ ，此處的 a 為導線的截面半徑 (導線內部也有磁通量，不過我們可以假設導線的截面半徑 a 遠小於線圈的半徑 R ，因此導線內部的磁通量對整體的磁通量影響並不大)。若線圈的匝數 $N = 1$ ，由第 (4.3) 式與第 (6) 式可以得到單一圓線圈的電感為

$$L = \frac{N\phi_B}{i} = \frac{\mu_0 R}{2} \int_0^{R-a} \int_0^{2\pi} \frac{x(R - x \cos \theta)}{[x^2 + R^2 - 2Rx \cos \theta]^{3/2}} d\theta dx \tag{7}$$

而上式的積分裡顯示線圈的電感與電流的大小 i 並沒有關係，只跟線圈的幾何形狀 (半徑) 有關。要計算第 (7) 式中的電感值，我們仍然應用數值積分中的辛普森法則。圖 7 是假設導線的截面半徑 $a = 1\text{mm}$ ，所得到電感 L 與線圈半徑 R 的關係曲線，其中數值計算的絕對誤差取至 10^{-8} 以下。圖中曲線很接近一條直線，也就是說單一圓線圈的電感與線圈半徑之間，幾乎是一次方正比的關係。

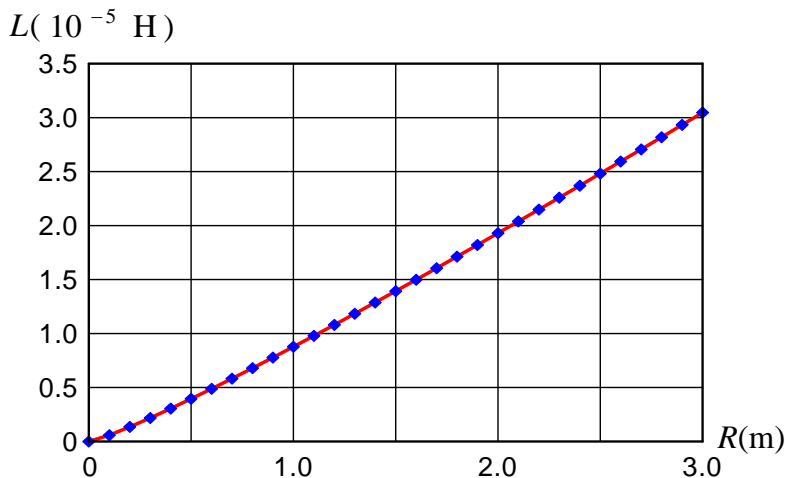


圖 7、單一圓線圈的電感 L 與線圈半徑 R 之關係曲線，其中導線的截面半徑為 1mm ，絕對誤差取至 10^{-8} 以下

肆、兩組圓線圈之間的互感應

兩組緊密纏繞圓線圈之間的互感應比較複雜，不過為了方便計算，在此假設兩組圓線圈共同一條中心軸且線圈平面互相平行的對稱情況，如圖 8 所示，其中兩組線圈之間的距離為 z_0 。如果流過第一組線圈的電流為 i_1 ，而在第二組線圈上所產生的磁通量為 ϕ_{21} ，假如這二組線圈附近沒有磁性物質，則磁通量與電流之間的關係為

$$N_2\phi_{21} = M_{21}i_1 \quad (8)$$

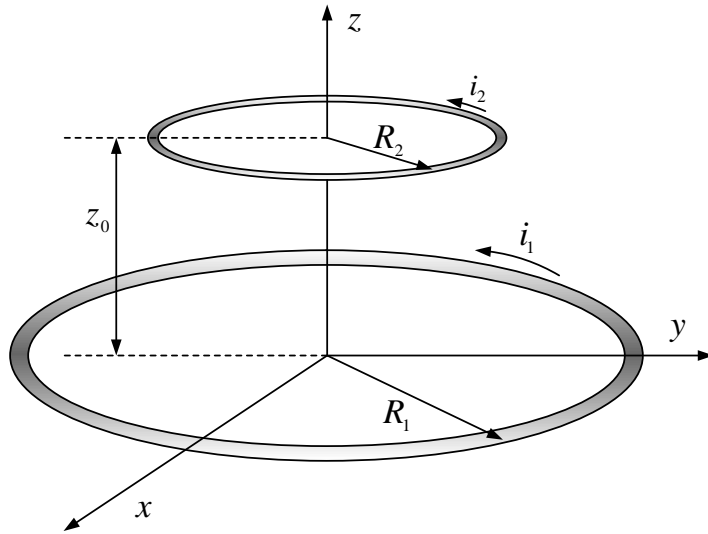


圖 8、共同一條中心軸且線圈平面互相平行的兩組圓線圈之相對位置圖，其中兩組線圈之間的距離為 z_0

第 (8) 式中 N_2 為第二組線圈的總匝數，而比例常數 M_{21} 即稱為該二組線圈間的互感 (mutual inductance)。與電感相同，互感 M_{21} 的大小，與第一組線圈的電流 i_1 無關，只與 R_1 、 R_2 、 z_0 和兩組線圈的匝數等幾何狀態有關。當然若是因為第二組線圈的電流 i_2 在第一組線圈 (線圈總匝數為 N_1) 上所產生的互感 M_{12} 也可以寫成以下形式

$$N_1\phi_{12} = M_{12}i_2 \quad (9)$$

而 M_{12} 的大小，亦與 i_2 無關，只與 N_1 、 N_2 、 R_1 、 R_2 和 z_0 有關而已。事實上， M_{21} 與 M_{12} 是相同的，也就是 $M_{21} = M_{12} = M$ ，我們從以下的數值計算便可以發現這項事實。

由於第二組線圈面的法向量為 z 軸的方向，因此在計算 ϕ_{21} 時，只需考慮第一組線圈的電流在第二組線圈面上所產生磁場的 z 分量 B_{1z} 即可。由 (4.3) 式可以知道 B_{1z} 為

$$B_{1z} = \frac{\mu_0 i_1 R_1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R_1 - x \cos \theta)}{[x^2 + z_0^2 + R_1^2 - 2R_1 x \cos \theta]^{3/2}} d\theta \quad (10)$$

我們從第 (8) 式和第 (10) 式可以得到兩組線圈的互感 M_{21} 為

$$M_{21} = \frac{N_2}{i_1} \phi_{21} = \frac{N_2 \mu_0 R_1}{2} \int_0^{R_2} \int_0^{2\pi} \frac{x(R_1 - x \cos \theta)}{[x^2 + z_0^2 + R_1^2 - 2R_1 x \cos \theta]^{3/2}} d\theta dx \quad (11)$$

上式的積分中顯然與電流的大小 i_1 無關，同時這裡也在對 x 的積分上限中，忽略了導線的截面半徑。例如 $N_2 = 1$ ， $R_1 = 0.5\text{m}$ ， $R_2 = 1.0\text{m}$ ，所得到互感 M_{21} 與兩線圈之間距離 z_0 的關係曲線如圖 9，其中數值計算的絕對誤差取至 10^{-13} 以下。圖 9 中的曲線顯示兩組線圈的互感隨著距離的增加而減少，不過這種現象應該很容易讓我們理解，因為距離愈大，二者的相互影響力本來就會愈來愈小。

另外我們也可以固定兩線圈之間的距離 z_0 ，而改變第二組線圈的半徑 R_2 ，視其互感 M_{21} 與 R_2 之間的關係。圖 10 是假設 $N_2 = 1$ ， $R_1 = 1.0\text{m}$ ， $z_0 = 1.0\text{m}$ ，所得到互感 M_{21} 與第二組線圈半徑 R_2 的關係曲線，其中數值計算的絕對誤差取至 10^{-13} 以下。

圖 10 中的曲線有兩個特殊點必須要做個說明。其中之一是前面有提到 M_{21} 與 M_{12} 的值是相等的，這一點從圖 9 和圖 10 可以看得出來。圖 9 中有一特殊點被標示出來，就是 $R_1 = 0.5\text{m}$ ， $R_2 = 1.0\text{m}$ ， $z_0 = 1.0\text{m}$ 的互感 M_{21} 為 $1.62 \times 10^{-7}\text{H}$ ；而圖 10 也有一個特殊點被標示出來，就是 $R_1 = 1.0\text{m}$ ， $R_2 = 0.5\text{m}$ ， $z_0 = 1.0\text{m}$ 的互感 M_{21} 也是 $1.62 \times 10^{-7}\text{H}$ 。也就是說，不管是第一線圈感應第二線圈，或是第二線圈感應第一線圈，其互感的值是相等的，不需寫成 M_{21} 或 M_{12} ，只要寫成 M 作為互感即可。

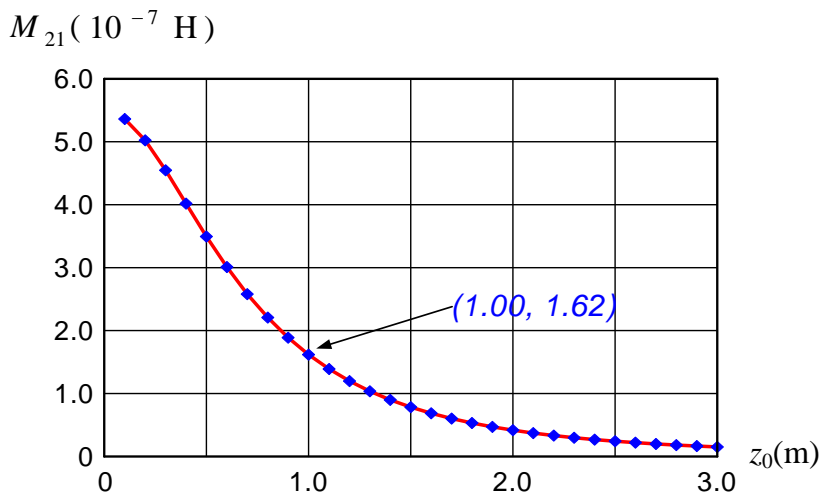


圖 9、假設 $N_2 = 1$ ， $R_1 = 0.5\text{m}$ ， $R_2 = 1.0\text{m}$ ，所得到互感 M_{21} 與兩線圈之間距離 z_0 的關係曲線，其中絕對誤差取至 10^{-13} 以下

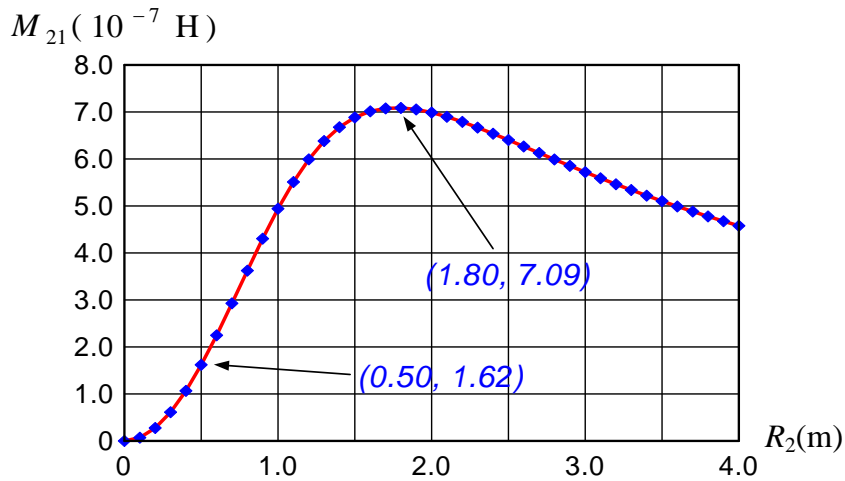


圖 10、假設 $N_2 = 1$, $R_1 = 1.0\text{m}$, $z_0 = 1.0\text{m}$, 所得到互感 M_{21} 與第二組線圈半徑 R_2 的關係曲線，其中絕對誤差取至 10^{-13} 以下

圖 10 中另外一個特殊點被標示出來，就是當 $R_1 = 1.0\text{m}$, $z_0 = 1.0\text{m}$ 的互感最大值大約發生在 $R_2 = 1.80\text{m}$ 時，這一點可以從圖 6 中的 (C) 看出來。該圖是半徑 1.0m ，電流 1.0A 的圓線圈在 $z = 1.0\text{m}$ 的磁場狀況，與磁通量有關的磁場分量是 B_z ，而該圖顯示 B_z 在 x 大約 1.80m 時方向由正轉負，因而在大於 1.80m 之後的磁通量便會出現負值，所以圖 10 中的互感的最大值才會出現在 R_2 約為 1.80m 的位置上。

伍、結論

1. 圓形載流線圈在圈面處產生的磁場，愈靠近導線處磁場愈大，且線圈內以圓心處磁場最小。
2. 圓形載流線圈在圈面處產生的磁場，與兩條相距 $2R$ ，且具等量且相反方向電流的平行無限長直導線，所產生的磁場類似。
3. 圓形載流線圈在圈面處以外產生的磁場，以靠近圈面處的磁場較大，且變化愈劇烈；遠離圈面處的磁場較小，且磁場曲線愈平滑。
4. 單一圓線圈的電感與線圈半徑之間的關係，呈現幾乎一次方正比。
5. 由數值積分的運算結果得知，兩組圓線圈之間的互感 $M_{21} = M_{12}$ 。
6. 共同中心軸 (z 軸) 的兩組圓線圈之間的互感最大值，發生在其中一組線圈產生的磁場 z 軸分量方向改變時。

備註

註一：一般用電腦計算數值積分時，所花的時間都不短，但若為了節省計算時間，可能所得的積分值誤差又過大。本文利用辛普森法則時，其誤差的控制是在程式中安排一個指令，當積分區間中 $n + 2$ 等分和 n 等分計算結果的差值小於某個值 M 時，就結束程式運算。例如，取 $M = 10^{-6}$ 的數值積分值為 I_1 ， $M = 10^{-7}$ 的計算值為 I_2 ， I_1 和 I_2 的曲線重疊之後若相差無幾，則絕對誤差即為小於 10^{-7} ；若兩曲線有明顯不同時，再另取 $M = 10^{-8}$ 計算一次，直到相鄰兩個數量級之間沒有圖形上的差異為止。這樣的好處是既可以避免不必要的計算，又可以節省電腦的運算時間。

參考文獻

- J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.
- D.Halliday, R.Resnick and J.Walker, *Fundamentals of Physics*, 7th Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2004.
- Deborah Hughes-Hallett, *Calculus: Single and Multivariable*, 5th Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2008.