
三次函數圖形的三個超額特徵

朱亮儒 洪有情 陳昭地*

國立臺灣師範大學 數學系

壹、引言

針對 95 及 99 版普通高級中學數學課綱，高三選修的微積分課程都涵蓋了三次多項函數的繪圖，尤其指明透過函數的遞增、遞減、極值點、反曲點，以及圖形的凹凸性等性質來探究其圖形的變化情形。反曲點為三次函數圖形的對稱中心，此一性質在 95 年高中數學各版本的教材，或無涉獵或因證明過於繁瑣而僅以特例說明此一特徵；再查看早期統一版的科教版本，高三理科數學也絕口不涉及三次函數圖形的點對稱性。最近，我們在寫 99 版的同樣內容時，經過一而再的探討與研究，終於找到兩種簡易的證明方法，除了把其中一種證法放在我們的新版教材內容外，想一想也應該讓有心人士先睹為快，早一點認識此一簡易證法；換句話說，在課綱製訂的過程中，應把「反曲點為三次函數圖形的心對稱中心」作為一項具體的特徵。三次函數既然是高中生學習微積分的重頭戲，於是，我們再進一步探究有沒有其他的特徵被遺漏且值得一併探究的內容；例如：大學微積分的用書中，Larson 微積分(第九版第七章)提到兩個值得在高三選修微積分來呈現的教材，我們也將在本文中一併提出。

對於任意的實係數三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，首先，由立方公式 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ，我們可以將多項式 $f(x)$ 配方如下：

$$\begin{aligned} f(x) &= (ax^3 + bx^2) + cx + d \\ &= a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + cx + d - \frac{b^2}{3a}x - \frac{b^3}{27a^2} \\ &= a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)\left(x + \frac{b}{3a}\right) + d - \frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + p\left(x + \frac{b}{3a}\right) + q, \end{aligned}$$

其中 $p = c - \frac{b^2}{3a} = f'\left(\frac{-b}{3a}\right)$ ， $q = d - \frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} = f\left(\frac{-b}{3a}\right)$ 。

* 為本文通訊作者

因此，在坐標平面上，函數 $y = f(x)$ 的圖形可由 $g(x) = ax^3 + px$ 的圖形依向量 $(\frac{-b}{3a}, f(\frac{-b}{3a}))$ 的方向平移而得。當三次函數的最高次項係數 $a < 0$ 時，我們可以透過對稱的方式，以 x 軸為對稱軸，描繪出對稱的圖形。因此，要研究實係數三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形，我們只需要考慮 $a > 0$ 的情況，再透過對稱性即可了解 $a < 0$ 時的圖形。

探討 $g(x) = ax^3 + px$ 的圖形可就 $p > 0$ 、 $p = 0$ 、 $p < 0$ 三種情況作分析。事實上，由於多項式函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 在每一點都可微分，因此， f 會有極值的點 x 就必須滿足方程式 $f'(x) = 0$ ，亦即

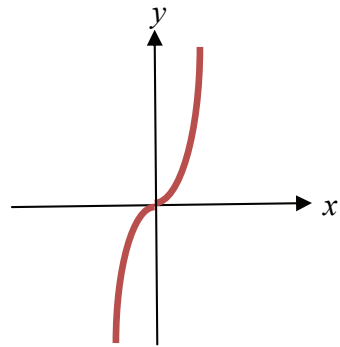
$$3ax^2 + 2bx + c = 0 ;$$

而此方程式的實根個數可由判別式 $\Delta = (2b)^2 - 4 \cdot (3a) \cdot c = 4(b^2 - 3ac)$ 來決定；很明顯地，當 $a > 0$ 時，判別式 $\Delta = -12ap$ 的值與 p 值異號。

第一種情形： $a > 0$ 且 $p > 0$ (即 $\Delta < 0$)

以 $g(x) = x^3 + 3x$ 為例：

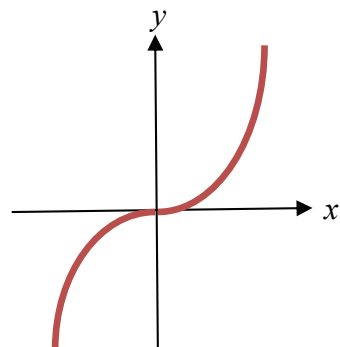
- (1) 沒有水平切線，反曲點為 $(0, 0)$ ，
- (2) 當 $x < 0$ 時，函數 g 遞增，圖形凹口向下，
- (3) 當 $x > 0$ 時，函數 g 遞增，圖形凹口向上，
- (4) 沒有極大值，也沒有極小值，
- (5) 圖形與 x 軸恰有一個交點 $(0, 0)$ 。



第二種情形： $a > 0$ 且 $p = 0$ (即 $\Delta = 0$)

以 $g(x) = x^3$ 為例：

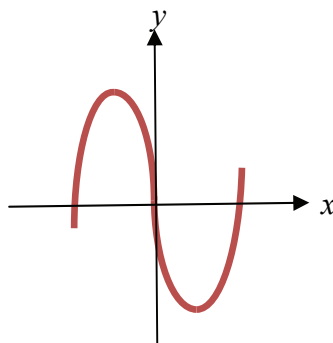
- (1) 有一水平切線 $y = 0$ ，反曲點為 $(0, 0)$ ，
- (2) 當 $x < 0$ 時，函數 g 遞增，圖形凹口向下，
- (3) 當 $x > 0$ 時，函數 g 遞增，圖形凹口向上，
- (4) 沒有極大值，也沒有極小值，
- (5) 圖形與 x 軸恰有一個交點 $(0, 0)$ 。



第三種情形： $a > 0$ 且 $p < 0$ (即 $\Delta > 0$)

以 $g(x) = x^3 - 3x$ 為例：

- (1) 有兩條水平切線 $y = 2, y = -2$ ，反曲點為 $(0, 0)$ ，
- (2) 當 $x < -1$ 時，函數 g 遞增，圖形凹口向下，
 $-1 < x < 0$ 時，函數 g 遞減，圖形凹口向下，
- (3) 當 $0 < x < 1$ 時，函數 g 遞減，圖形凹口向上，
 $x > 1$ 時，函數 g 遞增，圖形凹口向上，
- (4) 有一極大值 $g(-1) = 2$ 及一極小值 $g(1) = -2$ ，
- (5) 圖形與 x 軸恰有三個交點 $(-\sqrt{3}, 0), (0, 0), (\sqrt{3}, 0)$ 。



註明：義大利數學家卡丹(Cardano, 1501 ~1576)也曾經由移根的方式，將一般的三次方程式轉換成 $ax^3 + px + q = 0$ ，而得到求解三次方程式根的「卡丹公式」。

貳、反曲點為三次函數圖形對稱中心的特徵

我們知道：每一個實係數三次多項式函數都有唯一的反曲點，它不僅是函數圖形凹口變化的轉折點，也是圖形的對稱中心，整理如下：

定理：

三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形都是以反曲點 $(\frac{-b}{3a}, f(\frac{-b}{3a}))$ 為對稱中心的心對稱圖形。

證一：我們知道：當 $r = -\frac{b}{3a}$ 時， $(r, f(r))$ 為函數 f 圖形上唯一的反曲點；又

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ &= a(x + \frac{b}{3a})^3 + p(x + \frac{b}{3a}) + q \end{aligned}$$

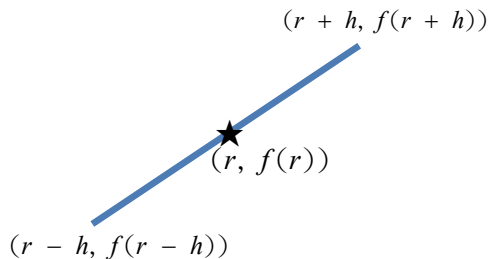
其中

$$\begin{aligned} p &= c - \frac{b^2}{3a} \end{aligned}$$

$$q = d - \frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} = f(r) ;$$

因此

$$f(x) = a(x - r)^3 + p(x - r) + f(r)。$$



於是，對任意實數 h ，我們有

$$\begin{aligned} f(r+h) &= ah^3 + ph + f(r) \text{ ,} \\ f(r-h) &= a(-h)^3 + p(-h) + f(r) \text{ 。} \end{aligned}$$

由此可推得

$$f(r+h) + f(r-h) = 2f(r) \text{ ,}$$

這表示圖形上的點 $(r+h, f(r+h))$ 與點 $(r-h, f(r-h))$ 對稱於 $(r, f(r))$ ；故 f 的圖形是以反曲點 $(r, f(r))$ 為對稱中心的心對稱圖形。

證二：

令 $r = -\frac{b}{3a}$ ，將 $f(x)$ 表成 $(x-r)$ 的多項式函數(Taylor 展開式)：

$$f(x) = a(x-r)^3 + b'(x-r)^2 + c'(x-r) + d' \text{ 。}$$

由

$$\begin{aligned} f'(r) &= 3ar^2 + 2br + c = c' \text{ ,} \\ f''(r) &= 6ar + 2b = 2b' \text{ ,} \\ f'''(r) &= 6a \text{ ,} \end{aligned}$$

可推得

$$a = \frac{f'''(r)}{6} \text{ , } b' = \frac{f''(r)}{2} = 0 \text{ , } c' = \frac{f'(r)}{1} \text{ , } d' = f(r) \text{ 。}$$

因此， $f(x) = a(x-r)^3 + f'(r)(x-r) + f(r)$ 。

接下來，仿照證法一的過程 ($p = f'(r)$)，即可推得 f 的圖形對稱於反曲點 $(r, f(r))$ 。

特別地，當 f 有極大值和極小值時，我們有以下結果：

定理：

三次函數 f 圖形上有極大點 $(\alpha, f(\alpha))$ 與極小點 $(\beta, f(\beta))$ 時，其連線段的中點

即為反曲點，坐標為 $(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2})$ 。

證：

設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，則 α, β 為 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ 的兩根。不失一般性，可設 $\alpha < \beta$ ，則

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} = r - h, \quad \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} = r + h,$$

其中 $r = -\frac{b}{3a}, h = \frac{\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ 。又 $(r, f(r))$ 反曲點為函數圖形的對稱中心，得知：

$(\alpha, f(\alpha))$ 與 $(\beta, f(\beta))$ 對稱於反曲點 $(r, f(r))$ ；故 $r = \frac{\alpha + \beta}{2}$ 且 $f(r) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$ 。由

此可推得 $f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$ ，亦即函數 f 圖形上極大點 $(\alpha, f(\alpha))$ 與極小點 $(\beta, f(\beta))$ 的連線段中點即為反曲點。

【範例】

設實係數三次函數 f 有極大值 $f(-1) = 6$ 及極小值 $f(5) = -2$ ，試求其圖形上反曲點的坐標。

解：反曲點的坐標為 $\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{6+(-2)}{2}\right) = (2, 2)$ 。

參、三次函數數值積分的一項特徵（辛浦森法及誤差分析）

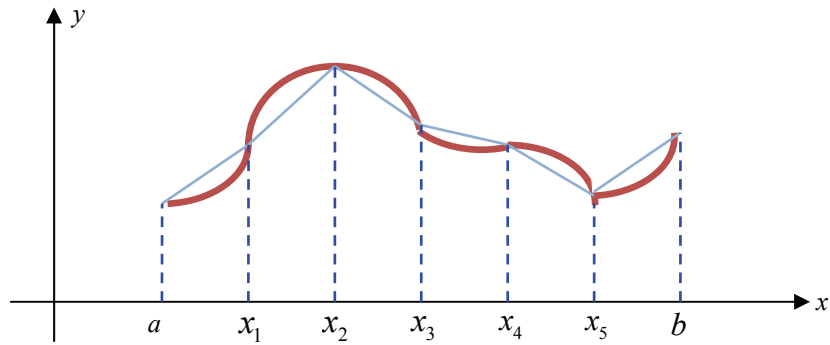
定積分 $\int_a^b f(x) dx$ 和曲線 $y = f(x)$ 與 x 軸圍成的區域面積有密切的關係；當 f

是 $[a, b]$ 上的連續函數時，雖然 f 可積分，但定積分 $\int_a^b f(x) dx$ 的值有些時候不易求得；

這就衍生出許多數值計算的方法及其估計誤差的問題。例如：「**梯形法**」是將 $[a, b]$ 分成 n

等分的子區間，每一子區間的寬度都是 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ，分割點依序如下：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b。$$



若考慮 f 為非負函數，則每一子區間作一梯形(第 k 個梯形的兩底分別為 $f(x_{k-1})$ 及 $f(x_k)$)的面積為 $T_k = \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \Delta x = \frac{b-a}{2n} (f(x_{k-1}) + f(x_k))$ 得知這 n 個梯形的面積和為

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n T_k &= \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{2n} (f(x_{k-1}) + f(x_k)) \\ &= \frac{b-a}{2n} (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) , \end{aligned}$$

因此， $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$

$$\approx \begin{cases} \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)), & n = 1 \\ \frac{b-a}{4} (f(a) + 2f(\frac{a+b}{2}) + f(b)), & n = 2 \end{cases} .$$

梯形法是在每一分個割的子區間上，以函數 f 的圖形兩端點的連線段作為 f 的近似圖形，因此可以看成是一次多項式函數(直線)近似 f ；事實上，梯形法的誤差可以描述如下：

定理：

若 $f : [a, b] \rightarrow R$ 連續，且 f'' 在 $[a, b]$ 上也連續，則對 $[a, b]$ 的 n 等分分割 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ ，

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2n} (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) + E_n,$$

其中誤差項 $E_n = -\frac{1}{12} \sum_{k=1}^n f''(c_k)(x_k - x_{k-1})^3$ ， $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ，滿足

$$|E_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \rightarrow 0.$$

當 $f : [a, b] \rightarrow R$ 是一線型函數時（即 $f(x) = px + q$ ）， $f''(x) = 0$ 恆成立，此時誤差項 $E_n = 0$ 恆成立，即 $\int_a^b f(x) dx$ 與 n 值無關，於是，可取 $n = 1$ 得到

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)).$$

當函數 $f(x) = px^2 + qx + r$ 為至多二次式時，我們也有以下更一般性的結果：

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

證：

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \left(\frac{1}{3} px^3 + \frac{1}{2} qx^2 + rx \right) \Big|_a^b \\ &= \left(\frac{1}{3} pb^3 + \frac{1}{2} qb^2 + rb \right) - \left(\frac{1}{3} pa^3 + \frac{1}{2} qa^2 + ra \right) \\ &= \frac{1}{6} (2p(b^3 - a^3) + 3q(b^2 - a^2) + 6r(b - a)) \\ &= \frac{b-a}{6} (2p(b^2 + ab + a^2) + 3q(b + a) + 6r) \\ &= \frac{b-a}{6} \left((pa^2 + qa + r) + (pb^2 + qb + r) + (p(a^2 + 2ab + b^2) + 2q(a + b) + 4r) \right) \\ &= \frac{b-a}{6} \left(f(a) + f(b) + 4 \left(p \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + q \left(\frac{a+b}{2} \right) + r \right) \right) \\ &= \frac{b-a}{6} \left(f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

同樣地，在每一分個割的子區間上，考慮以函數 f 的圖形兩端點的二次多項式函數圖形(拋物線)作為 f 的近似圖形，著名的辛浦森(Thomas Simpson,1710~1761)拋物線法就是把區間 $[a,b]$ 分割成 n 等分的子區間 (其中 n 為偶數)，每一子區間的寬度都是

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \text{ 分割點依序如下:}$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b。$$

在每一個雙子區間 $[x_{k-2}, x_k]$ 上，以次數不超過二次的多項式函數作為 f 的近似。例如：在區間 $[x_{k-2}, x_k]$ 上；利用過三點 $(x_{k-2}, f(x_{k-2})), (x_{k-1}, f(x_{k-1})), (x_k, f(x_k))$ 的 Lagrange 二階插值多項式函數

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x_{k-2}) \frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k-2}-x_{k-1})(x_{k-2}-x_k)} + f(x_{k-1}) \frac{(x-x_{k-2})(x-x_k)}{(x_{k-1}-x_{k-2})(x_{k-1}-x_k)} \\ &+ f(x_k) \frac{(x-x_{k-2})(x-x_{k-1})}{(x_k-x_{k-2})(x_k-x_{k-1})} = px^2 + qx + r \text{ (至多二次式)} \end{aligned}$$

由前面的結果可得：

$$\begin{aligned} \int_{x_{k-2}}^{x_k} f(x) dx &\approx \int_{x_{k-2}}^{x_k} g(x) dx \approx \frac{x_k - x_{k-2}}{6} (g(x_{k-2}) + 4g(x_{k-1}) + g(x_k)) \\ &\approx \frac{2(b-a)}{6n} (g(x_{k-2}) + 4g(x_{k-1}) + g(x_k)) \\ &\approx \frac{b-a}{3n} (g(x_{k-2}) + 4g(x_{k-1}) + g(x_k))。 \end{aligned}$$

於是，

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_k \int_{x_{k-2}}^{x_k} f(x) dx \approx \sum_k \frac{b-a}{3n} (g(x_{k-2}) + 4g(x_{k-1}) + g(x_k)) \\ &\approx \frac{b-a}{3n} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))。 \end{aligned}$$

如同梯形法的誤差，辛浦森拋物線法可以描述如下：

定理：

若 $f : [a, b] \rightarrow R$ 連續，且 $f^{(4)}$ 在 $[a, b]$ 上也連續， n 為偶數，則對 $[a, b]$ 的 n 等分分割 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ ，

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{3n} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)) + E_n$$

其中誤差項 $E_n = -\frac{1}{2880} \sum_{k=1}^{n/2} f^{(4)}(c_k)(x_{2k} - x_{2k-2})^5$ ， $c_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}]$ ，滿足

$$|E_n| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \rightarrow 0。$$

雖然辛浦森拋物線法的形式略為複雜，但當 n 足夠大時，它所產生的誤差明顯比梯形法的誤差小。當 f 是四次以上的多項式函數時，很明顯誤差項 E_n 是存在的，又當 f 是至多三次式函數時， $f^{(4)}(x) = 0$ 恆成立，此時誤差項 $E_n = 0$ 恆成立，即 $\int_a^b f(x) dx$ 與偶數 n 的值無關，於是，可取 $n = 2$ 得到以下的恆等式：

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)。$$

此一恆等式也可以直接證明如下：

定理：

若 f 為三次函數，則 $\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)。$

證：

先前已證明過至多二次的多項式函數 $g(x) = px^2 + qx + r$ 都滿足恆等式：

$$\int_a^b g(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right)。$$

由於定積分具有線性的性質，因此，我們僅須再證明

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{b-a}{6} \left(a^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3 \right)。$$

事實上，

$$\begin{aligned} \int_a^b x^3 dx &= \frac{1}{4}(b^4 - a^4) = \frac{b-a}{4}(b^3 + b^2a + ba^2 + a^3) \\ &= \frac{b-a}{6} \left(\frac{3}{2}(b^3 + b^2a + ba^2 + a^3) \right) \\ &= \frac{b-a}{6} \left(a^3 + \frac{1}{2}(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + b^3 \right) \\ &= \frac{b-a}{6} \left(a^3 + \frac{1}{2}(a+b)^3 + b^3 \right) \\ &= \frac{b-a}{6} \left(a^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3 \right)。$$

【範例】

若 f 為三次函數，其圖形通過點 (1,2), (5,8), (9,11)，試求 $\int_1^9 f(x) dx$ 之值。

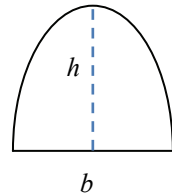
解：已知 $f(1)=2, f(5)=8, f(9)=11$ ，利用上面的恆等式，可得

$$\int_1^9 f(x) dx = \frac{9-1}{6} \left(f(1) + 4f\left(\frac{1+9}{2}\right) + f(9) \right) = \frac{8}{6} (2 + 4 \cdot 8 + 11) = 60。$$

【範例】

如圖為一正拋物線拱形，試證明阿基米得面積公式：

「底邊長 b 、高為 h 的正拋物線拱形之面積為 $\frac{2}{3}bh$ 。」



解：取拋物線 $y=f(x)$ 滿足： $f\left(\frac{-b}{2}\right)=f\left(\frac{b}{2}\right)=0, f(0)=h$ ，則此正拋物線拱形的面積為

$$\int_{-b/2}^{b/2} f(x) dx = \frac{b}{6} \left(f\left(\frac{-b}{2}\right) + 4f(0) + f\left(\frac{b}{2}\right) \right) = \frac{2}{3}bh。$$

【範例】

三次函數 f 有極大值 $f(a)$ 及極小值 $f(b)$ ，試求 $\int_a^b f(x) dx$ 之值。

解：函數 f 的反曲點恰為極大點 $(a, f(a))$ 與極小點 $(b, f(b))$ 的連線段中點，故反曲點為

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{f(a)+f(b)}{2}\right), \text{ 得知： } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2}。 \text{ 因此，}$$

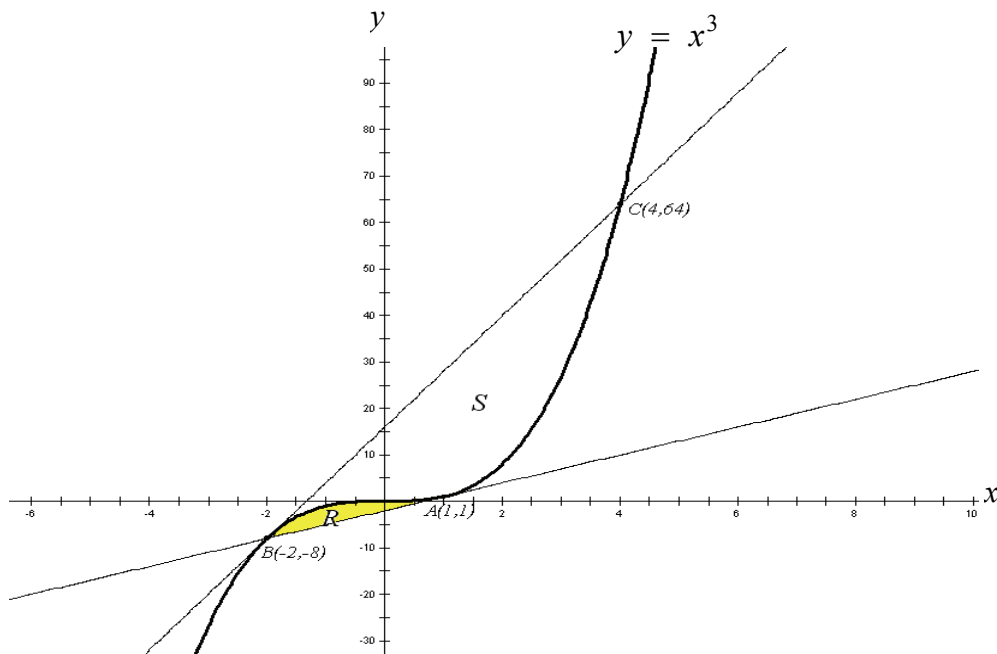
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \\ &= \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4 \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2} + f(b) \right) \\ &= \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))。 \end{aligned}$$

肆、三次函數定積分的另一個特徵

在 Larson 第 9 版微積分第七章解題第 8 題(第 517 頁)提到了以下的問題：

問題：

以曲線 $\Gamma: y = x^3$ 上一點 $A(1,1)$ 為切點作 Γ 的切線，設與 Γ 另交於一點 B ，再以 B 為切點作 Γ 的切線交 Γ 於另一點 C ，並設 R 為 Γ 與切線 AB 所圍成區域的面積，而 S 為 Γ 與切線 BC 所圍成區域的面積。試問 R 與 S 面積有何關係？又此關係與起始點 A 的位置是否有關？



直接計算可以得到： $A(1, 1), B(-2, -8), C(4, 64)$ ，而兩切線方程式分別為

$$AB : y = 3x - 2 \text{、} BC : y = 12x + 16$$

於是， $R = \int_{-2}^1 (f(x) - (3x - 2)) dx = \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx = \frac{27}{4}$ ，而

$$S = \int_{-2}^4 ((12x + 16) - f(x)) dx = \int_{-2}^4 (-x^3 - 12x - 16) dx = 108。$$

同樣地，在起始點 A 為 (h, h^3) 時，可以得到 $R = \frac{27}{4} h^4, S = 108h^4$ ；故可得知面積 S 恆為 R 的 16 倍。

這裡自然會好奇的想知道上述 16 倍的面積關係，是不是一般三次函數圖形的共同現象？如果是，這也應該算是三次函數圖形的微積分一項特徵吧！首先，我們對簡化的三次函數 $f(x) = ax^3 + px + q$ 作研究，發現以下的結果：

定理：

設 $A(h, f(h))$ 為三次函數 $f(x) = ax^3 + px + q$ 圖形上異於反曲點的任意一點，以 A 為切點的切線 $y = \ell(x)$ 必交曲線 $\Gamma: y = f(x)$ 於另一點 B ，且此交點 B 的坐標為 $(-2h, f(-2h))$ ，而曲線 Γ 與切線 AB 所圍成區域的面積

$$T(h) = \frac{27}{4} |a| h^4。$$

證：由 $f'(x) = 3ax^2 + p$ ，得知切線方程式為 $y - f(h) = f'(h)(x - h)$ ，整理得

$$y = (3ah^2 + p)x - 2ah^3 + q。$$

又 $f''(x) = 6ax$ ，得知函數 f 圖形的反曲點為 $(0, q)$ ，故 $h \neq 0$ 。

解方程式 $ax^3 + px + q = (3ah^2 + p)x - 2ah^3 + q$ ，即

$$a(x^3 - 3h^2x + 2h^3) = 0，$$

$$a(x - h)^2(x + 2h) = 0，$$

解得 $x = h$ (重根)或 $x = -2h$ 。因此，另一交點 B 的坐標為 $(-2h, f(-2h))$ 。

至於所圍成區域的面積的求法，不妨設 $a > 0, h > 0$ ，此時，曲線 Γ 位在 \overline{AB} 的上方，故所圍成區域的面積為

$$T(h) = \int_{-2h}^h |f(x) - \ell(x)| dx = \int_{-2h}^h (f(x) - \ell(x)) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-2h}^h (ax^3 + px + q - (3ah^2 + p)x + 2ah^3 - q) dx \\
 &= a \int_{-2h}^h (x^3 - 3h^2x + 2h^3) dx \\
 &= a \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}h^2x^2 + 2h^3x \right) \Big|_{-2h}^h \\
 &= a \left(\frac{1}{4}h^4 - \frac{3}{2}h^4 + 2h^4 \right) - a \left(\frac{1}{4}(-2h)^4 - \frac{3}{2}h^2(-2h)^2 + 2h^3(-2h) \right) \\
 &= \frac{27}{4}ah^4.
 \end{aligned}$$

推論：

設 A 為三次函數 $f(x) = ax^3 + px + q$ 圖形上異於反曲點的任意一點，並設以 A 為切點的切線交曲線 $\Gamma: y = f(x)$ 於另一點 B ，再以 B 為切點作 Γ 的切線交 Γ 於另一點 C 。若 R 表示 Γ 與切線 AB 所圍成區域的面積，而 S 為 Γ 與切線 BC 所圍成區域的面積，則 $S = 16R$ 。

證：

設 $T(t)$ 表示以 $P(t, f(t))$ 為切點作 Γ 的切線所得到與曲線 $\Gamma: y = f(x)$ 所圍成區域的面積，並設起始點 A 的坐標為 $(h, f(h))$ ，其中 $h \neq 0$ 。

由前面定理知：交點 B 的坐標為 $(-2h, f(-2h))$ ，而曲線 Γ 與切線 AB 所圍成區域的面積 $R = T(h) = \frac{27}{4}|a|h^4$ 。

同樣地，以 $B(-2h, f(-2h))$ 為切點作 Γ 的切線，與 Γ 的交點 C 之坐標為 $(4h, f(4h))$ ，而曲線 Γ 與切線 BC 所圍成區域的面積

$$S = T(-2h) = \frac{27}{4}|a|(-2h)^4 = 108|a|h^4。$$

於是可得 $S = 16R$ 。

上面得到的面積公式 $T(h) = \frac{27}{4}|a|h^4$ 與 x 項的係數 p 及常數項 q 都無關；至於

x^2 項的係數不為 0 時，面積 $T(h)$ 的公式又是如何呢？事實上，此性質推廣到一般的實係數三次函數時，結果及其推論也都是正確的，整理如下：

陳朱洪性質：

設 A 為三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 圖形上異於反曲點的任意一點，並設以 A 為切點的切線交曲線 $\Gamma: y = f(x)$ 於另一點 B ，再以 B 為切點作 Γ 的切線交 Γ 於另一點 C 。若 R 表示 Γ 與切線 AB 所圍成區域的面積，而 S 為 Γ 與切線 BC 所圍成區域的面積，則 $S = 16R$ ；且當點 A 的 x 坐標為 h 時，我們有下列的公式：

(1) 點 B 的 x 坐標為 $-2h - \frac{b}{a}$ ，點 C 的 x 坐標為 $4h + \frac{b}{a}$ ，

(2) 面積公式 $R = \frac{27}{4}|a|(h + \frac{b}{3a})^4$ ， $S = 108|a|(h + \frac{b}{3a})^4$ 。

證：

令 $r = \frac{-b}{3a}$ ，並將坐標原點 O 平移到 $O'(r, 0)$ ，建立 XY 坐標系：原 x 軸仍為新的

X 軸，而以 $x = r$ 為新的 Y 軸，則原三次函數 f 變成

$$g(X) = f(X - r) = aX^3 + pX + q, \text{ 其中 } p = f'(r), q = f(r)。$$

若起始點 A 的坐標為 $(h, f(h))$ ，其中 $h \neq r$ ，則對應的點 B, C 及其在 XY 坐標系的對應點 A', B', C' 之坐標可以推導如下：

點 A 的 x 坐標 h 變成 X 坐標 $h + \frac{b}{3a}$ ，

點 B 的 X 坐標為 $-2(h + \frac{b}{3a})$ ，故其 x 坐標為 $-2(h + \frac{b}{3a}) - \frac{b}{3a} = -2h - \frac{b}{a}$ ，

點 C 的 X 坐標為 $4(h + \frac{b}{3a})$ ，故其 x 坐標為 $4(h + \frac{b}{3a}) - \frac{b}{3a} = 4h + \frac{b}{a}$ 。

xy 坐標系	A	B	C
	$(h, f(h))$	$(-2h - \frac{b}{a}, f(-2h - \frac{b}{a}))$	$(4h + \frac{b}{a}, f(4h + \frac{b}{a}))$
XY 坐標系	A'	B'	C'
	$(h + \frac{b}{3a}, g(h + \frac{b}{3a}))$	$(-2(h + \frac{b}{3a}), g(-2(h + \frac{b}{3a})))$	$(4(h + \frac{b}{3a}), g(4(h + \frac{b}{3a})))$

再利用坐標軸平移面積不變量，得知區域面積 R 及 S 可以計算如下：

$$R = T(h + \frac{b}{3a}) = \frac{27}{4}|a|(h + \frac{b}{3a})^4,$$

$$S = T(-2(h + \frac{b}{3a})) = \frac{27}{4}|a|(-2(h + \frac{b}{3a}))^4 = 108|a|(h + \frac{b}{3a})^4,$$

因此， $S = 16R$ 。證畢！

註明：

在上面的性質中，當點 A 恰為反曲點 $(\frac{-b}{3a}, f(\frac{-b}{3a}))$ 的特殊情況，這時，過切點 A 的切線方程式為

$$y - f(\frac{-b}{3a}) = f'(\frac{-b}{3a})(x + \frac{b}{3a}),$$

即 $a(x + \frac{b}{3a})^3 = 0$ 。故此切線與 Γ 的交點之 x 坐標滿足

$$a(x + \frac{b}{3a})^3 + p(x + \frac{b}{3a}) + q = p(x + \frac{b}{3a}) + q,$$

即 $a(x + \frac{b}{3a})^3 = 0$ ，得到 $x = \frac{-b}{3a}$ （三重根），所以交點 B 的 x 坐標亦為 $\frac{-b}{3a}$ ；同理，交

點 C 的 x 坐標也是 $\frac{-b}{3a}$ 。此時， A, B, C 是同一點，而 R 與 S 都是縮成一點的區

域，面積都是 0，故 S 的面積還是 R 的 16 倍。另一方面，當 f 為至少四次的多項式函數時，給了起始點 A ，另一交點 B 可能不存在；即使存在，也可能不是唯一的或者不容易求得。

伍、結論

本文所指出的三個超額特徵應可提供教導學生微積分課程有關三次函數很好的教材內容；它們都是值得高三學生選修微積分之優美有用的題材！尤其是三次曲線的反曲點所扮演的重要角色，以及連續兩次作切線而與此三次曲線圍成的兩區域面積的關係，更能製作電腦動畫來呈現，以展現作切線與求區域面積的兩大主題，必能增進這些特徵的有趣性與應用價值。

參考資料

李政豐、陳庭雄、陳昭地(民 100)，探討五種數值積分的近似值求法及其誤差分析，預定刊登於教育部高中數學學科中心電子報 100 年 3 月第 53 期。

李虎雄、陳昭地、黃登源、朱亮儒等(民 97)，普通高級中學選修數學(II)，康熹文化事業有限公司版。

李虎雄、陳昭地、黃登源、朱亮儒等(民 100)，普通高級中學選修數學甲(II)，康熹文化事業有限公司版。

Larson Edwards, Calculus, 9th edition.