以新增數據點(0,?)及逆推階差的差分運算列表法直取多項式函數

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

壹、前言

尋找數列一般項的多項式函數長期以來都是透過牛頓(Isaac Newton)差值法或拉格朗日(Joseph-Louis Lagrange)差值法來完成，兩者都需要就已知數列值先列出多項式連乘積的線性組合運算式，再展開連乘積作運算整理，最後重組成依次數由高而低順序嚴整排列、整式分佈的多項式函數。

本主題要提出新思維的另類分析法;針對已知數列值首先作前向差分運算同時編製出其原型的差分計算表，並在此差分運算表的最前緣以新增一個數據點(0,?)，再透過應用逆推差分運算法來形成擴充的新型差分運算列表，因而得出函數的常數項數值。接著逐一編製出含數據點(0,?)的降 1 次數函數、降 2 次數函數、降 3 次數函數、……、至降 $n-1$ 次數函數等各級差分運算列表，且依列表順序分別得出 1 次數項係數、2 次數項係數、3 次數項係數、……、至 n 次數項(首項)係數的各數值，以直接取到完整正確的多項式函數。

在數據的差分計算列表中可發現到每一位置的運算式都是呈現項式型態有規律分佈的整式多項式及數列的二項式變換型態，而不是凌亂麻煩的無序狀態，這在推演分析過程中順利地降低了思考的複雜困難度,使得在作逆推演繹與比對的過程中所懷持的思維意念與操作演算都變得更熟悉、輕快。

所有詳細解說敘述的實證過程，將在下列主文中完整呈現出理論推演，對照比較，實際運算編列表格的嚴謹程序步驟來。

貳、本文

為了展示主題作用的功能,對已知數列所有數值可以找到一個適配多項式重新生成這些值，將滿足數列各數值的第 n 項通項表示式寫成型如 $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ 的多項式函數型式，$x=1,2,3,\ \cdots\ ,n,n+1,\ \cdots$ 。假定 $n+1$ 個數列值給出的函數為 $y=f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$，將此數列值改寫成對應的各數據點依順序排列為：

$$(1,f(1)),\ (2,f(2)),\ (3,f(3)),\ \cdots\ ,(n,f(n)),\ (n+1,f(n+1))$$

所有自理論推演到實際運算編列表格流程均必須依循標準操作演算程序 SOP 始能達成任務。以下就是 SOP 程序所規範出實際演繹步驟的策略與方法；

A. 原型差分運算實作表

首先要編製出這數列值的橫式原型差分運算表，實作演算表列詳情如下；

x：　$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \cdots \quad n-1 \quad n \quad n+1$

y：　$f(1) \quad f(2) \quad f(3) \quad f(4) \quad \cdots \quad f(n-1) \quad f(n) \quad f(n+1)$

1 階：　$f(2)-f(1) \quad f(3)-f(2) \quad f(4)-f(3) \quad \cdots \quad f(n)-f(n-1) \quad f(n+1)-f(n)$

2 階：　$f(3)-2f(2)+f(1) \quad f(4)-2f(3)+f(2) \quad \cdots \quad f(n+1)-2f(n)+f(n-1)$

3 階：　$f(4)-3f(3)+3f(2)-f(1) \quad \cdots \quad f(n+1)-3f(n)+3f(n-1)-f(n-2)$

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

$n-3$ 階：　$\sum_{k=0}^{n-3}(-1)^k C_k^{n-3} f(n-2-k) \quad \sum_{k=0}^{n-3}(-1)^k C_k^{n-3} f(n-1-k) \quad \cdots$

$n-2$ 階：　$\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k C_k^{n-2} f(n-1-k) \quad \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k C_k^{n-2} f(n-k) \quad \cdots$

$n-1$ 階：　$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_k^{n-1} f(n-k) \quad \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_k^{n-1} f(n+1-k)$

n 階：　$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^{n} f(n+1-k)$

此處，$C_k^n = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$，其中 $n! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n$。組合學上，$C_k^n$ 符號式代表為從 n 件不同物件中任意選取 k 項物件的組合數。

B. 新增數據點(0,?)的新差分運算實作表

在原型差分運算表的最前緣以新增一個數據點(0,?)，此處(0,?)必為$(0, a_0)$，則新增 0 數據點後的新型差分運算列表其實作演算表列(部份)詳情如下；

x：　$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad n \quad n+1$

y：　$f(0) \quad f(1) \quad f(2) \quad f(3) \quad \cdots \quad f(n) \quad f(n+1)$

1 階：　$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \sum_{i=1}^{n} a_i(2^i-1) \quad \sum_{i=1}^{n} a_i(3^i-2^i) \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^{n} a_i[(n+1)^i-n^i]$

2 階：　$\sum_{i=2}^{n} a_i(2^i-2) \quad \sum_{i=2}^{n} a_i(3^i-2^{i+1}+1) \quad \cdots \quad \sum_{i=2}^{n} a_i[(n+1)^i-2n^i+(n-1)^i]$

3 階：　$\sum_{i=3}^{n} a_i(3^i-3\cdot 2^i+3) \quad \sum_{i=3}^{n} a_i(4^i-3\cdot 3^i+3\cdot 2^i-1) \quad \cdots$

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

$n-3$ 階：　$\sum_{i=n-3}^{n}\{a_i[\sum_{k=0}^{n-4}(-1)^k C_k^{n-3}\cdot(n-3-k)^i]\}$

$\sum_{i=n-3}^{n}\{a_i[\sum_{k=0}^{n-3}(-1)^k C_k^{n-3}\cdot(n-2-k)^i]\} \quad \cdots$

$n-2$階：　$\sum_{i=n-2}^{n}\left\{a_i[\sum_{k=0}^{n-3}(-1)^k C_k^{n-2}\cdot(n-2-k)^i]\right\}$

$\sum_{i=n-2}^{n}\left\{a_i[\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k C_k^{n-2}\cdot(n-1-k)^i]\right\}$　$\cdots$

$n-1$階：　$\sum_{i=n-1}^{n}\left\{a_i[\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k C_k^{n-1}\cdot(n-1-k)^i]\right\}$

$\sum_{i=n-1}^{n}\left\{a_i[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_k^{n-1}\cdot(n-k)^i]\right\}$　$\cdots$

n階：　$[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_k^{n}\cdot(n-k)^n]a_n$　　$[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^{n}\cdot(n+1-k)^n]a_n$

在計算到最後一列n階差分運算時，得到其第 1 項與第 2 項的數值皆為$(n\,!)\cdot a_n$，現在來證明這個數值，請看下列的解說分析詳細過程，[證明]：

[1]　應用二項式性質，很容易得出恆等式；　$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n=\begin{cases}0 & ，n>0\text{時}\\ 1 & ，n=0\text{時}\end{cases}$

[2]　取排列記號：$P_i^k=\dfrac{k\,!}{(k-i)\,!}$ 意謂自k個不同元素任意取出i個來排列的方法，並推演

出新運算式；　$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n P_i^k=\sum_{k=i=0}^{n}(-1)^k\cdot\dfrac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!}\cdot\dfrac{k\,!}{(k-i)\,!}$

$$=\frac{(-1)^i n\,!}{(n-i)\,!}\cdot\sum_{k-i=0}^{n-i}(-1)^{k-i}\cdot\frac{(n-i)\,!}{[(n-i)-(k-i)]!\cdot(k-i)\,!}=\frac{(-1)^i n\,!}{(n-i)\,!}\cdot\sum_{k-i=0}^{n-i}(-1)^{k-i}\cdot C_{k-i}^{n-i}$$

$$=\begin{cases}0 & ，n-i>0\text{時}\\ \frac{(-1)^i n!}{(n-i)!} & ，n-i=0\text{時}\end{cases}=\begin{cases}0 & ，n>i\text{時}\\ (-1)^n n! & ，n=i\text{時}\end{cases}$$

[3]　對任何x的n次多項式$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i$都可寫成$f(x)=\sum_{i=0}^{n}b_i P_i^x$的形式，其中$b_n=a_n$，可能$b_0=a_0$，例如；　$f(x)=2x^4-13x^3+28x^2-16x+2$　可轉換成

$$f(x)=2+x+3x(x-1)-x(x-1)(x-2)+2x(x-1)(x-2)(x-3)$$

今將x指定變換為k，得　$\sum_{i=0}^{n}a_i k^i=\sum_{i=0}^{n}b_i P_i^k$　，　a_i，$b_i\in R$　，所以

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n[\sum_{i=0}^{n}a_i k^i]=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n[\sum_{i=0}^{n}b_i P_i^k]=\sum_{i=0}^{n}b_i\cdot[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n P_i^k]$$

$$=b_0\cdot 0+b_1\cdot 0+b_2\cdot 0+\cdots+b_{n-2}\cdot 0+b_{n-1}\cdot 0+b_n\cdot(-1)^n\cdot n\,!=b_n\cdot(-1)^n\cdot n\,!$$

$$=a_n\cdot(-1)^n\cdot n\,!$$

[4]　接著，再參考對照n階差分運算列的第 1 項與第 2 項運算式型式，而特意取定；$\sum_{i=0}^{n}a_i k^i=(h-uk)^n=h^n-n\cdot h^{n-1}\cdot uk+\cdots+n\cdot h\cdot(-uk)^{n-1}+(-uk)^n$，$h,u\in R$，則

$a_n=(-u)^n$ ，代入 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\,[\sum_{i=0}^{n} a_i k^i\,] = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\,(h-uk)^n$ 式中，得 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\,[\sum_{i=0}^{n} a_i k^i\,] = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\,(h-uk)^n = (-u)^n\cdot(-1)^n\cdot n\,! = u^n\cdot n\,!$

(a) 現在，令 $h=n+1$ ，$u=1$ 時，得出；$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\,(n+1-k)^n = n\,!$

(b) 繼續再令 $h=n$ ，$u=1$ 時，得出；$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\,(n-k)^n = n\,!$ ，但當計算到 $k=n$ 時，$(n-k)^n=0$ ，則得到；$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_k^n\,(n-k)^n = n\,!$

[5] 綜合上述分析，已完整證明出 n 階差分運算列的第 1 項與第 2 項運算式數值都相等，即 $[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_k^n\cdot(n-k)^n]a_n=[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\cdot(n+1-k)^n]a_n=(n\,!)\cdot a_n$

且 $[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\cdot(n+1-k)^n]a_n=(n\,!)\cdot a_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n f(n+1-k)$ 。

理論上，對任意 n 次數多項式函數作 n 階差分運算後必得到常數值，即在 n 階差分運算這一列必會形成常數數列。所以，在 n 階差分運算列的每一數都必相等。
因此，在計算完成 n 階差分運算時，恰會得到 1 個常數值 $(n\,!)\cdot a_n$ ，繼續再將此常數值除以 $n\,!$，就可得到函數的首項係數值 a_n。事實也是如此。

所以，在新增數據點(0,?)後的新型差分運算列表裡必能預先推論得到其 n 階差分運算的第 1 項數值，接著再以此數值開始作逆向差分運算推演，分別依序逐一逆推出 $n-1$ 階的值、$n-2$ 階的值、$n-3$ 階的值、…、2 階的值、1 階的值、直到算出 $f(0)=a_0$ 的值，而編製成整齊完備的新型差分運算列表。

C. 編製新增數據點 (0,?) 的 $n-1$ 次差分運算實作表

新降 1 次的 $n-1$ 次數多項式為； $p_1=p_1(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-1}$ ，作其差分運算表；

x：	0	1	2	3	4 … n
p_1：	a_1	$\sum_{i=1}^{n} a_i$	$\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot 2^{i-1}$	$\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot 3^{i-1}$	$\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot 4^{i-1}$ …
1 階：	$\sum_{i=2}^{n} a_i$	$\sum_{i=2}^{n}(2^{i-1}-1)a_i$	$\sum_{i=2}^{n}(3^{i-1}-2^{i-1})a_i$	$\sum_{i=2}^{n}(4^{i-1}-3^{i-1})a_i$ …	
2 階：	$\sum_{i=3}^{n} a_i(2^{i-1}-2)$	$\sum_{i=3}^{n} a_i(3^{i-1}-2^i+1)$	$\sum_{i=3}^{n} a_i(4^{i-1}-2\cdot 3^{i-1}+2^{i-1})$ …		
3 階：	$\sum_{i=4}^{n} a_i(3^{i-1}-3\cdot 2^{i-1}+3)$	$\sum_{i=4}^{n} a_i(4^{i-1}-3\cdot 3^{i-1}+3\cdot 2^{i-1}-1)$ …			
4 階：	$\sum_{i=5}^{n} a_i(4^{i-1}-4\cdot 3^{i-1}+6\cdot 2^{i-1}-4)$				

$$\sum_{i=5}^{n} a_i(5^{i-1}-4\cdot 4^{i-1}+6\cdot 3^{i-1}-4\cdot 2^{i-1}+1) \quad \cdots$$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

$n-3$階：
$$\sum_{i=n-2}^{n}\{a_i[\sum_{k=0}^{n-4}(-1)^k C_k^{n-3}\cdot(n-3-k)^{i-1}]\}$$
$$\sum_{i=n-2}^{n}\{a_i[\sum_{k=0}^{n-3}(-1)^k C_k^{n-3}\cdot(n-2-k)^{i-1}]\} \quad \cdots$$

$n-2$階：
$$\sum_{i=n-1}^{n}\{a_i[\sum_{k=0}^{n-3}(-1)^k C_k^{n-2}\cdot(n-2-k)^{i-1}]\}$$
$$\sum_{i=n-1}^{n}\{a_i[\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k C_k^{n-2}\cdot(n-1-k)^{i-1}]\} \quad \cdots$$

$n-1$階：
$$[\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k C_k^{n-1}(n-1-k)^{n-1}]\cdot a_n$$
$$[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_k^{n-1}(n-k)^{n-1}]\cdot a_n \quad \cdots$$

[解說]：詳盡作對比 **B**.節與 **C**.節的兩組完整差分運算表，可觀察出；

[1] **B**.節的 1 階、2 階、…、至 n 階等各階運算列的第 1 項數值須要分別按順序各自除以 1、2、3、4、…、$n-1$、n，除完之後的數值都會整齊一致跨階佈建並依各階順序分別座落在 **C**.節運算表內的 p_1、1 階、2 階、…、至 $n-1$ 階等各階運算列的第 2 項數值位置處，很有規律且又很有秩序的分佈。

[2] **C**.節最後一列 $n-1$ 階運算列出現的第 1 項與第 2 項，其數值也相等。[證明]：

(a) 取 **B**.節內 n 階運算列的第 1 項數值 $[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_k^n(n-k)^n]a_n=(n\,!)\cdot a_n$，今將其除以 n，得 $\frac{1}{n}[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_k^n(n-k)^n]\cdot a_n=\frac{1}{n}[\ n^n-C_1^n(n-1)^n+C_2^n(n-2)^n-C_3^n(n-3)^n+\cdots+(-1)^{n-3}C_{n-3}^n\cdot 3^n+(-1)^{n-2}C_{n-2}^n\cdot 2^n+(-1)^{n-1}C_{n-1}^n\cdot 1^n\ ]\cdot a_n$
$=[\ n^{n-1}-C_1^{n-1}(n-1)^{n-1}+C_2^{n-1}(n-2)^{n-1}-C_3^{n-1}(n-3)^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-3}C_{n-3}^{n-1}\cdot 3^{n-1}+(-1)^{n-2}C_{n-2}^{n-1}\cdot 2^{n-1}+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}\cdot 1^{n-1}\ ]\cdot a_n=[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_k^{n-1}(n-k)^{n-1}]\cdot a_n=(n-1)!a_n$
所以得知，這 $[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_k^{n-1}(n-k)^{n-1}]\cdot a_n=(n-1)!a_n$ 就是 **C**.節最後一列 $n-1$ 階運算列出現的第 2 項數值，這也就完成證明了[1].所述的一般情形。

(b) 同樣地，對任意 $n-1$ 次數多項式函數作 $n-1$ 階差分運算後必得到常數值，即在 $n-1$ 階差分運算這一列必會形成常數數列。所以，在這 $n-1$ 階差分運算列的每一數都必相等。因此，有下列等式關係與數值結果；

$$[\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k C_k^{n-1}(n-1-k)^{n-1}]\cdot a_n=[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_k^{n-1}(n-k)^{n-1}]\cdot a_n=(n-1)!a_n$$

[3] 同理，在新增數據點(0,?)後的新降 1 次的 $n-1$ 次數多項式差分運算列表裡必能預先推論得到其 $n-1$ 階差分運算的第 1 項數值，接著再以此數值開始作逆向差分運算推

演，分別依序再逐一逆推出 $n-2$ 階的值、$n-3$ 階的值、…、2 階的值、1 階的值、直到算出 $p_1 = p_1(0) = a_1$ 的值，而編製成整齊完備的新差分運算列表。

D.　編製新增數據點(0,?)的 $n-2$ 次差分運算實作表

新降 2 次的 $n-2$ 次數多項式為；　$p_2 = p_2(x) = \sum_{i=2}^{n} a_i x^{i-2}$　，作其差分運算表；

x：　0　　1　　2　　3　　4　…　n

p_2：　a_2　　$\sum_{i=2}^{n} a_i$　　$\sum_{i=2}^{n} a_i \cdot 2^{i-2}$　　$\sum_{i=2}^{n} a_i \cdot 3^{i-2}$　　$\sum_{i=2}^{n} a_i \cdot 4^{i-2}$　…

1 階：　$\sum_{i=3}^{n} a_i$　　$\sum_{i=3}^{n} (2^{i-2}-1)a_i$　　$\sum_{i=3}^{n} (3^{i-2}-2^{i-2})a_i$　　$\sum_{i=3}^{n} (4^{i-2}-3^{i-2})a_i$　…

2 階：　$\sum_{i=4}^{n} a_i(2^{i-2}-2)$　　$\sum_{i=4}^{n} a_i(3^{i-2}-2^{i-1}+1)$　　$\sum_{i=4}^{n} a_i(4^{i-2}-2\cdot 3^{i-2}+2^{i-2})$　…

3 階：　$\sum_{i=5}^{n} a_i(3^{i-2}-3\cdot 2^{i-2}+3)$　　$\sum_{i=5}^{n} a_i(4^{i-2}-3\cdot 3^{i-2}+3\cdot 2^{i-2}-1)$　…

4 階：　$\sum_{i=6}^{n} a_i(4^{i-2}-4\cdot 3^{i-2}+6\cdot 2^{i-2}-4)$

$\sum_{i=6}^{n} a_i(5^{i-2}-4\cdot 4^{i-2}+6\cdot 3^{i-2}-4\cdot 2^{i-2}+1)$　…

⋮　　⋮　　⋮

$n-4$ 階：　$\sum_{i=n-2}^{n} \{a_i[\sum_{k=0}^{n-5} (-1)^k C_k^{n-4} \cdot (n-4-k)^{i-2}]\}$

$\sum_{i=n-2}^{n} \{a_i[\sum_{k=0}^{n-4} (-1)^k C_k^{n-4} \cdot (n-3-k)^{i-2}]\}$　…

$n-3$ 階：　$\sum_{i=n-1}^{n} \{a_i[\sum_{k=0}^{n-4} (-1)^k C_k^{n-3} \cdot (n-3-k)^{i-2}]\}$

$\sum_{i=n-1}^{n} \{a_i[\sum_{k=0}^{n-3} (-1)^k C_k^{n-3} \cdot (n-2-k)^{i-2}]\}$　…

$n-2$ 階：　$[\sum_{k=0}^{n-3} (-1)^k C_k^{n-2} \cdot (n-2-k)^{n-2}] \cdot a_n$

$[\sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k C_k^{n-2} \cdot (n-1-k)^{n-2}] \cdot a_n$　…

[解說]：同樣詳盡作對比 **C**.節與 **D**.節的兩組完整差分運算表，可觀察出；

[1]　**C**.節的 1 階、2 階、…、至 $n-1$ 階等各階運算列的第 1 項數值須要分別按順序各自除以 1、2、3、4、…、$n-1$，除完之後的數值都會整齊一致跨階佈建並依各階順序分別座落在 **D**.節運算表內的 p_2、1 階、2 階、…、至 $n-2$ 階等各階運算列的第 2 項數值位置處，很有規律且又很有秩序的分佈。

[2]　**D**.節最後一列 $n-2$ 階運算列出現的第 1 項與第 2 項，其數值也相等。仿效前述 **C**.節[2].的整體分析與證明過程，得出下列等式關係與數值結果；

$$[\sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k C_k^{n-2} \cdot (n-1-k)^{n-2}] \cdot a_n = [\sum_{k=0}^{n-3} (-1)^k C_k^{n-2} \cdot (n-2-k)^{n-2}] \cdot a_n = (n-2)!a_n$$

[3]　同理，在新增數據點(0,?)後的新降 2 次的 $n-2$ 次數多項式差分運算列表裡必能預先推論得到其 $n-2$ 階差分運算的第 1 項數值，接著再以此數值開始作逆向差分運算推演，分別依序再逐一逆推出 $n-3$ 階的值、$n-4$ 階的值、$n-5$ 階的值、…、2 階的值、

1 階的值、直到算出 $p_2 = p_2(0) = a_2$ 的值，而迅速順暢地再編製成整齊完備的新差分運算列表。

E. **持續仿效上述再編製出 $n-3$ 次數多項式、$n-4$ 次數、$n-5$ 次數、…、直到 4 次數多項式函數的 $p_{n-4} = p_{n-4}(x) = \sum_{i=n-4}^{n} a_i x^{i-(n-4)}$，並作出其差分運算表；**

x： 0　1　2　3　4　…　n

p_{n-4}：a_{n-4}　$\sum_{i=n-4}^{n} a_i$　$\sum_{i=n-4}^{n} a_i \cdot 2^{i-n+4}$　$\sum_{i=n-4}^{n} a_i \cdot 3^{i-n+4}$　$\sum_{i=n-4}^{n} a_i \cdot 4^{i-n+4}$　…

1 階：　$\sum_{i=n-3}^{n} a_i$　$\sum_{i=n-3}^{n} (2^{i-n+4}-1)a_i$　$\sum_{i=n-3}^{n} (3^{i-n+4}-2^{i-n+4})a_i$

$\sum_{i=n-3}^{n} (4^{i-n+4}-3^{i-n+4})a_i$　…

2 階：　$\sum_{i=n-2}^{n} a_i(2^{i-n+4}-2)$　$\sum_{i=n-2}^{n} a_i(3^{i-n+4}-2^{i-n+5}+1)$

$\sum_{i=n-2}^{n} a_i(4^{i-n+4}-2\cdot 3^{i-n+4}+2^{i-n+4})$　…

3 階：　$\sum_{i=n-1}^{n} a_i(3^{i-n+4}-3\cdot 2^{i-n+4}+3)$　$\sum_{i=n-1}^{n} a_i(4^{i-n+4}-3\cdot 3^{i-n+4}+3\cdot 2^{i-n+4}-1)$　…

4 階：　$(4!)\cdot a_n$　$(4!)\cdot a_n$　$(4!)\cdot a_n$　…

[解說]：同理，這 4 次數差分運算表內自 p_{n-4}、1 階、2 階、…、至 4 階等各階運算列的第 2 項數值都是從 5 次數差分運算表內對應項跨階佈建而來。也清楚地見到其 4 階運算列呈現常數數列，再以此數值開始作逆向差分運算推演，分別依順序再逐一逆推出 3 階的值、2 階的值、1 階的值、直到算出 $p_{n-4} = p_{n-4}(0) = a_{n-4}$ 的值，而迅速直覺地再編製成整齊完備的新差分運算列表。

F. 編製新增數據點(0,?)的 3 次數差分運算實作表

降 $n-3$ 次的 3 次數多項函數 $p_{n-3} = p_{n-3}(x) = \sum_{i=n-3}^{n} a_i x^{i-(n-3)}$，作出差分運算表；

x： 0　1　2　3　4　…　n

p_{n-3}：a_{n-3}　$\sum_{i=n-3}^{n} a_i$　$\sum_{i=n-3}^{n} a_i \cdot 2^{i-n+3}$　$\sum_{i=n-3}^{n} a_i \cdot 3^{i-n+3}$　$\sum_{i=n-3}^{n} a_i \cdot 4^{i-n+3}$　…

1 階：　$\sum_{i=n-2}^{n} a_i$　$\sum_{i=n-2}^{n} (2^{i-n+3}-1)a_i$　$\sum_{i=n-2}^{n} (3^{i-n+3}-2^{i-n+3})a_i$

$\sum_{i=n-2}^{n} (4^{i-n+3}-3^{i-n+3})a_i$　…

2 階：　$\sum_{i=n-1}^{n} a_i(2^{i-n+3}-2)$　$\sum_{i=n-1}^{n} a_i(3^{i-n+3}-2^{i-n+4}+1)$

$\sum_{i=n-1}^{n} a_i(4^{i-n+3}-2\cdot 3^{i-n+3}+2^{i-n+3})$　…

3 階：　$(3!)\cdot a_n$　$(3!)\cdot a_n$　$(3!)\cdot a_n$　…

[解說]：同樣詳盡作對比 **E.**節與 **F.**節的兩組完整差分運算表，可觀察出；

[1] **E.**節的 1 階、2 階、⋯、至 4 階等各階運算列的第 1 項數值須要分別按順序各自除以 1、2、3、4，除完之後的數值都會整齊一致跨階佈建並依各階順序分別座落在 **F.**節運算表內的 p_{n-3}、1 階、2 階、至 3 階等各階運算列的第 2 項數值位置處，很有規律且又很有秩序的分佈。

[2] 清楚地見到其 3 階運算列呈現常數數列，再以此數值開始作逆向差分運算推演，分別依順序再逐一逆推出 2 階的值、1 階的值、直到算出 $p_{n-3} = p_{n-3}(0) = a_{n-3}$ 的值，而迅速果斷地再編製成整齊完備的新差分運算列表。

G. 編製新增數據點 (0,?) 的 2 次數差分運算實作表

降 $n-2$ 次的 2 次數多項函數 $p_{n-2} = p_{n-2}(x) = \sum_{i=n-2}^{n} a_i x^{i-(n-2)}$，作出差分運算表；

x： 0　1　2　3　4　⋯　n

p_{n-2}： a_{n-2}　$\sum_{i=n-2}^{n} a_i$　$\sum_{i=n-2}^{n} a_i \cdot 2^{i-n+2}$　$\sum_{i=n-2}^{n} a_i \cdot 3^{i-n+2}$　$\sum_{i=n-2}^{n} a_i \cdot 4^{i-n+2}$　⋯

1 階： $\sum_{i=n-1}^{n} a_i$　$\sum_{i=n-1}^{n} (2^{i-n+2}-1) a_i$　$\sum_{i=n-1}^{n} (3^{i-n+2}-2^{i-n+2}) a_i$　$\sum_{i=n-1}^{n} (4^{i-n+2}-3^{i-n+2}) a_i$　⋯

2 階： $(2!) \cdot a_n$　$(2!) \cdot a_n$　$(2!) \cdot a_n$　⋯

[解說]：仿效前述 **D.**節敘述內容（略）。此處，可計算出 $p_{n-2} = p_{n-2}(0) = a_{n-2}$ 的值。

H. 編製新增數據點 (0,?) 的 1 次數差分運算實作表

降 $n-1$ 次的 1 次數多項函數 $p_{n-1} = p_{n-1}(x) = \sum_{i=n-1}^{n} a_i x^{i-(n-1)}$，作出差分運算表；

x： 0　1　2　3　4　⋯　n

p_{n-1}： a_{n-1}　$\sum_{i=n-1}^{n} a_i$　$\sum_{i=n-1}^{n} a_i \cdot 2^{i-n+1}$　$\sum_{i=n-1}^{n} a_i \cdot 3^{i-n+1}$　$\sum_{i=n-1}^{n} a_i \cdot 4^{i-n+1}$　⋯

1 階： a_n　a_n　a_n　a_n　⋯

[解說]：仿效前述 **D.**節敘述內容（略）。此處，差分運算表的 1 階運算直接就得到首項係數 a_n 的值，再繼續逆推計算出 $p_{n-1} = p_{n-1}(0) = a_{n-1}$ 的值。

I. 綜合上述的完整分析證明知：

從各 i 次數差分運算表的 $p_{n-i}(0) = p_{n-i}(0) = a_{n-i}$ 值，$i = 0, 1, 2, 3, \cdots, n$。即可直接得出此數列多項式函數的所有各次數項正確係數，而且精準無比。特別提醒的是；在編製各次數差分運算列表時，須謹記：自完成的 i 次數差分運算列表中其 1 階、2 階、3 階、⋯、$i-1$ 階、至 i 階等各階運算列的第 1 項數值須要分別按順序各自除以 1、2、3、4、⋯、$i-1$、至 i，除完之後的新數值再依各階順序分別填入 $i-1$ 次數差分運算表內的 $p_{n-(i-1)}$、1 階、2 階、3 階、⋯、$i-2$、

至 $i-1$ 階等各階運算列的第 2 項數值位置處。遵守這操作步驟始能完美編製出各次數差分運算表。

J. 範例

[範例 1]：首先來觀摩如何應用數列差分運算列表法直接取到多項式函數的操作過程；假定在平面坐標上已知有數據點依序排列為：(1, 1) , (2, 6) , (3, 17) , (4, 40) , (5,441) ,等 5 個點，試想要找出一個 4 次數多項式函數 $f(x)$ 的曲線通過這些點，方法如下； [1A]. 一開始先依序編列出這 5 個坐標點的橫式差分運算表；

方法如下；

[1A] 一開始先依序編列出這 5 個坐標點的橫式差分運算表；

x ：	1		2		3		4		5	
$f(x)$ ：	1		6		17		40		441	
Δf ：		5		11		23		401		
$\Delta^2 f$ ：			6		12		378			
$\Delta^3 f$ ：				6		366				
$\Delta^4 f$ ：					360					

[1B] 新增一個數據點(0,?)，位置就落在 x 列的最左邊前緣，形成下一表列；

x ：	0		1		2		3		4		5
$f(x)$ ：	?		1		6		17		40		441
Δf ：		?		5		11		23		401	
$\Delta^2 f$ ：			?		6		12		378		
$\Delta^3 f$ ：				?		6		366			
$\Delta^4 f$ ：					?		360				

因為新增數據點後仍然必要維持原來的多項式函數不變，且最後的 4 階運算列必為常數數列，故將數字 360 填加於此新增的 0 數據點的最末一列，形成新表列；

x ：	0		1		2		3		4		5
$f(x)$ ：	?		1		6		17		40		441
Δf ：		?		5		11		23		401	
$\Delta^2 f$ ：			?		6		12		378		
$\Delta^3 f$ ：				?		6		366			
$\Delta^4 f$ ：					360		360				

現在遵循差分運算法對新表由下而上按順序作逆差分運算，計算出表列中 ?位置的各數，並填滿新表而形成橫式新差分運算表，逐步運算填表流程如下；

x： 0 1 2 3 4 5

$f(x)$： ? 1 6 17 40 441

Δf： ? 5 11 23 401

$\Delta^2 f$： ? 6 12 378

$\Delta^3 f$： -354 6 366

$\Delta^4 f$： 360 360

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$

x： 0 1 2 3 4 5

$f(x)$： 356 1 6 17 40 441

Δf： -355 5 11 23 401

$\Delta^2 f$： 360 6 12 378

$\Delta^3 f$： -354 6 366

$\Delta^4 f$： 360 360

完成了有 (0,356)數據點的新差分運算表，並得出函數常數項值為 356。

[1C] 接著要作出降 1 次數函數 $f_1(x)$的差分運算表；自上列新表內的 1 階、2 階、3 階、4 階等取出各列的第 1 項數字為 -355、360、-354、360，對此 4 個數分別除以 1、2、3、4 而得到 -355、180、-118、90，再將此新獲得的 4 個數依序排列在降 1 次數函數 $p_1(x)$的差分運算表(局部表)內，詳情如下表列；

x： 0 1 2 3 4

$p_1(x)$： ? -355

Δp_1： ? 180

$\Delta^2 p_1$： ? -118

$\Delta^3 p_1$： ? 90

要維持原來的多項式函數不變，就必須將降 1 次數的差分運算表內最末一列的數字 90 填加於此新增的 0 數據點的最末一列，形成新表格如下；

x： 0 1 2 3 4

$p_1(x)$： ? -355

Δp_1： ? 180

$\Delta^2 p_1$： ? -118

$\Delta^3 p_1$：　90　90

再由下而上按順序作逆向差分運算，計算出表列中 ?位置的各數，得下表；

x：	0		1		2		3		4
$p_1(x)$：	−743		−355						
Δp_1：		388		180					
$\Delta^2 p_1$：			−208		−118				
$\Delta^3 p_1$：				90		90			

在此降 1 次數表列中，完成了 1 次數項的係數 −743 。

[1D] 接著要再作出降 2 次數函數 $p_2(x)$ 的差分運算表；自上列降 1 次數表內的 1 階、2 階、3 階等取出各列的第 1 項數字為 388、−208、90，對此 3 個數分別除以 1、2、3 而得到 388、−104、30，再將此新獲得的 3 個數依序排列在降 2 次數函數 $p_2(x)$ 的差分運算表(局部表)內，流程詳情如下表列；

x：	0		1		2		3		4
$p_2(x)$：	?		388						
Δp_2：		?		−104					
$\Delta^2 p_2$：			30		30				

$\Downarrow$　　　$\Downarrow$　　　$\Downarrow$

x：	0		1		2		3		4
$p_2(x)$：	522		388						
Δp_2：		−134		−104					
$\Delta^2 p_2$：			30		30				

在此降 2 次數表列中，完成了 2 次數項的係數 522 。

[1E] 持續著要再作出降 3 次數函數 $p_3(x)$ 的差分運算表；自上列降 2 次數表內的 1 階、2 階等取出各列的第 1 項數字為 −134、30，對此 2 個數分別除以 1、2 而得到 −134、15，再將此新獲得的 2 個數依序排列在降 3 次數函數 $p_3(x)$ 的差分運算表(局部表)內，流程詳情如下表列；

x：	0		1		2		3		4
$p_3(x)$：	?		−134						
Δp_3：		15		15					

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$

x：	0	1	2	3	4
$p_3(x)$：	-149	-134			
Δp_3：		15	15		

在此降 3 次數表列中，最後完成了 3 次數項的係數 -149 ，同時也得到 4 次數項即首項的係數 15 。完全用簡單的除、減法列表運算就找到了多項式函數。

綜合上述的差分運算列表法操作流程直接取到滿足這數列 5 坐標點的 4 次數多項式函數曲線 $f(x)$ 為 $f(x)=15x^4-149x^3+522x^2-743x+356$ 。

[1F] 再應用牛頓差值法計算也會得出相同的多項式函數，檢驗詳情試看下列過程；一開始仍然先依順序編列出這 5 個坐標點的橫式差分運算表；

x：	1	2	3	4	5
$f(x)$：	1	6	17	40	441
Δf：	5	11	23	401	
$\Delta^2 f$：	6	12	378		
$\Delta^3 f$：	6	366			
$\Delta^4 f$：	360				

應用牛頓差值法公式： $f(x) = f(1)+ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,!}\left(\Delta^k f(1)\right)g_k(x)$ (L1)

其中 $g_k(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-k)$ 為 k 次多項式函數。現在取用運算表列數字，得； $f(x) = 1 + 5(x-1) + \frac{6}{2\,!}(x-1)(x-2) + \frac{6}{3\,!}(x-1)(x-2)(x-3) + \frac{360}{4\,!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 1 + (5x-5) + (3x^2-9x+6) + (x^3-6x^2+11x-6) + 15(x^4-10x^3+35x^2-50x+24)$ $\Rightarrow$ 再經過運算整理，化簡、組合成下式；

$f(x)= 15x^4-149x^3+522x^2-743x+356$ ，得出完全相等的結果。

此範例目的是提供詳盡的細部分解說明，看起來很長，其實是迅捷的，見下例；

[範例 2]：已知有數據點依序排列為：(1, 1) , (2, 3) , (3, 7) , (4, 37) , (5,165) , (6,751)等 6 個點，試想要找出一個 5 次數多項式函數 $f(x)$ 的曲線通過這些點，如下；

[2A] 先依序編列出這 6 個坐標點的橫式差分運算表並新增一個數據點(0,?)；

x：	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$：	?	1	3	7	37	165	751
Δf：	?	2	4	30	128	586	
$\Delta^2 f$：	?	2	26	98	458		
$\Delta^3 f$：	?	24	72	360			
$\Delta^4 f$：	?	48	288				
$\Delta^5 f$：	?*=240	240					

[2B] 完成新增一個數據點(0,?)並作逆向差分運算，得下一新型表列；

x：	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$：	-215	1	3	7	37	165	751
Δf：	216	2	4	30	128	586	
$\Delta^2 f$：	-214	2	26	98	458		
$\Delta^3 f$：	216	24	72	360			
$\Delta^4 f$：	-196	48	288				
$\Delta^5 f$：	240	240					

完成了有 $(0,-215)$數據點的新差分運算表，並得出函數常數項值為-215。

[2C] 接著要作出降 1 次數函數 $p_1(x)$的差分運算表；自上列新表內的 1 階、2 階、3 階、4 階、5 階等取出各列的第 1 項數字為 216、-214、216、-192、240，對此 5 個數分別除以 1、2、3、4、5 而得到 216、-107、72、-48、48，再將此新獲得的 5 個數依序跨階排列在降 1 次數函數 $p_1(x)$的差分運算表(局部表)內的 $p_1(x)$、Δp_1、$\Delta^2 p_1$、$\Delta^3 p_1$、$\Delta^4 p_1$等各列的第 2 項位置，再運算完成如下表列；

x：	0	1	2	3	4	5
$p_1(x)$：	491	216				
Δp_1：	-275	-107				
$\Delta^2 p_1$：	168	72				
$\Delta^3 p_1$：	-96	-48				
$\Delta^4 p_1$：	48	48				

在此降 1 次數表列中，完成了 1 次數項的係數 491 。

[2D] 仿效降 1 次數的過程，再作出降 2 次數函數 $p_2(x)$ 的差分運算表(局部表)；

x：　0　1　2　3　4

$p_2(x)$：　-403　-275

Δp_2：　128　84

$\Delta^2 p_2$：　-44　-32

$\Delta^3 p_2$：　12　12

在此降 2 次數表列中，完成了 2 次數項的係數　-403　。

[2E] 仿效降 2 次數的過程，再作出降 3 次數函數 $p_3(x)$的差分運算表(局部表)；

x：　0　1　2　3　4

$p_3(x)$：　154　128

Δp_3：　-26　-22

$\Delta^2 p_3$：　4　4

在此降 3 次數表列中，完成了 3 次數項的係數 154　。

[2F] 仿效降 3 次數的過程，再作出降 4 次數函數 $p_4(x)$ 的差分運算表(局部表)；

x：　0　1　2　3　4

$p_4(x)$：　-28　-26

p_4：　2　2

在此降 4 次數表列中，最後完成了 4 次數項的係數 -28 ，同時也得到 5 次數項即首項的係數 2　。完全用簡單的加法列表運算就找到了多項式函數。

綜合上述的差分運算列表法操作流程直接取到滿足這數列 6 坐標點的 5 次數多項式函數曲線 $f(x)$ 為　$f(x)=2x^5-28x^4+154x^3-403x^2+491x-215$ 。

[2G] 再應用牛頓差值法計算也會得出相同的多項式函數，檢驗詳情試看下列過程；一開始仍然先依順序編列出這 6 個坐標點的橫式差分運算表；

x：　1　2　3　4　5　6

$f(x)$：　1　3　7　37　165　751

Δf：　2　4　30　128　586

$\Delta^2 f$ ：			2		26		98		458		
$\Delta^3 f$ ：				24		72		360			
$\Delta^4 f$ ：					48		288				
$\Delta^5 f$ ：						240					

應用牛頓差值法公式： $f(x) = f(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\ !}\left(\Delta^k f(1)\right) g_k(x)$ (L1)

其中 $g_k(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-k)$ 為 k 次多項式函數。現在取用運算表列數字，得 ； $f(x) = 1 + 2\ (x-1) + \frac{2}{2\ !}(x-1)(x-2) + \frac{24}{3\ !}(x-1)(x-2)(x-3) + \frac{48}{4\ !}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{240}{5\ !}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 1 + (2x-2) + (x^2-3x+2) + (4x^3-24x^2+44x-24) + 2\ (x^4-10x^3+35x^2-50x+24) + (2x^5-30x^4-10x^3+35x^2-50x+24)$ $\Rightarrow$ 再經過運算整理，化簡、組合成下式；$f(x) = 2x^5-28x^4+154x^3-403x^2+491x-215$ ，得出完全相等的結果。

[範例 3]： 已知有數據點依序排列為：(0,-4) , (1, 1) , (2, 6) , (3, 17) , (4, 40) , (5,441)等 6 個點，試想要找出一個 5 次數多項式函數 $f(x)$ 的曲線通過這些點，這裡直接出現了第 1 個數據點(0,-4)，有已知的(0,?)是最好的條件，直接操作如下；

[3A] 先依序編列出這 6 個坐標點的橫式差分運算表；

x ：	0		1		2		3		4		5
$f(x)$ ：	-4		1		6		17		40		441
Δf ：		5		5		11		23		401	
$\Delta^2 f$ ：			0		6		12		378		
$\Delta^3 f$ ：				6		6		366			
$\Delta^4 f$ ：					0		360				
$\Delta^5 f$ ：						360					

[3B] 接著要作出降 1 次數函數 $p_1(x)$ 的差分運算表；

x ：	0		1		2		3		4		5
$p_1(x)$ ：	79		5								
Δp_1 ：		-74		0							
$\Delta^2 p_1$ ：			74		2						

$\Delta^3 p_1$ ：　-72　0

$\Delta^4 p_1$ ：　72　72

[3C] 仿效降 1 次數的過程，再作出降 2 次數函數 $p_2(x)$ 的差分運算表(局部表)；

x ：　0　1　2　3　4

$p_2(x)$ ：　-153　-74

Δp_2 ：　79　37

$\Delta^2 p_2$ ：　-42　-24

$\Delta^3 p_2$ ：　18　18

[3D] 仿效降 2 次數的過程，再作出降 3 次數函數 $p_3(x)$ 的差分運算表(局部表)；

x ：　0　1　2　3　4

$p_3(x)$ ：　106　79

Δp_3 ：　-27　-21

$\Delta^2 p_3$ ：　6　6

[3E] 仿效降 3 次數的過程，再作出降 4 次數函數 $p_4(x)$ 的差分運算表(局部表)；

x ：　0　1　2　3　4

$p_4(x)$ ：　-30　-27

Δp_4 ：　3　3

綜合上述的差分運算列表法操作流程直接取到滿足這數列 6 坐標點的 5 次數多項式函數曲線 $f(x)$ 為　$f(x) = 3x^5 - 30x^4 + 106x^3 - 153x^2 + 79x - 4$　。

以上整體論證與操作敘述皆顯示出;所有的各次數函數運算列表只需在逆向差分運算中作簡單的減、除法計算即能完成任務，真是太輕易、實際又便捷！

參、結論

[1] 若已知有數據點依序排列為：(4, 40) , (5,441) , (6, 1946) , (7, 5641) , (8, 12972)等 5 個點，試想要找出一個 4 次數多項式函數 $f(x)$ 的曲線通過這些點，方法是：

(a) 遠離數據點(0,?)就另採他法，直接先編列出其原型差分運算表，表格如下；

x ：　4　5　6　7　8

$f(x)$： 40 441 1946 5641 12972

Δf： 401 1505 3695 7331

$\Delta^2 f$： 1104 2190 3636

$\Delta^3 f$： 1086 1446

$\Delta^4 f$： 360

原型的 x 值是 4、5、6、7、8，現在，直接就將它們看成是 v 的 0、1、2、3、4，

得新列表； v： 0 1 2 3 4

$g(v)$： 40 441 1946 5641 12972

Δg： 401 1505 3695 7331

$\Delta^2 g$： 1104 2190 3636

$\Delta^3 g$： 1086 1446

$\Delta^4 g$： 360

(b) 作出降 1 次數函數 $d_1(v)$ 的差分運算表(局部表)；

v： 0 1 2 3

$d_1(v)$： 121 401

Δd_1： 280 552

$\Delta^2 d_1$： 272 362

$\Delta^3 d_1$： 90 90

(c) 作出降 2 次數函數 $d_2(v)$ 的差分運算表(局部表)；

v： 0 1 2 3 4

$d_2(v)$： 174 280

Δd_2： 106 136

$\Delta^2 d_2$： 30 30

(d) 作出降 3 次數函數 $d_3(v)$ 的差分運算表(局部表)；

v： 0 1 2 3 4

$d_3(v)$： 91 106

Δd_3： 15 15

完成所有差分運算表，得出下列新多項式函數為 $g(v)$；

$g(v) = 15v^4 + 91v^3 + 174v^2 + 121v + 40$ ，$g(v)$ 為向左平移 4 單位的新函數。

新函數可能是平行向左移或向右移若干單位，再將其還原即可。

(e)　將 $g(v)$ 還原成 $g(v+4)$ 的原函數，應用連續綜合除法，得到下列轉換函數；

$$g(v)=g(v+4)=15\,(v+4)^4-149\,(v+4)^3+522\,(v+4)^2-743\,(v+4)+356$$

再將 $v+4$ 轉換成 x，即得到滿足原來 5 個數據點的原多項式函數 $f(x)$；

$$f(x)=15\,x^4-149\,x^3+522\,x^2-743\,x+356$$

這個原多項式函數就是在本文中的範例 1 所演示的函數。

[2]　在 **B**.節的新增數據點(0,?)後的新型差分運算列表裡，其最末的 n 階運算列中的各數值均為相等的常數。基於此，可以找到一個新的組合恆等式，如下；

$$[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\cdot(n+1-k)^n]a_n-[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_k^n\cdot(n-k)^n]a_n=0\quad\Rightarrow$$

$$[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\cdot(n+1-k)^n]-[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_k^n(n-k)^n]=0\quad\Rightarrow$$

$$[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\cdot(n+1-k)^n]-[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_k^n(n-k)^n]=[C_0^n\cdot(n+1)^n-C_1^n\cdot(n)^n+$$
$$C_2^n\cdot(n-1)^n-C_3^n\cdot(n-2)^n+\cdots+(-1)^{n-2}C_{n-2}^n\cdot 3^n+(-1)^{n-1}C_{n-1}^n\cdot 2^n+(-1)^n C_n^n\cdot 1^n]-$$
$$[C_0^n\cdot(n)^n-C_1^n\cdot(n-1)^n+C_2^n\cdot(n-2)^n-C_3^n\cdot(n-3)^n+\cdots+(-1)^{n-3}C_{n-3}^n\cdot 3^n+$$
$$(-1)^{n-2}C_{n-2}^n\cdot 2^n+(-1)^{n-1}C_{n-1}^n\cdot 1^n]=C_0^n\cdot(n+1)^n-C_1^{n+1}\cdot(n)^n+C_2^{n+1}\cdot(n-1)^n-$$
$$C_3^{n+1}\cdot(n-2)^n+\cdots+(-1)^{n-2}C_{n-2}^{n+1}\cdot 3^n+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n+1}\cdot 2^n+(-1)^n C_n^{n+1}\cdot 1^n$$
$$=C_0^{n+1}\cdot(n+1)^n-C_1^{n+1}\cdot(n)^n+C_2^{n+1}\cdot(n-1)^n-C_3^{n+1}\cdot(n-2)^n+\cdots+(-1)^{n-2}C_{n-2}^{n+1}\cdot 3^n+$$
$$(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n+1}\cdot 2^n+(-1)^n C_n^{n+1}\cdot 1^n=0\quad\Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^{n+1}\cdot(n+1-k)^n=0\qquad(1)$$

上述是應用組合恆等式 $C_k^n+C_{k+1}^n=C_{k+1}^{n+1}$ 的性質而得出這個恆等式(1)。

[3]　整篇主題的實際操作法是；直接編列出各次數差分運算表格，而不須要透過牛頓或拉格朗日差值法，更無須要記憶其公式來展開多項式函數的代數式運算，即可逕自取到此多項式函數的各項係數數值，以致成功組合出正確適配的多項式函數。理論上的推演雖然深長，實際上卻容易計算操作，因為在作出降 1 次數函數 $f_1(x)$ 的差分運算表內僅需編列局部表格，及之後所有降各次數的列表也都是以局部運算表來完成各對應

次數項的係數。全套演算流程應用起來也更方便俐落、直覺適切，對於尋求多項式函數的路途特為開闢另一類簡易迅捷的實作計算法。

[4] 若已知有數據點依序排列為：(-4, -12) , (-2,-3) , (1, 8) , (5, 21) , (8, 67)等 5 個點，試想要找出一個 4 次數多項式函數 $f(x)$ 的曲線通過這些點，因這些數據點不是等單位間距點，無法應用本模式來求解，須要另以均差(divided differences)運算法來處理。本文為自我發想作品，為尋求直觀、簡潔、容易運算而精緻研發出的多項式函數列表操作法，謹於此特藉由創作的心得、收穫與先進同好們分享。

參考文獻

蔡聰明(2016 年 3 月出版發行)：**多項函數的插值公式**。數學傳播季刊 157 期（第 40 卷 1 期)。

陳建燁(2017)：**牛頓插值多項式的係數**。高中數學學科中心電子報，第 120 期。臺北市立第一女子高級中學數學教師。

蔡聰明(2010)：**數學拾貝----星空燦爛的數學**。三民書局。

黃武雄(1980)：**中西數學簡史**。人間文化事業公司。

世部貞市郎(1988)：**幾何學辭典**。九章出版社。

林聰源(1995)：**數學史----古典篇**。凡異出版社。

項武義(2011)：**基礎幾何學**。五南圖書出版公司。

項武義(2013)：**基礎分析學**。五南圖書出版公司。

L. Brutman (1997), Lebesgue functions for polynomial interpolation — a survey, *Ann. Numer. Math.* **4**, 111–127.

M. Schatzman (2002). *Numerical Analysis: A Mathematical Introduction*, Chapter 4. Clarendon Press, Oxford. ISBN 0-19-850279-6.

E. Süli and D. Mayers (2003*). An Introduction to Numerical Analysis*, Chapter 6. Cambridge University Press. ISBN 0-521-00794-1.