Padovan-Fibonacci「順向內積」恆等式

陳建燁

臺北市立第一女子高級中學

壹、前言

在參考資料[1]中，在 Padovan 數列與 Fibonacci 數列之間，建立了一個「P-F 卷積恆等式」：$\sum_{i=0}^{n} F_i \cdot P_{n-i} = F_{n+3} - P_{n+3}$，在此式中，兩數列的下標一增一減所成的「卷積」，可以視為一種「逆向內積」。

相對地，可將 $\sum_{i=0}^{n} P_i \cdot F_i$ 稱為「順向內積」，就筆者認知，目前文獻上尚無相關的結果。在本篇文章中，將推導出以下兩個「內積」恆等式：

$$\sum_{i=0}^{n} P_i \cdot F_i = \frac{1}{5}(P_n \cdot L_{n+1} + P_{n+2} \cdot L_n + P_{n+1} \cdot L_{n-1} - 2) \text{ 與}$$

$$\sum_{i=0}^{n} P_i \cdot L_i = P_n \cdot F_{n+1} + P_{n+2} \cdot F_n + P_{n+1} \cdot F_{n-1} \text{ 。}$$

進一步地，就筆者所知，關於「亂序和」：$\sum_{i=0}^{n} F_i \cdot P_{j_i}$，其中 $j_0, j_1, \cdots\cdots, j_n$ 是 $0, 1, \cdots\cdots, n$ 的一個重新排列，目前尚無特定的公式。而在順向內積恆等式建立之後，很自然地，在本文的最後，由「排序不等式」，對「P-F 亂序和」的上下界作出了刻劃：

$$F_{n+3} - P_{n+3} \le \sum_{i=0}^{n} F_i \cdot P_{j_i} \le \frac{1}{5}(P_n \cdot L_{n+1} + P_{n+2} \cdot L_n + P_{n+1} \cdot L_{n-1} - 2) \text{ 。}$$

貳、本文

一、記號與定義：

1. Padovan 數列：$\langle P_n \rangle : \begin{cases} P_0 = P_1 = P_2 = 1 \\ P_n = P_{n-2} + P_{n-3} \end{cases}$ 。 (參考資料[2])

數列的前幾項為 1，1，1，2，2，3，4，5，7，… 。

根據參考資料[2]的說法，此三階遞迴數列，是在 1996 年，由 Ian Stewart 在科學人雜誌

提出。

2. Fibonacci 數列：$\langle F_n \rangle$：$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$，數列的前幾項為：0，1，1，2，3，5，8，13，21，⋯。費氏數列的一般項為 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$。[3]

3. Lucas 數列：$\langle L_n \rangle$：$\begin{cases} L_0 = 2, L_1 = 1 \\ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \end{cases}$，數列的前幾項為：2，1，3，4，7，11，18，29，47，⋯。Lucas 數列的一般項為 $L_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$。[3]

設 α 與 β 為特徵方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ 的兩根，且 $\alpha > \beta$，則 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$，於是有 $\alpha + \beta = 1$，$\alpha \cdot \beta = -1$ 與 $\alpha - \beta = \sqrt{5}$，且有 $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ 與 $L_n = \alpha^n + \beta^n$。Fibonacci 數列與 Lucas 數列的關聯性有：$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ 與 $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$，將證明置於附錄。

二、Padovan 數列的「生成多項式」：

1. 類似但有別於「生成函數」，考慮並定義以下的多項式：
$p_n(x) = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \cdots + P_n x^n$，將此多項式稱為 Padovan 數列的「$n$ 次生成多項式」。

2. 運用 Padovan 數列本身的遞迴關係，可得以下的「Padovan 除法等式」：

$P_n x^{n+3} + P_{n+2} x^{n+2} + P_{n+1} x^{n+1} = (x^3 + x^2 - 1)\,(P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \cdots + P_n x^n) + x + 1$，其中 $n \ge 0$。

證明：

(1) 當 $n \ge 3$ 時，將 $(x^3 + x^2 - 1)\,(P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \cdots + P_n x^n)$ 乘開，可得

$$
\begin{aligned}
&(x^3 + x^2 - 1)\,(P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \cdots + P_n x^n) \\
&= P_n x^{n+3} + (P_{n-1} + P_n) x^{n+2} + (P_{n-2} + P_{n-1}) x^{n+1} \\
&+ (P_{n-3} + P_{n-2} - P_n) x^n + \cdots\cdots + (P_0 + P_1 - P_3) x^3
\end{aligned}
$$

$+(P_0-P_2)x^2-P_1x-P_0$

$=P_nx^{n+3}+P_{n+2}x^{n+2}+P_{n+1}x^{n+1}+0x^n+\cdots\cdots+0x^3+(1-1)x^2-x-1$

$=P_nx^{n+3}+P_{n+2}x^{n+2}+P_{n+1}x^{n+1}-x-1$，再作移項之後即得證。

(2) 當 $n=0$ 時，左式$=P_0x^3+P_2x^2+P_1x=x^3+x^2+x$，

右式$=(x^3+x^2-1)\cdot P_0+x+1=x^3+x^2+x$，等式成立。

(3) 當 $n=1$ 時，左式$=P_1x^4+P_3x^3+P_2x^2=x^4+2x^3+x^2$，

右式$=(x^3+x^2-1)\cdot(P_0+P_1x)+x+1=(x^3+x^2-1)\cdot(x+1)+x+1$

$=(x^3+x^2)\cdot(x+1)=x^4+2x^3+x^2$，等式成立。

(4) 當 $n=2$ 時，左式$=P_2x^5+P_4x^4+P_3x^3=x^5+2x^4+2x^3$，

右式$=(x^3+x^2-1)\cdot(P_0+P_1x+P_2x^2)+x+1=(x^3+x^2-1)\cdot(x^2+x+1)+x+1$

$=x^5+2x^4+2x^3$，等式成立。

綜合以上討論，有

$P_nx^{n+3}+P_{n+2}x^{n+2}+P_{n+1}x^{n+1}=(x^3+x^2-1)(P_0+P_1x+P_2x^2+\cdots+P_nx^n)+x+1$，其中 $n\geq 0$。

3.「根代入」引理：

$$\sum_{i=0}^{n}P_i\cdot\alpha^i=\frac{P_n\alpha^{n+3}+P_{n+2}\alpha^{n+2}+P_{n+1}\alpha^{n+1}-\alpha^2}{3\alpha+1},$$

且 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}P_i\cdot\beta^i=\frac{P_n\beta^{n+3}+P_{n+2}\beta^{n+2}+P_{n+1}\beta^{n+1}-\beta^2}{3\beta+1}$，其中 α 與 β 為特徵方程式 $x^2-x-1=0$ 的兩根，且 $\alpha>\beta$。

證明：

以 $x=\alpha$ 代入「Padovan 除法等式」，得

$$P_n\alpha^{n+3}+P_{n+2}\alpha^{n+2}+P_{n+1}\alpha^{n+1}=(\alpha^3+\alpha^2-1)\,(P_0+P_1\alpha+P_2\alpha^2+\cdots+P_n\alpha^n)+\alpha+1，$$

$\because\ \alpha$ 是 $x^2-x-1=0$ 的根 $\Rightarrow \alpha^2-\alpha-1=0$

$\Rightarrow \alpha^2=\alpha+1 \quad \Rightarrow \alpha^3=\alpha^2+\alpha=(\alpha+1)+\alpha=2\alpha+1$

$\Rightarrow \alpha^3+\alpha^2-1=(2\alpha+1)+(\alpha+1)-1=3\alpha+1$

於是有 $P_n\alpha^{n+3}+P_{n+2}\alpha^{n+2}+P_{n+1}\alpha^{n+1}$

$$=(3\alpha+1)\,(P_0+P_1\alpha+P_2\alpha^2+\cdots+P_n\alpha^n)+\alpha+1=(3\alpha+1)\cdot(\sum_{i=0}^{n}P_i\cdot\alpha^i)+\alpha^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n}P_i\cdot\alpha^i=\frac{P_n\alpha^{n+3}+P_{n+2}\alpha^{n+2}+P_{n+1}\alpha^{n+1}-\alpha^2}{3\alpha+1}$$

同理，有 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}P_i\cdot\beta^i=\frac{P_n\beta^{n+3}+P_{n+2}\beta^{n+2}+P_{n+1}\beta^{n+1}-\beta^2}{3\beta+1}$ 。

意義：此式呈現出類似於等比級數公式的作用：將等式左方的多個項相加，轉化為等式右方，分子只有四項相加減。

三、P-F 順向內積恆等式：

設 α 與 β 為特徵方程式 $x^2-x-1=0$ 的兩根，且 $\alpha>\beta$，已知費氏數列的一般項公式為 $F_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ 。

接著，來計算 Padovan 數列與 Fibonacci 數列的「順向內積」:

$$\sum_{i=0}^{n}P_i\cdot F_i$$

$$=\sum_{i=0}^{n}P_i\cdot\frac{\alpha^i-\beta^i}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot(\sum_{i=0}^{n}P_i\cdot\alpha^i-\sum_{i=0}^{n}P_i\cdot\beta^i)$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot(\frac{P_n\alpha^{n+3}+P_{n+2}\alpha^{n+2}+P_{n+1}\alpha^{n+1}-\alpha^2}{3\alpha+1}-\frac{P_n\beta^{n+3}+P_{n+2}\beta^{n+2}+P_{n+1}\beta^{n+1}-\beta^2}{3\beta+1})$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{(3\alpha+1)(3\beta+1)}\,[(P_n\alpha^{n+3}+P_{n+2}\alpha^{n+2}+P_{n+1}\alpha^{n+1}-\alpha^2)\cdot(3\beta+1)$$

$$-(P_n\beta^{n+3}+P_{n+2}\beta^{n+2}+P_{n+1}\beta^{n+1}-\beta^2)\cdot(3\alpha+1)]$$

$\because \alpha$ 與 β 為特徵方程式 $x^2-x-1=0$ 的兩根，且 $\alpha>\beta$

$\Rightarrow \alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$ 且 $\alpha-\beta=\sqrt{5}$。

於是有

$(3\alpha+1)(3\beta+1)=9\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+1=-9+3+1=-5$ 與

$$(P_n\alpha^{n+3}+P_{n+2}\alpha^{n+2}+P_{n+1}\alpha^{n+1}-\alpha^2)\cdot(3\beta+1)$$
$$=(P_n\alpha^{n+3}+P_{n+2}\alpha^{n+2}+P_{n+1}\alpha^{n+1}-\alpha^2)\cdot(1-\frac{3}{\alpha})$$
$$=(P_n\alpha^{n+3}+P_{n+2}\alpha^{n+2}+P_{n+1}\alpha^{n+1}-\alpha^2)\cdot\frac{1}{\alpha}(\alpha-3)$$
$$=(P_n\alpha^{n+2}+P_{n+2}\alpha^{n+1}+P_{n+1}\alpha^{n}-\alpha)\cdot(\alpha-3)$$
$$=P_n\alpha^{n+2}\cdot(\alpha-3)+P_{n+2}\alpha^{n+1}\cdot(\alpha-3)+P_{n+1}\alpha^{n}\cdot(\alpha-3)-\alpha\cdot(\alpha-3)$$
$$=P_n(\alpha^{n+3}-3\alpha^{n+2})+P_{n+2}(\alpha^{n+2}-3\alpha^{n+1})+P_{n+1}(\alpha^{n+1}-3\alpha^{n})-\alpha^2+3\alpha$$

同理，有 $(P_n\beta^{n+3}+P_{n+2}\beta^{n+2}+P_{n+1}\beta^{n+1}-\beta^2)\cdot(3\alpha+1)$

$$=P_n(\beta^{n+3}-3\beta^{n+2})+P_{n+2}(\beta^{n+2}-3\beta^{n+1})+P_{n+1}(\beta^{n+1}-3\beta^{n})-\beta^2+3\beta$$

再回到 $\sum_{i=0}^{n}P_i\cdot F_i$，現在有

$$\sum_{i=0}^{n}P_i\cdot F_i=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{(3\alpha+1)(3\beta+1)}\,[(P_n\alpha^{n+3}+P_{n+2}\alpha^{n+2}+P_{n+1}\alpha^{n+1}-\alpha^2)\cdot(3\beta+1)$$
$$-(P_n\beta^{n+3}+P_{n+2}\beta^{n+2}+P_{n+1}\beta^{n+1}-\beta^2)\cdot(3\alpha+1)]$$
$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{-5}\,[P_n(\alpha^{n+3}-3\alpha^{n+2})+P_{n+2}(\alpha^{n+2}-3\alpha^{n+1})+P_{n+1}(\alpha^{n+1}-3\alpha^{n})-\alpha^2+3\alpha]$$
$$-\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{-5}\,[P_n(\beta^{n+3}-3\beta^{n+2})+P_{n+2}(\beta^{n+2}-3\beta^{n+1})+P_{n+1}(\beta^{n+1}-3\beta^{n})-\beta^2+3\beta]$$
$$=\frac{1}{-5}\cdot[P_n\cdot(\frac{\alpha^{n+3}-\beta^{n+3}}{\alpha-\beta}-3\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta})+P_{n+2}\cdot(\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}-3\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta})$$
$$+P_{n+1}\cdot(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}-3\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta})-\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}+3\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}]$$
$$=\frac{1}{-5}\cdot[P_n\cdot(F_{n+3}-3F_{n+2})+P_{n+2}\cdot(F_{n+2}-3F_{n+1})+P_{n+1}\cdot(F_{n+1}-3F_{n})-(\alpha+\beta)+3]$$

$$=\frac{1}{-5}\cdot[P_n\cdot(-L_{n+1})+P_{n+2}\cdot(-L_n)+P_{n+1}\cdot(-L_{n-1})-1+3] \qquad (註)$$

$$=\frac{1}{5}\cdot(P_n\cdot L_{n+1}+P_{n+2}\cdot L_n+P_{n+1}\cdot L_{n-1}-2)$$

至此，得到了

$$\sum_{i=0}^{n}P_i\cdot F_i=\frac{1}{5}\cdot(P_n\cdot L_{n+1}+P_{n+2}\cdot L_n+P_{n+1}\cdot L_{n-1}-2)\text{ 。}$$

註： $F_{n+2}-3F_{n+1}=(F_{n+1}+F_n)-3F_{n+1}=-2F_{n+1}+F_n=-2F_{n+1}+(F_{n+1}-F_{n-1})$
$=-F_{n+1}-F_{n-1}=-L_n$ 。

四、P-L 順向內積恆等式：

類似地，也可以計算出 Padovan 數列與 Lucas 數列的「順向內積」:

$\sum_{i=0}^{n}P_i\cdot L_i=P_n\cdot F_{n+1}+P_{n+2}\cdot F_n+P_{n+1}\cdot F_{n-1}$，將其證明置於附錄。

五、進一步的應用：「P-F 亂序和」的上下界：

對於 $F_0\le F_1\le F_2\le\cdots\cdots\le F_n$ 與 $P_0\le P_1\le P_2\le\cdots\cdots\le P_n$ 兩數列，將對應項先相乘再相加，到目前為止，已知的結果有：

$$\sum_{i=0}^{n}F_i\cdot P_{n-i}=F_{n+3}-P_{n+3} \qquad (逆序和) \quad (參考資料[1])$$

$$\sum_{i=0}^{n}F_i\cdot P_i=\frac{1}{5}(P_n\cdot L_{n+1}+P_{n+2}\cdot L_n+P_{n+1}\cdot L_{n-1}-2) \qquad (順序和)$$

由「排序不等式」(參考資料[4])，有

$$\sum_{i=0}^{n}F_i\cdot P_{n-i}\le\sum_{i=0}^{n}F_i\cdot P_{j_i}\le\sum_{i=0}^{n}F_i\cdot P_i$$

(逆序和 ≤ 亂序和 ≤ 順序和)

，其中 $j_0,j_1,\cdots\cdots,j_n$ 是 $0,1,\cdots\cdots,n$ 的一個重新排列。

於是可得

$$F_{n+3}-P_{n+3}\le\sum_{i=0}^{n}F_i\cdot P_{j_i}\le\frac{1}{5}(P_n\cdot L_{n+1}+P_{n+2}\cdot L_n+P_{n+1}\cdot L_{n-1}-2)\text{ 。}$$

參、結語

對「亂序和」的估計，是否能有更佳的上下界，或者對某特定順序是否能建立特定的結論，可以作為一個進一步的課題。

參考資料

1. 陳建燁，Fibonacci 與 Padovan 的對話(下)： F-P 卷積恆等式，**數學傳播季刊，第 42 卷 3 期**，p66~73。
2. 廖信傑，用矩陣方法探討三階遞迴數列，**數學傳播季刊，第 38 卷 1 期**。
3. 陳建燁，**推導費氏數列性質三部曲(中)：用根與係數關係**，高中數學學科中心電子報第 109 期，2016 年 4 月。

4.張福春、李姿霖，不等式之基本解題方法，**數學傳播季刊，第 31 卷 2 期**，p41,58。

附錄：

1. $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$

證明：右式$=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}+\dfrac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}+\alpha^n\cdot\dfrac{1}{\alpha}-\beta^n\cdot\dfrac{1}{\beta}}{\alpha-\beta}$

$=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}+\alpha^n\cdot(-\beta)-\beta^n\cdot(-\alpha)}{\alpha-\beta}=\dfrac{\alpha^{n+1}-\alpha^n\beta+\alpha\beta^n-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=\alpha^n+\beta^n$=左式。

2. $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$

證明：$L_{n+1}+L_{n-1}=(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})+(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$

$=(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})+(\alpha^n\cdot\dfrac{1}{\alpha}+\beta^n\cdot\dfrac{1}{\beta})=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}-\alpha^n\beta-\alpha\beta^n$

$=(\alpha^n-\beta^n)\cdot(\alpha-\beta)=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\cdot(\alpha-\beta)^2=5F_n$。

3. P-L 順向內積恆等式的證明：

$$\sum_{i=0}^{n} P_i \cdot L_i$$

$$=\sum_{i=0}^{n} P_i\cdot(\alpha^i+\beta^i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n} P_i\cdot\alpha^i+\sum_{i=0}^{n} P_i\cdot\beta^i \qquad \text{(由「根代入」引理)}$$

$$=\frac{P_n\alpha^{n+3}+P_{n+2}\alpha^{n+2}+P_{n+1}\alpha^{n+1}-\alpha^2}{3\alpha+1}+\frac{P_n\beta^{n+3}+P_{n+2}\beta^{n+2}+P_{n+1}\beta^{n+1}-\beta^2}{3\beta+1}$$

$$=\frac{1}{(3\alpha+1)(3\beta+1)}[(P_n\alpha^{n+3}+P_{n+2}\alpha^{n+2}+P_{n+1}\alpha^{n+1}-\alpha^2)(3\beta+1)$$

$$+(P_n\beta^{n+3}+P_{n+2}\beta^{n+2}+P_{n+1}\beta^{n+1}-\beta^2)(3\alpha+1)]$$

而在「三、P-F 順向內積恆等式」之中，已求得：

$(3\alpha+1)(3\beta+1)=-5$，與

$$(P_n\alpha^{n+3}+P_{n+2}\alpha^{n+2}+P_{n+1}\alpha^{n+1}-\alpha^2)(3\beta+1)$$

$$=P_n(\alpha^{n+3}-3\alpha^{n+2})+P_{n+2}(\alpha^{n+2}-3\alpha^{n+1})+P_{n+1}(\alpha^{n+1}-3\alpha^n)-\alpha^2+3\alpha \quad \text{以及}$$

$$(P_n\beta^{n+3}+P_{n+2}\beta^{n+2}+P_{n+1}\beta^{n+1}-\beta^2)(3\alpha+1)$$

$$=P_n(\beta^{n+3}-3\beta^{n+2})+P_{n+2}(\beta^{n+2}-3\beta^{n+1})+P_{n+1}(\beta^{n+1}-3\beta^n)-\beta^2+3\beta$$

於是可得

$$\sum_{i=0}^{n} P_i\cdot L_i$$

$$=\frac{1}{-5}\cdot[P_n(\alpha^{n+3}-3\alpha^{n+2})+P_{n+2}(\alpha^{n+2}-3\alpha^{n+1})+P_{n+1}(\alpha^{n+1}-3\alpha^n)-\alpha^2+3\alpha]$$

$$+\frac{1}{-5}\cdot[P_n(\beta^{n+3}-3\beta^{n+2})+P_{n+2}(\beta^{n+2}-3\beta^{n+1})+P_{n+1}(\beta^{n+1}-3\beta^n)-\beta^2+3\beta]$$

$$=\frac{1}{-5}\cdot[P_n(L_{n+3}-3L_{n+2})+P_{n+2}(L_{n+2}-3L_{n+1})+P_{n+1}(L_{n+1}-3L_n)-L_2+3L_1]$$

$$=\frac{1}{-5}\cdot[P_n(-5F_{n+1})+P_{n+2}(-5F_n)+P_{n+1}(-5F_{n-1})-3+3\cdot 1] \qquad \text{(註)}$$

$$=P_n\cdot F_{n+1}+P_{n+2}\cdot F_n+P_{n+1}\cdot F_{n-1}\text{。}$$

註：

$$L_{n+2}-3L_{n+1}=L_{n+2}-L_{n+1}-2L_{n+1}=L_n-2L_{n+1}=L_n-L_{n+1}-L_{n+1}=-L_{n-1}-L_{n+1}=-5F_n\text{。}$$