平面上橢圓分割區域數公式

許閎揚

彰化縣立彰化藝術高級中學

壹、前言

在高中數學的數列級數單元[2]或在數學系的離散數學課程中，學生大概都會碰到這個極有趣的組合問題：給定平面上相異 n 個圓，最多能將平面分割成幾個區域？ 除了圓之外，橢圓也是高中會學到的幾何物件，所以很自然地，我們會問以下的問題：給定平面上 n 個相異橢圓，最多能將平面分割成幾個區域？ 我們將利用遞迴關係與歐拉公式來求解。

貳、用遞迴關係求解橢圓分割區域數

以下的討論我們假定任兩個橢圓有 4 個交點，任 3 個橢圓沒有共同交點。

我們先以一個例子，說明解題的思路。

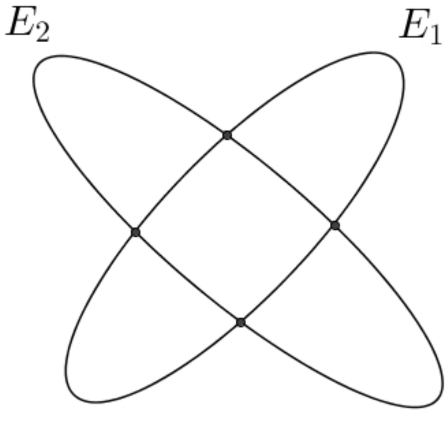

圖 1

當平面上有 E_1, E_2 兩個橢圓時，它們有 4 個交點，將平面分割成 6 個區域，如圖 1。

當放入橢圓 E_3 時，因為 E_3 與 E_1, E_2 各有 4 個交點，所以 E_3 上有 8 個交點，這 8 個交點將 E_3 分成 8 段，因為每一段將它所屬區域分割成 2 個區域，故橢圓 E_3 放入後比放入前增加 8 個區域，得區域數為 14，如下圖 2。

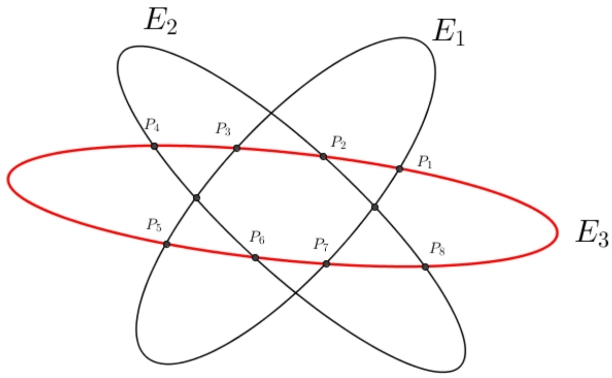

圖 2

對於一般的情形，我們有以下的定理 1。

定理 1：設平面上有 n 個相異橢圓，其中任兩個橢圓有 4 個交點，任 3 個橢圓沒有共同交點，將平面分割的區域數為 $2n^2-2n+2,\ n\geq 1$。

證明：設 a_n 為平面上 n 個相異橢圓(其中任兩個橢圓有 4 個交點，任 3 個橢圓沒有共同交點)，將平面分割的區域數。

當 $n=1$ 時，平面分成 2 個區域，即 $a_1=2$，定理成立。

以下討論當 $n\geq 2$ 時：

設平面上已有 $n-1$ 個橢圓 $E_1,E_2,\cdots,E_{n-1}$，當平面上第 n 個橢圓 E_n 放入時，與前 $n-1$ 個橢圓 $E_1,E_2,\cdots,E_{n-1}$ 各有 4 個交點，故橢圓 E_n 上有 $4(n-1)$ 個交點，這些交點將橢圓 E_n 分成 $4(n-1)$ 段，每一段將所屬區域分成 2 個區域，因此增加的區域數為 $4(n-1)$，得

$$a_n=a_{n-1}+4(n-1),\ n\geq 2\ ,$$

所以

$$a_2=a_1+4\ ，$$
$$a_3=a_2+8\ ，$$
$$a_4=a_3+12\ ，$$
$$\vdots$$
$$a_n=a_{n-1}+4(n-1)\ 。$$

將上面各等式全部加起來，等號兩邊對消後可得

$$a_n=a_1+\left[4+8+\cdots+4\left(n-1\right)\right]$$

$$a_n = 2n^2 - 2n + a_1,\ n \ge 2，$$

因 $a_1 = 2$，得

$$a_n = 2n^2 - 2n + 2,\ n \ge 2，$$

又
$$a_1 = 2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 2$$

得

$$a_n = 2n^2 - 2n + 2,\ n \ge 1，$$

得證。

參、圖論介紹

底下提到的圖是圖論理的簡單圖，簡單圖就是一個有序對 $G = (V, E)$，其中 V 是非空有限集合，它的元素稱為點，E 是一些 V 的相異二元無序對的集合，即 $E \subseteq \{e:\ \mathrm{e} \subseteq V, |e| = 2\}$，其元素稱為該圖的邊[1]。

為了方便起見，我們常將邊 $\{a, b\}$ 寫成 ab 或 ba。舉例來說 下圖 3 $G = (V, E)$：

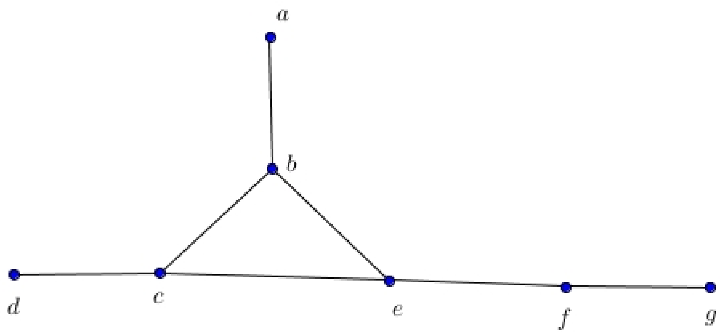

圖 3

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g\}\ ,\ E = \{ab, bc, be, cd, ce, ef, fg\}$$

圖中的兩個頂點 a, b，若存在交替的頂點和邊序列

$$\Gamma = (a = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \cdots, e_n, v_n = b)，$$

其中 $v_0, v_1, \cdots, v_n$ 為頂點，$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 為邊，則稱 a, b 兩頂點是連通的。如果一個圖中任兩頂點皆連通，則稱此圖為連通圖。由邊與頂點所組成的一個圖，若在平面上畫出來使得沒有邊相交，則稱為平面圖。圖中與頂點 v 相連接的邊數稱為頂點的度數，記為 $d(v)$，例如圖三中 $d(a) = 1,\ d(b) = 3$。以下這個定理是圖論中極為基本的一個定理。

定理 2([3])：設圖 $G = (V, E)$，則 $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$。

證明：$\sum_{v\in V} d(v)$ 為圖 G 中各頂點度數的總和。另一方面，每一個邊對圖 G 的貢獻度數為 2，因為圖 G 有 $|E|$ 個邊，故 $\sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$，得證。

在了解了圖論一些基本概念後，下面的這個定理(歐拉公式)是計算平面區域數的常用工具，它的敘述如下:

定理 3([3])：若一個連通平面圖 G 有 v 個頂點，e 個邊，並將平面分割成 r 個區域，則 $v-e+r=2$。

例如下圖 4 為一連通平面圖，頂點數 v=8，邊數 e=9，區域數(含無限大區域) $r=3$，所以 $v-e+r=2$ 。

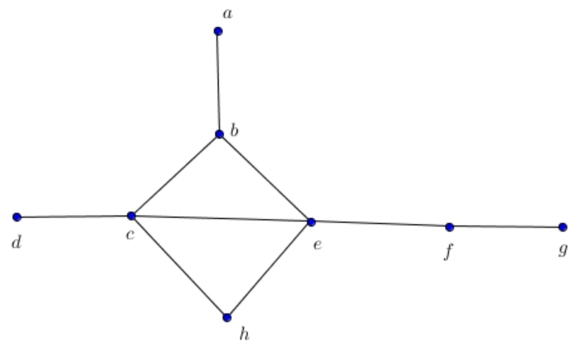

圖 4

肆、用歐拉公式求解橢圓分割區域數

我們先用下圖 5 來說明如何用歐拉公式求解。

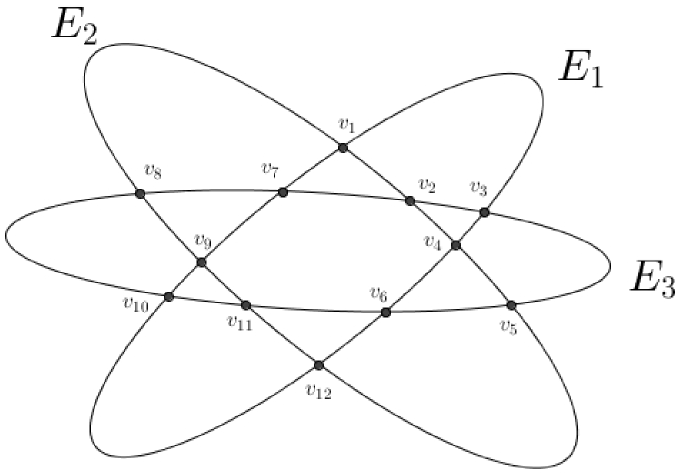

圖 5

很顯然地，上圖為一連通平面圖，我們先計算它的頂點數與邊數：頂點數 (v): 任兩個橢圓有 4 個交點，任 3 個橢圓沒有共同交點，所以有

$$4C_2^3 = 12 \text{ 個頂點。}$$

邊數 (e):因為任 3 個橢圓沒有共同交點，且每個頂點分屬兩個橢圓，所以每個頂點的度數為 4，由定理 2 得 $2e = 4v = 4\times 12 = 48$ ，得 $e = 24$ 。

由歐拉公式可知，此圖形的區域數 $r = 2+e-v = 2+24-12 = 14$ 。

現在我們用歐拉公式重新證明定理 1。

證明：

設平面上有相異 n 個橢圓($n \geq 2$)，因為每一頂點皆在某個橢圓上，且任兩個橢圓相交，故所成的圖為一個連通平面圖。

接著我們計算圖的頂點數與邊數：

頂點數 (v):任兩個橢圓有 4 個交點，且任 3 個橢圓沒有共同交點，所以有 $4C_2^n$ 個頂點。

邊數 (e):因為任 3 個橢圓沒有共同交點，且每個頂點分屬兩個橢圓，所以每個頂點的度數為 4，由定理 2 得 $2e = 4v = 4\times 4C_2^n$ ，得 $e = 8C_2^n$ 。

由歐拉公式可知，此圖形的區域

$$r = 2+e-v = 2+8C_2^n - 4C_2^n = 2n^2-2n+2,\ n \geq 2 \text{ 。}$$

伍、結語

排列組合是數學中最有趣的單元之一，問題簡單易懂，但解答過程往往是千頭萬緒。本文是介紹解決平面分割區域數問題常用的兩個方法,其中建立遞迴關係是高中學習排列組合課程的基本素養,歐拉公式是大學離散數學課程的基本內容,對於想更深入了解圖論的讀者可以參考圖論的書籍[3]，相信會有不少收穫。

參考資料

張鎮華。**演算法觀點的圖論**。台北市: 國立台灣大學出版中心。2017。

許志農等, (99 課綱)。**龍騰版普通高級中學數學第二冊**。

BONDY J.A. and MURTY U.S.R, *Graph Theory with Application*, American Elseiver New York, 1976.

.