連接正方形內部或邊界任意點的最短路徑之探討

王政越

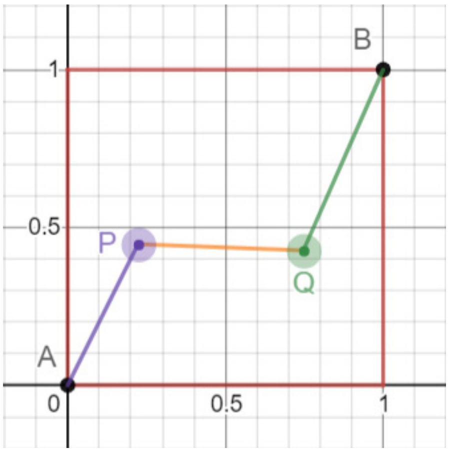
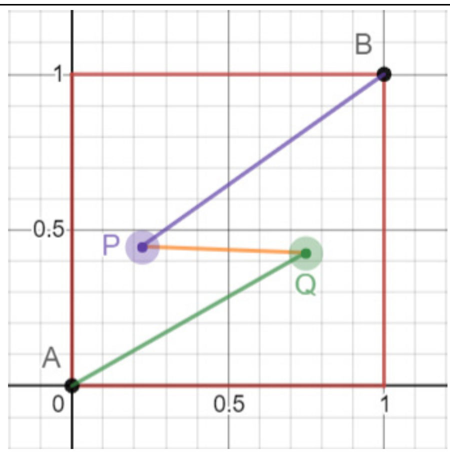
國立彰化高級中學

研究動機

先前在網路上看到一款稱為「Surviv.io」的網頁遊戲，玩家需要在固定大小的場地中蒐集物資，並與其他敵人對戰。在遊玩過程中，有時需要到兩個不同的地點（P、Q 兩點）蒐集物資，而玩家又需要從現在的位置（點 A）移動到目的地（點 B）。因此，我就開始思考，從點 A 移動到點 B 的途中，若必須經過 P 與 Q 兩點，那是先走 P 再走 Q，或是先走 Q 再走 P，哪一種走法會比較快呢？

摘要

給定一正方形，其四個頂點設為 $(0,0)$、$(1,0)$、$(1,1)$、$(0,1)$，令 $A=(0,0)$、$B=(1,1)$，今在此正方形內部或邊界任取相異兩點 P、Q。某人想從點 A 走到點 B，同時需要經過 P 與 Q，若途中沒有障礙，可以直線行走，此時可以有兩種走法：先經過 P 再經過 Q，此時路徑長為 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$，或是先經過 Q 再經過 P，此時路徑長為 $\overline{AQ}+\overline{QP}+\overline{PB}$。我們找尋一套判別方法，能快速判斷哪一種路徑為最短路徑。

<table>
<tr><th>路徑 $APQB$</th><th>路徑 $AQPB$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

壹、預備工作：雙曲線的性質

圖 1 為滿足 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a<\overline{F_1F_2}$ 的所有點 P 所構成的圖形，根據定義，這是一條雙曲線。設此雙曲線為 Γ，左半支為 Γ_1、右半支為 Γ_2，圖形 Γ_1、Γ_2 分別符合下列方程式：

$$\begin{cases}\Gamma_1:\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=2a\\ \Gamma_2:\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=2a\end{cases}$$

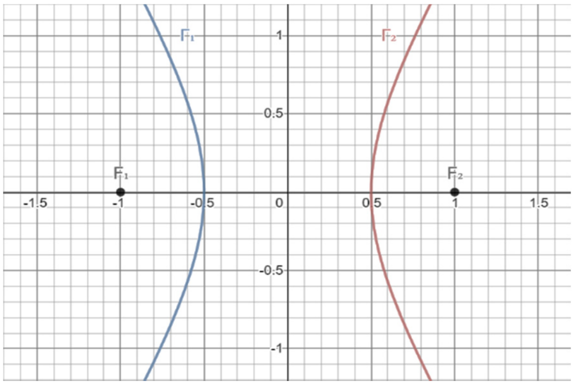
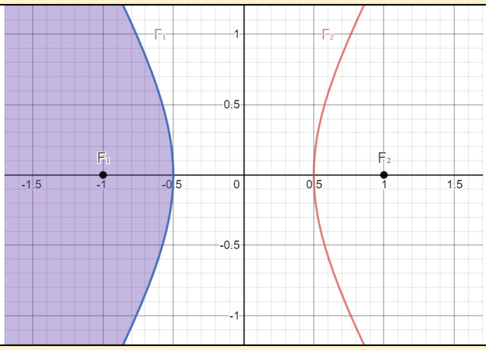
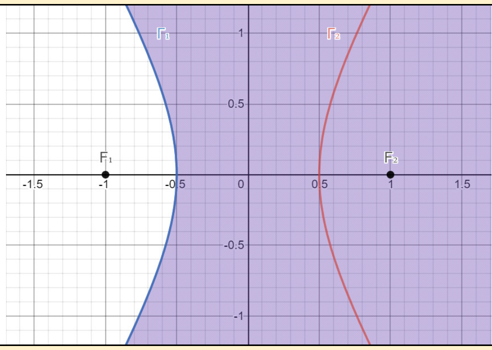
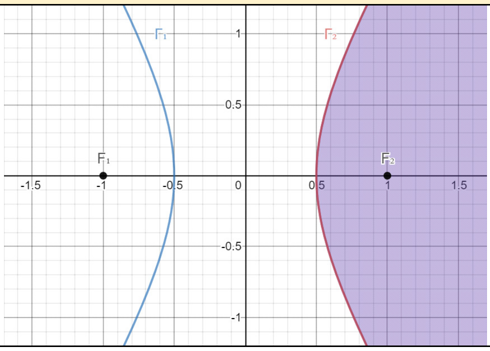
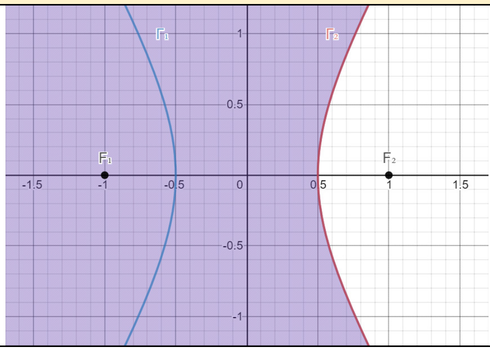
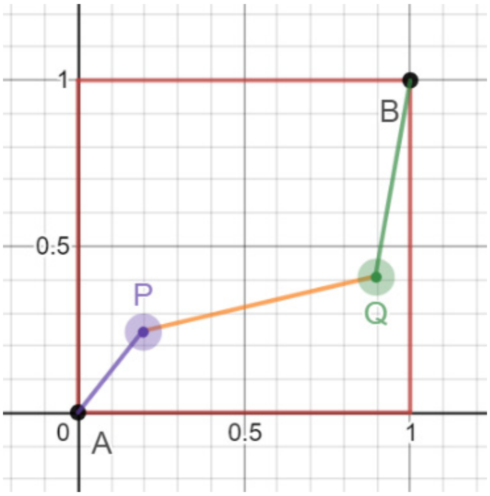


圖 1

若將方程式中的等號改為大於或是小於，則所有滿足該不等式的點將會呈下表分布（陰影區域）：

Case 1：$\overline{PF_2}-\overline{PF_1}>2a$	Case 2：$\overline{PF_2}-\overline{PF_1}<2a$
	
Case 3：$\overline{PF_1}-\overline{PF_2}>2a$	Case 4：$\overline{PF_1}-\overline{PF_2}<2a$
	

貳、討論



設 $P(x_1,y_1)$、$Q(x,y)$，今固定點 P，我們想知道點 Q在什麼範圍內，先走點 P 會是最短路徑，即 $\overline{AQ}+\overline{QP}+\overline{PB}>\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$，我們經由距離公式列出滿足上述條件的不等式：

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x_1-1)^2+(y_1-1)^2}>\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\text{，}$$

再移項得：

$$\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}>\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}-\sqrt{(x_1-1)^2+(y_1-1)^2}\quad\text{。(}*\text{)}$$

設 $K_1=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}-\sqrt{(x_1-1)^2+(y_1-1)^2}$，由三角不等式：

$$|K_1|\le\sqrt{(0-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}\text{。}$$

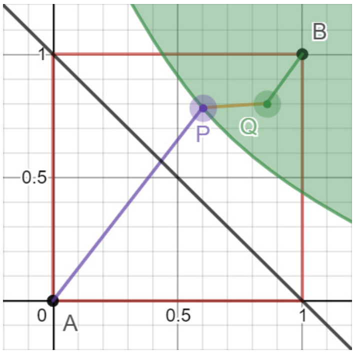
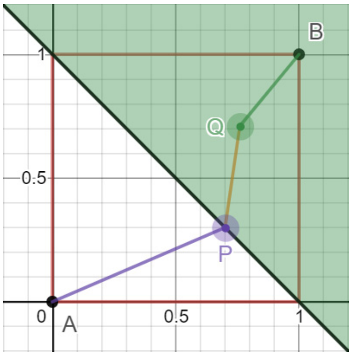
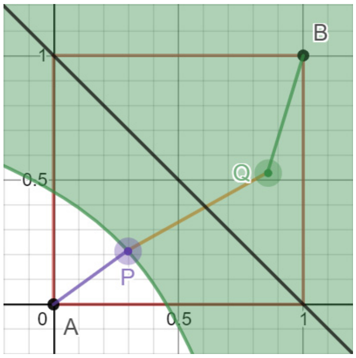
依題意，點 $P\neq A$、$P\neq B$，所以等號不會成立，即 $|K_1|<\sqrt{2}$。另一方面，若 $K_1=0$，可知 P 在 $A(0,0)$、$B(1,1)$ 兩點連線 $\overline{AB}$ 之中垂線 $L{:}\,x+y=1$ 上；若 $K_1>0$，點 P 在直線 L 的右側；若 $K_1<0$，點 P 在直線 L 的左側。

又($*$)式可以改寫成為：

$$\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}>K_1\text{。}$$

此不等式的邊界即為雙曲線 $|\overline{QF_1}-\overline{QF_2}|=2a=|K_1|$ 的其中一側，由此式可以得知，這條雙曲線的焦點會在 $F_1=A(0,0)$ 與 $F_2=B(1,1)$ 上，設其左（下）半支為 Γ_1、右（上）半支為 Γ_2。

當 $\sqrt{2}>K_1>0$ 時，符合前一小節中 $\overline{QF_1}-\overline{QF_2}>2a=K_1$ 的形式，此時，點 Q 的範圍會在 Case 3；而當 $0>K_1>-\sqrt{2}$ 時，符合 $\overline{QF_2}-\overline{QF_1}<2a=-K_1$ 的形式，此時點 Q 的範圍會在 Case 2；若 $K_1=0$，則 $\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}>0$，移項化簡得 $x+y-1>0$，點 Q 的範圍會在直線 $L{:}\,x+y=1$ 的右側。以上討論可以整理成下面的表格：

<table>
<tr><td>$\sqrt{2} > K_1 > 0$</td><td>$K_1 = 0$</td><td>$0 > K_1 > -\sqrt{2}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>P在直線 L 右側</td><td>P在直線 L 上</td><td>P在直線 L 左側</td></tr>
</table>

而當 P、Q 兩點同時在 Γ_1 上（或同時在 Γ_2 上或同時在直線 $L{:}\,x+y=1$ 上）時，$\overline{PA}-\overline{PB}=\overline{QA}-\overline{QB}$，即 $\overline{AQ}+\overline{QP}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$，無論先走 P 點或 Q 點，其距離會等長。

綜合以上討論，我們將其整理成以下的判別定理。

定理

給定一正方形，其四個頂點設為 $(0,0)$、$(1,0)$、$(1,1)$、$(0,1)$，令 $A(0,0)$、$B(1,1)$。今在此正方形內部或邊界任取相異兩點 P、Q，但 P、Q 異於 A、B 兩點；令

$$L_{APQB}=\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}，L_{AQPB}=\overline{AQ}+\overline{QP}+\overline{PB}。$$

設直線 $L{:}\,x+y=1$，並設以 A、B 兩點為焦點，且過點 P 的雙曲線為 Γ，其左半支為 Γ_1、右半支為 Γ_2。則：

(1) 若點 P 在直線 L 的右側，則僅當 Q 在 Γ_2 的右側時，$L_{APQB}<L_{AQPB}$。

(2) 若點 P 在直線 L 上，則僅當 Q 在直線 L 的右側時，$L_{APQB}<L_{AQPB}$。

(3) 若點 P 在直線 L 的左側，則僅當 Q 在 Γ_1 的右側時，$L_{APQB}<L_{AQPB}$。

(4) 若 P、Q 同時在 Γ_1（或 Γ_2 或直線 L）上，則 $L_{APQB}=L_{AQPB}$。

參、結語

以 $\overline{AB}$ 為對角線的正方形的內部或邊界任取 k 點 $P_1,P_2,\ldots,P_k$，顯然，當 $k=1$ 時，由點 A 經 P_1 到點 B 的最短路徑是唯一的，其路徑長為 $\overline{AP_1}+\overline{P_1B}$。當 $k=2$ 時，由點 A 經 P_1 與 P_2 再到點 B 的最短路徑就有兩種可能的方式，在本作品中我們提出一個判別法則，其最短路徑長為 $\min\{\overline{AP_1}+\overline{P_1P_2}+\overline{P_2B},\ \overline{AP_2}+\overline{P_2P_1}+\overline{P_1B}\}$。當 $k\geq 3$ 時，由點 A 經

$P_1, P_2, \cdots$與 P_k 再到點 B 的最短路徑就有 $k!$ 種可能的方式，有興趣的讀者可進一步去研究找尋其最短路徑。最後要感謝指導老師：龔詩尹老師。

肆、參考文獻

E.W. Dijkstra (1959). A note on two problems in connexion with graphs. Numerische *Mathematik 1*, 269-271.

J. Kim and N. Clark (2017). Surviv.io - 2D Battle Royale，網址：https://surviv.io/

K.H. Rosen (2002). *Discrete Mathematics and Its Applications*. McGraw-Hill College. ISBN 0-07-293033-0.

F.B. Zhan and C.E. Noon (1998). Shortest Path Algorithms: An Evaluation Using Real Road Networks. *Transportation Science. 32* (1): 65-73.

樂陽、龔健雅 (2020). Dijkstra 最短路徑算法的一種高效率實現.《科學技術創新》**(17)**, 75-77.