實係數二次型$ax^2 + bxy + cy^2$的值域判別

連威翔

苗栗縣政府環保局安心即時上工計畫人員

壹、前言

本文將關心實係數二次型

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 \qquad \dots(1)$$

的係數a,b,c之值對$f(x,y)$取值範圍(底下簡稱值域)的影響，其中變數x,y為實數，而係數a,b,c為實數且不全為零。在係數a,b,c為正數、負數或零的各種不同情況下，透過一些簡單的例子，可看出某些情況$f(x,y)$的值域將會包含所有實數，其他情況則不會。在一般情形下，我們可否直接從係數a,b,c去判別$f(x,y)$值域的不同情況呢？

答案是肯定的，但該如何進行判別呢？在底下，筆者將藉由討論的方式，試圖給出問題的答案。討論之後，接著將對係數a,b,c與$f(x,y)$之值域的關係做出歸納，並給出一個判別準則。最後，也會給出幾個二次型的實例並做計算，以供大家參考。

貳、討論過程

底下，筆者將對a,b,c之值的各種情況討論(1)式中$f(x,y)$值域的範圍。討論順序會依照a,b,c三數中非零數的個數多寡來進行，從a,b,c中恰有一數非零開始，到三數皆非零為止。

不妨假設$f(x,y)$的值域為Im_f。開始討論之前，可發現只要取$x=y=0$，由(1)式即可知$0 \in Im_f$。因此，在底下的討論中，當我們有意要說明$f(x,y)$的取值範圍為所有的實數時，將只會聚焦在說明$f(x,y)$如何取為任意的正數或者負數上，而不再提如何取$f(x,y)=0$。

我們現在開始討論，過程如下：

(a) 當$b \neq 0$且$a=c=0$時，$f(x,y)=bxy$。因為$b \neq 0$，對於任意正數D，只要取

$$x = 1, \qquad y = {}^{D}\!/_{b}\ ,$$

可得$f(x,y)=D$；若D為任意正數，可順勢以$-D$表示任意負數，此時只要改取

$$x = 1, \qquad y = -{}^{D}\!/_{b}\ ,$$

即得$f(x,y)=-D$。因此，可知本情況下$f(x,y)$的值域Im_f包含所有實數。

(b) 當$a \neq 0$且$b=c=0$時，$f(x,y)=ax^2$。當$a>0$時，恆有

$$f(x,y) = ax^2 \geq 0,$$

即$f(x,y)$不取負值，因此值域Im_f不包含所有實數；當$a<0$時，可得

$$f(x,y)=ax^2\leq 0,$$

知值域Im_f同樣不包含所有實數。因此，本情況下Im_f不包含所有實數，即$Im_f\neq R$。

(c) 當$c\neq 0$且$a=b=0$時，$f(x,y)=cy^2$。此情況可仿照(b)項目所用的方式進行討論，同理可知Im_f不包含所有實數。

(d) 當$a\neq 0,b\neq 0$且$c=0$時，$f(x,y)=ax^2+bxy$，我們可將$f(x,y)$改寫為

$$f(x,y)=a\left(x+\frac{b}{2a}y\right)^2-\frac{b^2}{4a}y^2.$$

首先，注意a與$-\frac{b^2}{4a}$兩數必定異號。若$a>0$，則$-\frac{b^2}{4a}<0$，對於任意正數D，只要取

$$x=\sqrt{D/a}\,,\qquad y=0,$$

可得$f(x,y)=D$；若D為任意正數，可順勢以$-D$表示任意負數，因為$\frac{b^2}{4a}>0$，此時只要改取

$$y=\sqrt{\frac{4a}{b^2}D}\,,\qquad x=-\frac{b}{2a}y,$$

可得$f(x,y)=-D$。因此，當$a>0$時$f(x,y)$的值域Im_f包含所有實數。

而當$a<0$時，有$-\frac{b^2}{4a}>0$，此時只要仿照上述過程對 x, y 適當取值，同理可知$f(x,y)$的值域亦包含所有實數。因此，本情況下Im_f包含所有實數。

(e) 當$b\neq 0,c\neq 0$且$a=0$時，$f(x,y)=bxy+cy^2$，此情況可仿照(d)項目所用的方式進行討論，同理可知Im_f包含所有實數。

(f) 當$a\neq 0,c\neq 0$且$b=0$時，$f(x,y)=ax^2+cy^2$。此情況要分為兩大類進行討論，過程如下：

(f-1) 若a與c同號，此時要再分開看兩種情況。當a,c兩數均正時，因為

$$x^2\geq 0,\qquad y^2\geq 0,$$

我們恆有

$$f(x,y)=ax^2+cy^2\geq 0,$$

因此值域Im_f不包含所有實數；當a,c兩數皆負時，我們有

$$f(x,y)=ax^2+cy^2\leq 0,$$

值域Im_f同樣不包含所有實數。因此，本情況下值域Im_f不包含所有實數。

(f-2) 若a與c異號，此時同樣要再分開看兩種情況。當$a>0,c<0$時，對於任意正數D，只要取

$$x=\sqrt{D/a}\,,\qquad y=0,$$

可得$f(x,y)=D$；若D為任意正數，可順勢以$-D$表示任意負數，此時只要改取

$$x=0\,,\qquad y=\sqrt{-D/c}\,,$$

可得$f(x,y)=-D$。因此，本情況$f(x,y)$的值域Im_f包含所有實數。

當$a<0,c>0$時，只要仿照上述過程對 x,y 兩數適當取值，同理可知值域Im_f將包含所有實數。因此，本情況下Im_f包含所有實數。

(g) 當a,b,c三數均不為零時，有$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$，我們先將$f(x,y)$改寫為

$$f(x,y)=a\left(x+\frac{b}{2a}y\right)^2+\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)y^2. \quad \ldots(2)$$

此情況要分為三大類討論如下：

(g-1) 若$\frac{4ac-b^2}{4a}=0$，則由(2)式可知

$$f(x,y)=a\left(x+\frac{b}{2a}y\right)^2.$$

此情況與(b)的情況幾乎相同。當$a>0$時，恆有

$$f(x,y)=a\left(x+\frac{b}{2a}y\right)^2\geq 0,$$

即$f(x,y)$不取負值，因此值域Im_f不包含所有實數；當$a<0$時，可得

$$f(x,y)=a\left(x+\frac{b}{2a}y\right)^2\leq 0,$$

知值域Im_f同樣不包含所有實數。因此，本情況下Im_f不包含所有實數。

(g-2)若 $\frac{4ac-b^2}{4a}\neq 0$ 且 a與 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 同號，此時再分成兩種情況討論。當$a>0$且$\frac{4ac-b^2}{4a}>0$時，因為

$$\left(x+\frac{b}{2a}y\right)^2\geq 0,\qquad y^2\geq 0,$$

由(2)式可知

$$f(x,y)=a\left(x+\frac{b}{2a}y\right)^2+\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)y^2\geq 0,$$

因此值域Im_f不包含所有實數；另一方面，當$a<0$且$\frac{4ac-b^2}{4a}<0$時，則可確定

$$f(x,y)=a\left(x+\frac{b}{2a}y\right)^2+\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)y^2\leq 0,$$

值域Im_f同樣不包含所有實數。因此，本情況下Im_f不包含所有實數。

(g-3) 若 $\frac{4ac-b^2}{4a} \neq 0$ 且 a 與$\frac{4ac-b^2}{4a}$異號，此時再分成兩種情況討論。當$a > 0$且$\frac{4ac-b^2}{4a} < 0$時，對於任意正數D，只要取

$$x = \sqrt{D/a}\,, \qquad y = 0,$$

則由(2)式可得$f(x,y) = D$；若D為任意正數，可順勢以$-D$表示任意負數，因為$\frac{4a}{4ac-b^2} < 0$，可知

$$-\frac{4a}{4ac-b^2}D > 0.$$

此時只要改取

$$y = \sqrt{-\frac{4a}{4ac-b^2}D}, \qquad x = -\frac{b}{2a}y,$$

則由(2)式可得$f(x,y) = -D$。因此，本情況$f(x,y)$的值域Im_f包含所有實數。

當 $a < 0$ 且 $\frac{4ac-b^2}{4a} > 0$時，仿照上述討論過程，同理可知值域Im_f包含所有實數。因此，本情況下Im_f包含所有實數。

參、歸納過程

注意到第二節的討論中，在(g-1)情況下，$\frac{4ac-b^2}{4a} = 0$的條件告訴我們

$$b^2 - 4ac = 0,$$

此情形下$f(x,y)$的值域Im_f不包含所有實數；在(g-2)情況下，a與$\frac{4ac-b^2}{4a}$同號的條件告訴我們

$$a \times \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{1}{4}(4ac-b^2) > 0,$$

因此有

$$b^2 - 4ac < 0,$$

而此情形下值域Im_f亦不包含所有實數；而在(g-3)情況下，a與$\frac{4ac-b^2}{4a}$異號的條件告訴我們

$$a \times \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{1}{4}(4ac-b^2) < 0,$$

因此有

$$b^2 - 4ac > 0,$$

此情形下值域Im_f包含所有實數。

觀察上述(g-1),(g-2),(g-3)這三種情況下b^2-4ac之取值範圍與$f(x,y)$的值域之間的對應關係，我們不妨檢查看看，是否可依照b^2-4ac不同的取值結果(為正數、負數或零)，作為判別$f(x,y)$的值域是否包含所有實數的判別條件。

以b^2-4ac的值作為判別$f(x,y)$值域Im_f是否包含所有實數的條件，除了(g-1),(g-2)與(g-3)這三種我們已經在上面檢查過的情形之外，當我們對第二節中尚未檢查的(a),(b),(c),(d),(e),(f-1),(f-2)這其餘七種情況逐一檢查後，不難發現，滿足$b^2-4ac=0$的情況是(b),(c)這兩種情況。在(b),(c)這兩種情況下，$f(x,y)$的值域Im_f不包含所有實數，這與(g-1)情況相同。

接著，滿足$b^2-4ac<0$的情況只有(f-1)這一個，此情形下$f(x,y)$的值域Im_f不包含所有實數，這與(g-2)的情況相同。而截至目前，我們知道(b),(c),(f-1),(g-1), (g-2)這五種個情況都滿足值域Im_f不包含所有實數，因此我們將這五種情況歸為第一類，而這五種情況所共同滿足的條件就是$b^2-4ac\leq 0$。

最後，滿足$b^2-4ac>0$的情況共有(a),(d),(e),(f-2)這四個，而這四個情形下$f(x,y)$的值域Im_f均包含所有實數，此與(g-3)的情況相同。因此，我們將(a),(d),(e),(f-2),(g-3)這五個情況歸為第二類。

注意在上述$b^2-4ac>0$與$b^2-4ac\leq 0$兩條件的分類下，我們所關心的實係數二次型，已經完整涵蓋了第二節中所討論的(a),(b),(c),(d),(e),(f-1),(f-2),(g-1),(g-2),(g-3)所有這些不同係數條件下的二次形而無遺漏。這樣一來，我們就得到了底下的判別準則：

<u>判別準則</u>：對於二次型$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$，其中變數x,y為實數，而係數a,b,c為實數且不全為零，我們有：

(1)當且僅當$b^2-4ac>0$時，$f(x,y)$的值域包含所有實數，即$Im_f=R$；

(2)當且僅當$b^2-4ac\leq 0$時，$f(x,y)$的值域不包含所有實數，即$Im_f\neq R$。

讀者應該有發現，上面兩個判別條件我們可以只給出其中一個，因為這樣做的話另一個將會自動成立。

注意，當$b^2-4ac\leq 0$時使$f(x,y)$的值域不包含所有實數的情形，為第二節中(b),(c),(f-1),(g-1), (g-2)這五種情況。回顧這五種情況，可知$f(x,y)$的值域Im_f只有底下這兩種可能：

$$Im_f\subseteq R^+\cup\{0\} \qquad \text{或} \qquad Im_f\subseteq R^-\cup\{0\}.$$

此處我們分別以R^+與R^-代表所有正實數與所有負實數所成集合。意思是，當$b^2-4ac\leq 0$時，在$f(x,y)\leq 0$與$f(x,y)\geq 0$兩者之中，恰有一者恆成立。

此時，若想要進一步確定(b),(c),(f-1),(g-1),(g-2)這五個滿足$b^2-4ac\leq 0$的情況下，$f(x,y)$滿足$f(x,y)\leq 0$還是$f(x,y)\geq 0$，我們可以另外算出$f(1,0)=a$與$f(0,1)=c$。在(b),(c),(f-1),(g-1), (g-2)這五種情況下，因為a,c兩數不全為 0，只要觀察a,c兩數中不為 0 的

其中一數為正數或負數，即可達成判別$f(x,y)$滿足$f(x,y) \le 0$或$f(x,y) \ge 0$的目的。

例如，某實係數二次形$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$滿足$b^2 - 4ac \le 0$，且已知$a > 0$，則有$f(1,0) > 0$，這樣我們就確定了此二次形恆滿足$f(x,y) \ge 0$。

肆、關於幾個實例的計算

看完前面的介紹，對於實係數二次型$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$，我們都知道如何應用上一節的判別準則來判定$Im_f$是否包含所有實數。接著，我們先看一個問題，它可以立即應用該準則來解決：

問題 1：在變數 x,y 均可取為任意實數的條件下，已知二次型$f(x,y) = x^2 - xy + ky^2$的值域不包含所有實數，試求實數k的取值範圍。

根據第三節的判別準則，可知上述問題所關心的 k 值須滿足$1 - 4k \le 0$的條件，因此得$k \ge \frac{1}{4}$。如果不使用該準則，其實也可以直接討論求解，這部分就留給讀者練習。

不過，對於已確定係數的例子，我們也可不使用第三節中的判別準則而直接進行計算。底下我們給出三個這樣的例子，並透過一些簡單的計算技巧進行處理與判斷。請參考底下三個例子：

例 1：對於二次型$f(x,y) = x^2 - xy + y^2$，我們有底下的計算結果：

$$x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{3}{4}(x-y)^2. \quad \ldots (3)$$

(註 1)上式將$x^2 - xy + y^2$寫成兩個非負項之和，故可知$x^2 - xy + y^2 \ge 0$，因此$f(x,y)$的值域不包含所有實數。而(3)左式相應於(1)式的係數a,b,c，滿足$b^2 - 4ac = -3 \le 0$，此結果符合準則所述。

例 2：對於$f(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$這個二次型，我們有

$$f(x,y) = x^2 + 4xy + y^2 = \frac{3}{2}(x+y)^2 - \frac{1}{2}(x-y)^2.$$

對於任意正數D，只要取

$$x = y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}D},$$

即得$f(x,y) = D$為任意正數；若D為任意正數，可順勢以$-D$表示任意負數，此時只要改取

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2D}, \qquad y = -\frac{1}{2}\sqrt{2D},$$

即得$f(x,y) = -D$為任意負數。又因為$f(0,0) = 0$，可知$f(x,y)$的值域包含所有實數。而二次型$f(x,y)$其相應於(1)式的係數a,b,c滿足$b^2 - 4ac = 12 > 0$，也符合準則所述。

例 3：對於$f(x,y)=-x^2+4xy-4y^2$這個二次型，不難發現有

$$f(x,y)=-(x-2y)^2\le 0,$$

因此$f(x,y)$的值域不包含所有實數。而二次型$f(x,y)$相應於(1)式的係數a,b,c滿足$b^2-4ac=0$，結果也符合準則所述。

伍、結語

本文的寫作緣起，是因為筆者在計算建中通訊解題第 64 期中的問題 6404 時，發現題目中分式的分母出現了x^2-xy+y^2這個二次型，且透過計算得知該二次型非負(其過程筆者已在第四節的例 1 中介紹)。因此，對於一般的實係數二次型$ax^2+bxy+cy^2$，筆者便想說何不研究看看其值域的取值範圍。

第三節的判別準則，告訴我們可依照$b^2-4ac>0$或者$b^2-4ac\le 0$的條件判斷(1)式中二次型$f(x,y)$的值域Im_f是否包含所有實數，且$b^2-4ac\le 0$時可透過觀察a,c兩數，更進一步確定$f(x,y)$恆滿足$f(x,y)\le 0$或$f(x,y)\ge 0$。而由第四節的內容，我們知道對於已確定係數的實係數二次型，即使不用第三節所介紹的判別準則，仍可透過直接計算得出結果。

本文是簡單的心得分享，筆者認為，應該有比本文更簡單的方法來得出第三節的判別準則。無論如何，希望本文能給對二次型有興趣的讀者們參考。

註 1：在(2)式中的係數$\frac{1}{4}$ 與$\frac{3}{4}$該如何求出呢？一個簡單的方法，可先假設

$$x^2-xy+y^2=a(x+y)^2+b(x-y)^2,$$

接著展開上式等號右邊的兩個括號後再比較係數，即可求得係數a,b之值。一般來說，對於形如$px^2+qxy+py^2$的二次型，下式的係數a,b都會有解：

$$px^2+qxy+py^2=a(x+y)^2+b(x-y)^2.$$

其中p,q兩實數不全為 0。

參考文獻

問題 6404，建中通訊解題 64 期