平面凸四邊形、凸五邊形頂角的合分角正弦值、餘弦值關係方程式(下)

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

【(續)科學教育月刊第 427 期第 60 頁之後】

三、一般形平面凸五邊形頂角的合分角正弦值、餘弦值性質關係方程式

探討一般形平面凸五邊形頂角的合分角正弦值、餘弦值關係方程式前，先要知悉圓內接五邊形的相關性關係方程式，繼續請看接下來的詳細推演引導；

(一) 圓內接五邊形頂角的合分角正弦值關係方程式

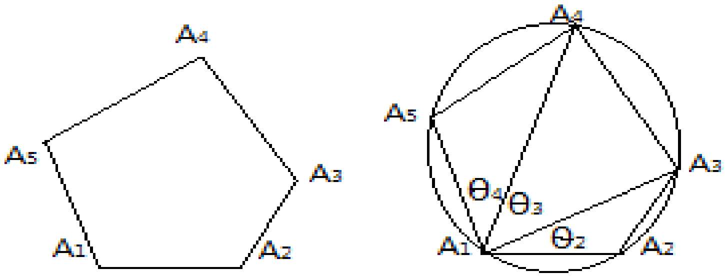

圖 10.

見圖 10.，任給一個平面凸五邊形與圓內接五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，令其邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_1}=V_5$，對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$，$\overline{A_1A_4}=d_{14}$，今設定選取圓內接五邊形的頂角 $A_1=\theta_4+\theta_3+\theta_2$，$\theta_4$是弧長 A_4A_5 的圓周角，θ_3是弧長 A_3A_4 的圓周角，θ_2是弧長 A_2A_3 的圓周角，頂角 A_1是合角，而θ_4、θ_3與θ_2則是頂角 A_1的分角。

[1] 先選取圓內接四邊形 $A_1A_2A_4A_5$，見下圖 11.，應用圓內接四邊形方程式(2)式，可得下列對應方程式；

$$\frac{\sin A_1}{V_5V_1}=\frac{\sin\theta_4}{V_5d_{14}}+\frac{\sin(\theta_3+\theta_2)}{d_{14}V_1} \qquad (2\text{-}1)$$

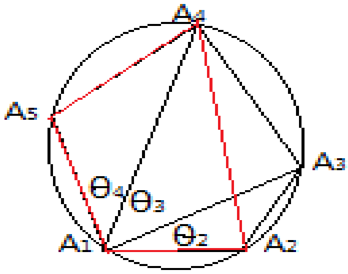

圖 11.

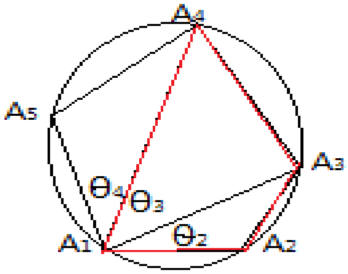

圖 12.

[2]　其次，再選取圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，圖 12.，同理，得下列對應方程式；

$$\frac{\sin(\theta_3+\theta_2)}{d_{14}V_1}=\frac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1} \tag{2-2}$$

今將方程式(2-2)式代入(2-1)式，即得下列完整規範分佈的對應方程式；

$$\frac{\sin A_1}{V_5V_1}=\frac{\sin(\theta_4+\theta_3+\theta_2)}{V_5V_1}=\frac{\sin\theta_4}{V_5d_{14}}+\frac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1} \tag{10}$$

$$\Rightarrow \quad d_{13}d_{14}\sin A_1=V_1d_{13}\sin\theta_4+V_1V_5\sin\theta_3+V_5d_{14}\sin\theta_2 \tag{11}$$

(10)式、(11)式就是具規律性的圓內接五邊形頂角的合分角正弦值關係方程式！

接下來需要引用方程式(10)式、(11)式兩式並間接地來推理演繹出一般形平面凸五邊形頂角的合分角正弦值關係方程式。

(二) 一般形平面凸五邊形頂角的合分角正弦值關係方程式

一般形平面凸五邊形其五頂點是不一定共圓的，但它的任意三個頂點必共圓，以此共圓的觀點出發並展開下列的推理演繹運算過程；先選取頂角 A_1 為合角，並以選定 A_1、A_3、A_4 三個頂點為共圓的情形，而另外兩頂點 A_2、A_5 出現在圓內外側的情形共計有 4 類；詳細經過演繹運算，得出這 4 類相異情形推理的方程式結果竟然完全相同，這可說是一般形平面凸五邊形的特異性質，詳情如下；

[1]　第 1 類圖形如下圖 13.，A_1、A_3、A_4 共圓而頂點 A_2、A_5 皆落於圓的外側；

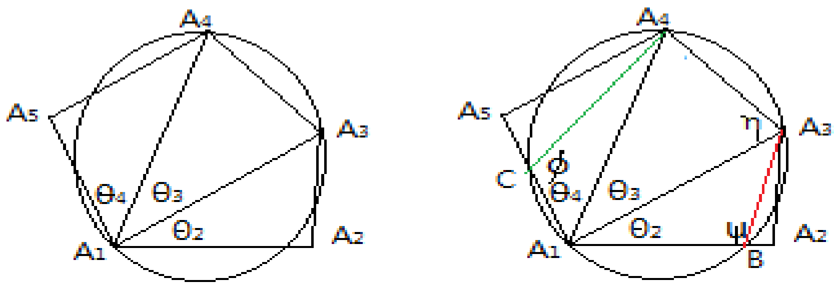

圖 13.

(a) 令邊長線段 $\overline{A_1A_2}$ 與圓周相交於 B 點，聯結 B 點與 A_3 點，使 $\angle A_1BA_3=\psi$，則 $\angle BA_3A_2=\psi-A_2$，對圓內接四邊形 $A_1BA_3A_4$ 言；由對角互補性質 $A_3-(\psi-A_2)+\theta_3+\theta_2=\pi \Rightarrow \psi=A_2+A_3+\theta_3+\theta_2-\pi \Rightarrow \angle BA_3A_2=A_3+\theta_3+\theta_2-\pi$

(b) 圖 13.中，角度 $\eta=A_3-\angle A_1A_3A_2=A_3-[\pi-A_2-\theta_2]=A_2+A_3+\theta_2-\pi$

(c) 令邊長線段 $\overline{A_1A_5}$ 與圓周相交於 C 點，聯結 C 點與 A_4 點，使 $\angle A_1CA_4=\phi$，對圓內接四邊形 $A_1A_3A_4C$ 言；由對角互補性質，$\phi+\eta=\pi \Rightarrow \phi=\pi-\eta \Rightarrow$

$\phi=2\pi-(A_2+A_3+\theta_2)$ 且 $\angle CA_4A_5=\phi-A_5=2\pi-(A_2+A_3+A_5+\theta_2)$

(d) 對 ΔBA_3A_2 言，由正弦定理；$\dfrac{\overline{BA_2}}{\sin(\angle BA_3A_2)}=\dfrac{V_2}{\sin(\pi-\psi)} \Rightarrow$

$$\frac{\overline{BA_2}}{\sin[(A_3+\theta_3+\theta_2)-\pi]}=\frac{V_2}{\sin(2\pi-A_2-A_3-\theta_3-\theta_2)} \Rightarrow$$

$$\overline{BA_2}=V_2\cdot\frac{\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}$$

(e) 對 ΔCA_4A_5 言，由正弦定理；$\dfrac{\overline{CA_5}}{\sin(\angle CA_4A_5)}=\dfrac{V_4}{\sin(\pi-\phi)} \Rightarrow$

$$\overline{CA_5}=V_4\cdot\frac{\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}$$

(f) 對圓內接五邊形 $A_1BA_3A_4C$ 言，見上圖 13.右圖示，並引用方程式(11)式得；

$$d_{13}d_{14}\sin A_1=(V_1-\overline{A_2B})\,d_{13}\sin\theta_4+(V_1-\overline{A_2B})\,(V_5-\overline{CA_5})\sin\theta_3+(V_5-\overline{CA_5})d_{14}\sin\theta_2$$

將(d).與(e).推理敘述中的 $\overline{BA_2}$ 與 $\overline{CA_5}$ 的表示式兩者同步一起代入上式中，得；

$$d_{13}d_{14}\sin A_1=\left[V_1-V_2\frac{\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]d_{13}\sin\theta_4+$$

$$\left[V_1-V_2\frac{\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot\left[V_5-V_4\frac{\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\sin\theta_3+$$

$$\left[V_5-V_4\frac{\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]d_{14}\sin\theta_2$$

$$=V_1\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]d_{13}\sin\theta_4+$$

$$V_1\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot V_5\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\sin\theta_3+$$

$$V_5\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]d_{14}\sin\theta_2 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\sin A_1}{V_5V_1}=\frac{\sin\theta_4}{V_5d_{14}}\cdot\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]+$$
$$\frac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}\cdot\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]$$
$$+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1}\cdot\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right] \qquad (12)$$

方程式(12)式就是第 1 類的平面凸五邊形頂角的合分角正弦值關係方程式！

(g) 方程式(12)式的相關性檢驗

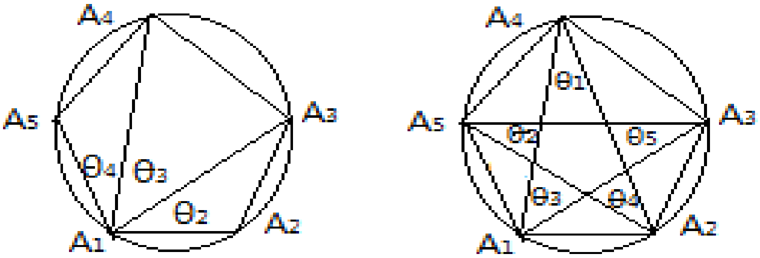

圖 14.

(1) 由圖 14.清楚的看到圓內接五邊形各頂角的合分角關係為 $A_1=\theta_4+\theta_3+\theta_2$，$A_2=\theta_5+\theta_4+\theta_3$，$A_3=\theta_1+\theta_5+\theta_4$，$A_4=\theta_2+\theta_1+\theta_5$，$A_5=\theta_3+\theta_2+\theta_1$，而右圖的圓內接五角星形內表明出 $\theta_5+\theta_4+\theta_3+\theta_2+\theta_1=\pi$，所以，方程式(12)式中的

$$A_3+\theta_3+\theta_2=\theta_5+\theta_4+\theta_3+\theta_2+\theta_1=\pi \quad\Rightarrow\quad \sin(A_3+\theta_3+\theta_2)=0 \qquad \text{(g-1)}$$

$$A_2+A_3+\theta_3+\theta_2=A_2+\theta_5+\theta_4+\theta_3+\theta_2+\theta_1=\pi+A_2 \quad\Rightarrow$$
$$\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)=\sin(\pi+A_2)=-\sin A_2\neq 0 \qquad \text{(g-2)}$$

$$A_2+A_3+A_5+\theta_2=2(\theta_5+\theta_4+\theta_3+\theta_2+\theta_1)=2\pi\Rightarrow\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)=0 \qquad \text{(g-3)}$$

$$A_2+A_3+\theta_2=\theta_5+\theta_4+\pi=\pi-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+\pi=2\pi-A_5$$
$$\Rightarrow\quad \sin(A_2+A_3+\theta_2)=\sin(2\pi-A_5)=-\sin A_5\neq 0 \qquad \text{(g-4)}$$

(2) 如果令平面凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 的 5 個頂點共圓，則將上述的(g-1)式、(g-2)式、(g-3)式、(g-4)式等四式一起同時代入方程式(12)式中，(12)式中所有[ ]內的項都將退化成為 1，使方程式(12)式蛻變成方程式(10)式，是故方程式(12)式實已涵蓋統一了方程式(10)式，讓(10)式成為(12)式的特例！相關性驗證完成。

[2] 第 2 類圖形如下圖 15.，頂點 A_2 落於圓的外側且頂點 A_5 落於圓的內側；

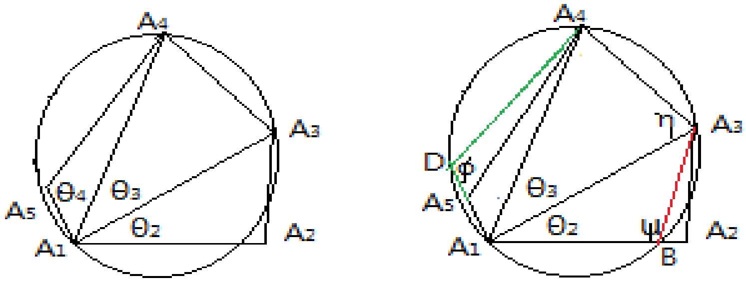

圖 15.

(a) 令邊長線段 $\overline{A_1A_2}$ 與圓周相交於 B 點，聯結 B 點與 A_3 點，使 $\angle A_1BA_3 = \psi$ ，如第 1 類情形，得； $\psi = A_2 + A_3 + \theta_3 + \theta_2 - \pi \;\Rightarrow\; \angle BA_3A_2 = A_3 + \theta_3 + \theta_2 - \pi$ 且角度 $\eta = A_3 - \angle A_1A_3A_2 = A_3 - [\pi - A_2 - \theta_2] = A_2 + A_3 + \theta_2 - \pi$ ，對 ΔBA_3A_2 言，由正弦定理得； $\dfrac{\overline{BA_2}}{\sin(\angle BA_3A_2)} = \dfrac{V_2}{\sin(\pi-\psi)} \;\Rightarrow\; \overline{BA_2} = V_2 \cdot \dfrac{\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}$

(b) 延長線段 $\overline{A_1A_5}$ 與圓周相交於 D 點，聯結 D 點與 A_4 點，使 $\angle A_5DA_4 = \phi$ ，對圓內接四邊形 $A_1A_3A_4D$ 言；由對角互補性質， $\phi + \eta = \pi \;\Rightarrow\; \phi = \pi - \eta \;\Rightarrow$ $\phi = 2\pi - (A_2 + A_3 + \theta_2)$ 且 $\angle DA_4A_5 = (A_2 + A_3 + A_5 + \theta_2) - 2\pi$ ，對 ΔDA_4A_5 言，由正弦定理； $\dfrac{\overline{DA_5}}{\sin(\angle DA_4A_5)} = \dfrac{V_4}{\sin\phi} \;\Rightarrow\; \overline{DA_5} = -V_4 \cdot \dfrac{\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}$

(c) 對圓內接五邊形 $A_1BA_3A_4D$ 言，見上圖 15.右圖示，並引用方程式(11)式得；

$$d_{13}d_{14}\sin A_1 = (V_1 - \overline{A_2B})\, d_{13}\sin\theta_4 + (V_1 - \overline{A_2B})\,(V_5 + \overline{DA_5})\sin\theta_3 + (V_5 + \overline{DA_5})d_{14}\sin\theta_2$$

將(a).與(b).推理敘述中的 $\overline{BA_2}$ 與 $\overline{DA_5}$ 的表示式兩者同步一起代入上式中，並仿效上述第 1 類型的(f).標題內完整推演運算過程而得出完全相同的下列(12)式；

$$\frac{\sin A_1}{V_5V_1} = \frac{\sin\theta_4}{V_5d_{14}} \cdot \left[1 - \frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right] + \frac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}} \cdot \left[1 - \frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right] \cdot \left[1 - \frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right] + \frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1} \cdot \left[1 - \frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right] \tag{12}$$

[3] 第 3 類圖形如下圖 16.，頂點 A_2 落於圓的內側且頂點 A_5 落於圓的外側；

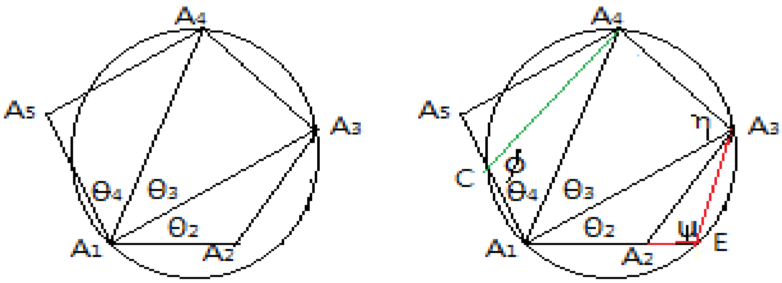

圖 16.

[4] 第 4 類圖形如下圖 17.，A_1、A_3、A_4共圓而頂點 A_2、A_5皆落於圓的內側；

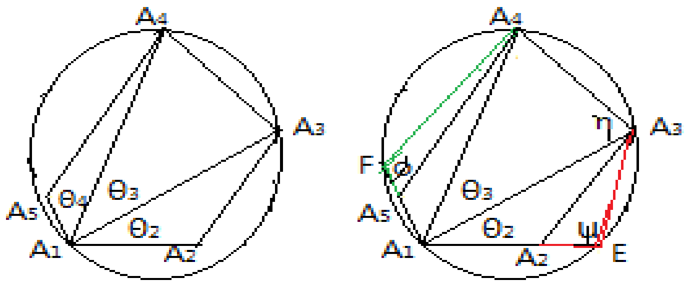

圖 17.

再仿效上述第 1 類型圖形內完整推演運算過程，這第 3 類、第 4 類圖形必也得證出完全相同的方程式(12)式。省略這兩類圖形的演繹證明流程。

[5] 方程式(12)式型態裡有 2 個 [ ] 的修正項，現在要解讀此修正項的意義；第 1 個修正項是 $\left[1-\dfrac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]$，請參考圖 13.、圖 15.、圖 16.、圖 17.，[ ]內的 $\dfrac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}$ 分式項乃表示線段 $\overline{BA_2}$、$\overline{EA_2}$ 與 $\overline{A_1A_2}=V_1$ 的比值，而 $1-\dfrac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}$ 則表示著大於 1 或小於 1 的正實數，乘上這修正項正實數將有放大或縮小數量、線段的效果，使得修正好的線段 $\overline{A_1B}$、$\overline{A_1E}$ 恰能成為新的輔助形圓內接五邊形的一個有效邊長！同理，另外第 2 個修正項也扮演著相同功能意義的就是 $\left[1-\dfrac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]$。

綜合以上 4 種類型詳盡的推理引證與檢驗，確認了美妙奇特的方程式(12)式即為眾人所引頸企盼的一般形平面凸五邊形頂角的合分角正弦值關係方程式！

(三) 圓內接五邊形頂角的合分角餘弦值關係方程式

[1] 在圖 11.中，令對角線長 $\overline{A_2A_4}=d_{24}$ ；先選取圓內接四邊形 $A_1A_2A_4A_5$，並引用方程式 (7)式，得

$$\frac{\cos A_1}{V_5V_1}=\frac{\cos\theta_4}{V_5d_{14}}+\frac{\cos(\theta_3+\theta_2)}{d_{14}V_1}-\frac{V_5V_1+d_{24}V_4}{V_5V_1d_{14}^{\ 2}} \tag{7-1}$$

再選取圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，得 $\dfrac{\cos(\theta_3+\theta_2)}{d_{14}V_1}=\dfrac{\cos\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\dfrac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1}-\dfrac{d_{14}V_1+V_2V_3}{d_{14}V_1d_{13}^{\ 2}}$，代入前式(7-1)式後，再依順序排列而整理成下列的(7-2)式；

$$\frac{\cos A_1}{V_5V_1}=\frac{\cos\theta_4}{V_5d_{14}}+\frac{\cos\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1}-\frac{d_{14}V_1+V_2V_3}{d_{14}V_1d_{13}^{\ 2}}-\frac{V_5V_1+d_{24}V_4}{V_5V_1d_{14}^{\ 2}} \tag{7-2}$$

[2] 這(7-2)式的末項裡有 $d_{24}V_4$ 的乘積項需要被轉換，參考上圖 12.的圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，引用托勒密公式得 $d_{13}d_{24}=V_1V_3+V_2d_{14}\ \Rightarrow\ d_{24}=\dfrac{V_1V_3+V_2d_{14}}{d_{13}}$，則

$$V_5V_1+d_{24}V_4=V_5V_1+\frac{V_1V_3+V_2d_{14}}{d_{13}}\times V_4=\frac{V_5V_1d_{13}+V_1V_4V_3+V_2V_4d_{14}}{d_{13}}$$ 代入(7-2)式

，得 $$\frac{\cos A_1}{V_5V_1}=\frac{\cos\theta_4}{V_5d_{14}}+\frac{\cos\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1}-\frac{d_{14}V_1+V_2V_3}{d_{14}V_1d_{13}^{\ 2}}-\frac{V_5V_1d_{13}+V_1V_4V_3+V_2V_4d_{14}}{V_5V_1d_{14}^{\ 2}d_{13}}$$

再將上式最末兩項重新合併整理，即得；

$$\frac{\cos A_1}{V_5V_1}=\frac{\cos\theta_4}{V_5d_{14}}+\frac{\cos\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1}-\frac{V_5V_1[d_{13}^{\ 2}+d_{14}^{\ 2}]+V_5V_2V_3d_{14}+V_1V_4V_3d_{13}+V_2V_4d_{14}d_{13}}{V_5V_1d_{13}^{\ 2}d_{14}^{\ 2}} \tag{13}$$

$$\Rightarrow\quad d_{13}d_{14}\cos A_1=V_1d_{13}\cos\theta_4+V_5V_1\cos\theta_3+V_5d_{14}\cos\theta_2$$
$$-\frac{1}{d_{13}d_{14}}\Big[V_5V_1(d_{13}^{\ 2}+d_{14}^{\ 2})+V_5V_2V_3d_{14}+V_1V_4V_3d_{13}+V_2V_4d_{13}d_{14}\Big] \tag{14}$$

方程式(13)式、(14)式即為圓內接五邊形頂角的合分角餘弦值關係方程式！

接下來還要繼續引用這方程式(13)式、(14)式兩式並間接地來推理演繹出一般形平面凸五邊形頂角的合分角餘弦值關係方程式。

(四) 一般形平面凸五邊形頂角的合分角餘弦值關係方程式

同樣地，先選取頂角 A_1 為合角，並以選定 A_1、A_3、A_4 三個頂點為共圓的情形，而另外兩頂點 A_2、A_5 出現在圓內外側的情形共計有 4 類；詳細經過演繹運算，也得出這 4 類相異情形推理的方程式結果依然完全相同！毫無疑問地，這也就是一般形平面凸五邊形的特異性質，這 4 類相異情形推理演繹的詳情如下；

[1] 第 1 類圖形如圖 13.，A_1、A_3、A_4共圓而頂點A_2、A_5皆落於圓的外側；

(a) 對圖 13.的右圖示，應用方程式(14)式可得下列相對應餘弦值關係方程式；$d_{13}d_{14}\cos A_1$

$$=(V_1-\overline{BA_2})d_{13}\cos\theta_4+(V_5-\overline{CA_5})(V_1-\overline{BA_2})\cos\theta_3+(V_5-\overline{CA_5})d_{14}\cos\theta_2-\frac{1}{d_{13}d_{14}}[$$

$$(V_5-\overline{CA_5})(V_1-\overline{BA_2})(d_{13}{}^2+d_{14}{}^2)+(V_5-\overline{CA_5})\cdot\overline{BA_3}\cdot V_3 d_{14}+$$

$$(V_1-\overline{BA_2})\cdot\overline{CA_4}\cdot V_3 d_{13}+\overline{BA_3}\cdot\overline{CA_4}\cdot d_{13}d_{14}] \qquad (14\text{-}1)$$

(b) 仿效三之(二)的[1].標題內文裡所推演出的運算過程並應用其角度表示式；對ΔBA_3A_2言，由正弦定理；$\dfrac{\overline{BA_2}}{\sin(\angle BA_3A_2)}=\dfrac{V_2}{\sin(\pi-\psi)}=\dfrac{\overline{BA_3}}{\sin A_2}$ $\Rightarrow$

$$\overline{BA_2}=V_2\cdot\frac{\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)} \quad 與 \quad \overline{BA_3}=-V_2\cdot\frac{\sin A_2}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}$$

(c) 對ΔCA_4A_5言，由正弦定理；$\dfrac{\overline{CA_5}}{\sin(\angle CA_4A_5)}=\dfrac{V_4}{\sin(\pi-\phi)}=\dfrac{\overline{CA_4}}{\sin A_5}$ $\Rightarrow$

$$\overline{CA_4}=-V_4\cdot\frac{\sin A_5}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)} \quad 與 \quad \overline{CA_5}=V_4\cdot\frac{\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}$$

(d) 將得出的線段$\overline{BA_2}$、$\overline{BA_3}$、$\overline{CA_4}$、$\overline{CA_5}$一起同步代入方程式(14-1)式內，得；

$$d_{13}d_{14}\cos A_1=V_1\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]d_{13}\cos\theta_4+$$

$$V_5\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\cdot V_1\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cos\theta_3$$

$$+V_5\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]d_{14}\cos\theta_2-\frac{1}{d_{13}d_{14}}\times\{$$

$$V_5V_1\cdot\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot(d_{13}{}^2+d_{14}{}^2)-$$

$$V_5\cdot\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\cdot V_2\cdot\frac{\sin A_2}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\cdot V_3d_{14}-$$

$$V_1\cdot\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot V_4\cdot\frac{\sin A_5}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\cdot V_3d_{13}+$$

$$V_2V_4\cdot\frac{\sin A_2}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\cdot\frac{\sin A_5}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\cdot d_{13}d_{14}\ \}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos A_1}{V_5V_1}=\frac{\cos\theta_4}{V_5d_{14}}\cdot\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]+$$

$$\frac{\cos\theta_3}{d_{14}d_{13}}\cdot\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\cdot\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]+$$

$$\frac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1}\cdot\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]-\frac{1}{V_5V_1{d_{13}}^2{d_{14}}^2}\times\Bigg\{$$

$$V_5V_1\cdot\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot({d_{13}}^2+{d_{14}}^2)-$$

$$V_5V_2\cdot\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{\sin A_2}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\cdot V_3d_{14}-$$

$$V_1V_4\cdot\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{\sin A_5}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\cdot V_3d_{13}+$$

$$V_2V_4\cdot\frac{\sin A_2}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\cdot\frac{\sin A_5}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\cdot d_{13}d_{14}\ \Bigg\} \qquad (15)$$

方程式(15)式就是第 1 類圖形的平面凸五邊形頂角的合分角餘弦值關係方程式！

(e) 在(15)式中第 5 列內有 1 個修正項是 $-V_2\cdot\dfrac{\sin A_2}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}$，其意義為新的輔助形圓內接五邊形的第二個有效邊長 $\overline{BA_3}$，而第 6 列內另外有 1 個修正項是 $-V_4\cdot\dfrac{\sin A_5}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}$，為新的輔助形圓內接五邊形的第四個有效邊長 $\overline{CA_4}$！還有第一個有效邊長 $V_1\cdot\left[1-\dfrac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]$ 及第三個邊長 V_3 與第五個有效邊長 $V_5\cdot\left[1-\dfrac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]$ 等共同形成新的輔助形圓內接五邊形，始能應用方程式(14)式而導證出難得的方程式(15)式來。

(f) 方程式(15)式的相關性檢驗

(f.1) 仿效三之(二)的[1].標題下(f).的內文，對圓內接五邊形言，有下列 4 關係式；

$$\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)=0 \qquad \text{(g-1)}$$

$$\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)=\sin(\pi+A_2)=-\sin A_2\neq 0 \qquad \text{(g-2)}$$

$$\sin(A_2 + A_3 + A_5 + \theta_2) = 0 \qquad \text{(g-3)}$$

$$\sin(A_2 + A_3 + \theta_2) = \sin(2\pi - A_5) = -\sin A_5 \neq 0 \qquad \text{(g-4)}$$

(f.2) 如果令平面凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 的 5 個頂點共圓，則將上述的(g-1)式、(g-2)式、(g-3)式、(g-4)式等四式一起同時代入方程式(15)式中，(15)式中所有[ ]內的項都將退化成為 1，且 $\dfrac{\sin A_2}{\sin(A_2 + A_3 + \theta_3 + \theta_2)} = \dfrac{\sin A_5}{\sin(A_2 + A_3 + \theta_2)} = -1$，使方程式(15)式蛻變成方程式(13)式，是故方程式(15)式實已涵蓋統一了方程式(13)式，讓(13)式成為(15)式的特例！相關性驗證完成。

[2] 第 2 類圖形如圖 17.，A_1、A_3、A_4共圓而頂點 A_2、A_5皆落於圓的內側；

(a) 對圖 17.的右圖示，應用方程式(14)式可得下列相對應餘弦值關係方程式；$d_{13}d_{14}\cos A_1$

$$= (V_1 + \overline{EA_2})d_{13}\cos\theta_4 + (V_5 + \overline{FA_5})(V_1 + \overline{EA_2})\cos\theta_3 + (V_5 + \overline{FA_5})d_{14}\cos\theta_2 - \frac{1}{d_{13}d_{14}}[$$

$$(V_5 + \overline{FA_5})(V_1 + \overline{EA_2})(d_{13}{}^2 + d_{14}{}^2) + (V_5 + \overline{FA_5})\cdot\overline{EA_3}\cdot V_3 d_{14} +$$

$$(V_1 + \overline{EA_2})\cdot\overline{FA_4}\cdot V_3 d_{13} + \overline{EA_3}\cdot\overline{FA_4}\cdot d_{13}d_{14}] \qquad \text{(14-2)}$$

(b) 仿效三之(二)的[4].標題內文裡所推演出的運算過程並應用其角度表示式；對 ΔEA_3A_2 言，由正弦定理得；$\dfrac{\overline{EA_2}}{\sin(\angle EA_3A_2)} = \dfrac{V_2}{\sin\psi} = \dfrac{\overline{EA_3}}{\sin(\pi - A_2)} \quad \Rightarrow$

$$\overline{EA_2} = -V_2\cdot\frac{\sin(A_3 + \theta_3 + \theta_2)}{\sin(A_2 + A_3 + \theta_3 + \theta_2)} \quad 與 \quad \overline{EA_3} = -V_2\cdot\frac{\sin A_2}{\sin(A_2 + A_3 + \theta_3 + \theta_2)}$$

(c) 對 ΔFA_4A_5 言，由正弦定理；$\dfrac{\overline{FA_5}}{\sin(\angle FA_4A_5)} = \dfrac{V_4}{\sin\phi} = \dfrac{\overline{FA_4}}{\sin(\pi - A_5)} \quad \Rightarrow$

$$\overline{FA_5} = -V_4\cdot\frac{\sin(A_2 + A_3 + A_5 + \theta_2)}{\sin(A_2 + A_3 + \theta_2)} \quad 與 \quad \overline{FA_4} = -V_4\cdot\frac{\sin A_5}{\sin(A_2 + A_3 + \theta_2)}$$

(d) 將得出的線段 $\overline{EA_2}$、$\overline{EA_3}$、$\overline{FA_4}$、$\overline{FA_5}$ 一起同步代入方程式(14-2)式內，再經運算，提出公因式，排列整理，同除公倍式 $V_5V_1d_{13}d_{14}$，最後得方程式(15)式！

[3] 第 3 類圖形如圖 15.，頂點 A_2落於圓的外側且頂點 A_5落於圓的內側；第 4 類圖形如圖 16.，頂點 A_2落於圓的內側且頂點 A_5落於圓的外側；這兩類圖形都能仿效前述第 1、2 類圖形的推理演繹方法而得證出完全相同的方程式(15)式！

參、結論

1. 以上的論述與驗證過程已經翔實完整的探討了四邊形與五邊形的最佳選取方程式圖形類型與方法，最佳選取的要領是需以通過頂角的對角線端點為共圓點的選擇。例如；先取定頂角 A_1，對四邊形言，有對角線 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$，所以選取 A_1、A_3再取旁側緊鄰的一個頂點來形成共圓的三頂點，因有兩個旁側緊鄰頂點勢必選出 2 組相異共圓點，而得證出 2 組相異方程式。對五邊形言，有對角線 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$與 $\overline{A_1A_4}=d_{14}$，所以恰選取 A_1、A_3、A_4形成共圓的三頂點而推演出平面凸五邊形的最佳方程式，巧妙的是這樣選取共圓點竟能得出完全相同的方程式(15)式。
2. 每一個描述圓內接圖形頂角的合分角正弦、餘弦值關係方程式都有 2 式；當要推證一般形圖形頂角的合分角關係方程式時，需先引用圓內接圖形裡的非分式型方程式如(1)式、(6)式、(11)式、(14)式，再配合輔助圖形的線段與角度表示式，並以圓內接四邊形的對角互為補角關係性質，搭配基本的三角形正弦定理，彙集思考、統整理念，始能明確完善的演繹推證出頂角的合分角關係方程式。
3. 真感謝上帝的廣大恩典，使數學家們創造出奇妙作為的數學世界，讓數學能神奇完美的描述解說各類圖形與現象，並且精準完善的提供自然與人為眾多問題的合理解決方案。本文乃作者承續圓內接多邊形頂角的合分角正弦值關係方程式研究後的另一延伸自我發想的探討作品，希望拋出一個研討方向引致共鳴！

參考文獻

李輝濱，平面凸六邊形內中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。**數學傳播季刊，169 期**，2019 年 3 月出版發行。

李輝濱，平面凸七邊形內中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。**科學教育月刊，417 期**，2019 年 4 月出版發行。

李輝濱，平面凸七邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。**科學教育月刊，413 期**，第 31 頁，2018 年 10 月出版發行。

李輝濱，圓內接奇數邊數多邊形的正弦定理。**數學傳播季刊，148 期**，2013 年 12 月。

李輝濱，預測與驗證平面凸多邊形面積公式。**科學教育月刊，398、399 期**，2017 年 5、6 月出版發行。

蔡聰明，**數學拾貝---星空燦爛的數學**，2000，三民書局。

林聰源，**數學史---古典篇**，1995，凡異出版社。

項武義，**基礎幾何學**，2011，五南圖書出版公司。

項武義，**基礎分析學**，2012，五南圖書出版公司。

E.W. Hobson. *A treatise on plane and Advanced trigonometry,* Dover, 1957, .Z.A. Melzek: Invitation to geometry, John Wiley and Sons, 1983 .

【完】