漫談配對

許介彥
大葉大學　電信工程學系

請考慮以下問題：將 A, B, C 三個男生與 a, b, c 三個女生配成三對，每一對皆含一男一女，總共有多少種配法？

我們可以將這個問題看成是要將 a, b, c 等三個字母填入下面三個空格中：

$(A,\ )\quad (B,\ )\quad (C,\ )$

很明顯，塡法有 $3! = 6$ 種。一般而言，將 n 個男生與 n 個女生配對的方法總共有 $n!$ 種。

如果不考慮性別，將 等六人分成三組，每一組兩個人的方法又有幾種呢？先考慮將 A, B, C, D, E, F 等六個字母塡入下面六個空格中：

（ ， ）　（ ， ）　（ ， ）

塡法總共有 $6!$ 種；不過由於我們並不在意同一對括號裡的兩個字母誰前誰後，因此我們必須將 $6!$ 除以 $(2!)(2!)(2!) = (2!)^3$；又由於我們也不在意這三對括號之間的順序，所以還要再除以 $3!$，因此答案爲

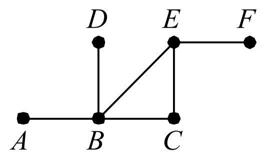
$$\frac{6!}{(2!)^3 3!} = 15 \text{ 種。}$$

一般而言，將 mn 個人分成 n 組，每一組含 m 個人的方法有

$$\frac{(mn)!}{(m!)^n n!} \text{ 種。}$$

附帶條件的配對

如果每個人只願意與自己喜歡的人配對，情況又有所不同；下圖中我們用一個「圖」（graph）表示了某六人 A, B, C, D, E, F 之間的關係，其中每條線（edge）的兩個端點（vertex）爲互相願意配對的兩個人，例如下圖顯示 A 只願意與 B 配對，而 B 願意與 A, C, D, E 四人之一配對等：



由上圖不難看出此時我們甚至連要爲這六人找到任意一種讓大家都可接受的配對都辦不到；由圖中可知 A 與 D 同樣都只鍾情於 B，但是 B 分身乏術，他頂多只能與其中一人配對。

從圖的觀點來說，將 $2n$ 個人（ $2n$ 個點）配成 n 對相當於是在圖中選出 n 條線使得這 n 條線當中沒有任何兩條線有共同的端點；數學上通常將符合此要求的 n 條線稱爲此圖的一個「完全配對」（complete matching，或稱 perfect matching）。上面的六個人由於無法配成三對，因此上圖不存在完全配對。

上圖中，A 只與一條線相連，而 B 則與四條線相連。在一個圖中，當一個點與

d 條線相連，我們說這個點的「價數」（degree，或稱 valency）爲 d。因此上圖中 A, B, C, D, E, F 六個點的價數分別爲 1, 4, 2, 1, 3, 1。我們通常用 $\deg(u)$ 來表示某點 u 的價數，因此上圖中 $\deg(A)=1$, $\deg(B)=4$ 等。

完全配對的充分條件

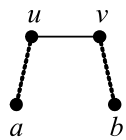
上述六個人之間不存在完全配對的原因大致上說起來是因爲每個人願意配對的人數太少了（選擇伴侶的條件太「苛」了），以圖形來說就是每個點的價數太小了；如果每個人都願意將擇偶標準放寬，六人間存在完全配對的可能性顯然將會提高。

以下我們將証明：在一個含有 $2n$ 個點的圖中，如果每個點的價數都不小於 n，此圖必定存在完全配對。

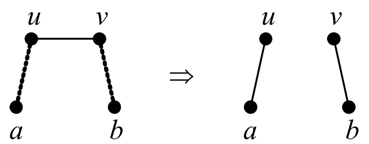
假設我們已經在圖中配成了 r 對（即已選出了 r 條線）而且 $r<n$，以下我們將說明我們必可使配成的對數增爲 $r+1$ 對。

如果還未被選中的點（這樣的點有 $2n-2r$ 個）中有某兩個點之間有一條線相連，這兩個點顯然就能做爲第 $r+1$ 對；我們以下只討論還未被選中的點之間都互不相連的情形（也就是還未被選中的點都只與已被選中的點相連）。

假設 a 與 b 是任意兩個還未被選中的點，以下我們將說明：在已被選中的 r 條線當中必定存在某條線（如下圖中連接 u 與 v 的線）其端點之一有線與 a 相連而另一個端點有線與 b 相連：



如果真是如此，我們只要將 u 與 v 的配對取消，將 u 改與 a 配對，將 v 改與 b 配對，就可以讓圖中已配成的對數由 r 對增爲 $r+1$ 對了：



這樣的 u 與 v 一定存在，因爲如果不存在，那麼對任意一條已被選中的線（假設端點爲 x 與 y）而言，a 與 x、a 與 y、b 與 x、b 與 y 等四條可能的連線中最多只有兩條實際出現於圖中，因此 a 和 b 合起來與已被選中的 $2r$ 個點之間最多只有 $2r$（$<2n$）條線相連，也就是說，$\deg(a)+\deg(b)\le 2r$，這與已知事實不符，因爲 $\deg(a)$ 和 $\deg(b)$ 已知都不小於 n。証明完畢。

上面的証明屬於「建構性証明」（constructive proof）；只要每個點的價數都不小於 n，我們不難由上面的作法將完全配對實際找出來。

男女有別的配對

$ABCDE$ 等五個男生與 $abcde$ 等五個女生進行婚友聯誼，以下是每個男生所願意交往的女生名單：

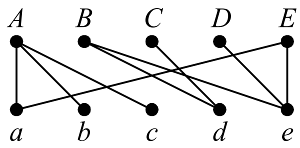
$A:\{a,b,c\}$，　$B:\{d,e\}$，　$C:\{d\}$，

$D:\{e\}$，　　$E:\{a,e\}$.

我們想問：是否有可能將每個男生與一個他所願意交往的女生湊成一對？（每個人最多只能與一個人交往）

答案是否定的。由上面的資訊看來，B,C,D 三個男生合起來只願意與 d 和 e 兩個女生交往，女生人數顯然太少了；要和三個男生進行一對一配對，女生最少也須有三個。

我們還是可以將這個問題轉化成圖形的問題，如下圖所示，此時相當於要在下圖中找出五條相互間沒有共同端點的線。



上圖所含的 10 個點所成的集合 V = $\{A, B, C, D, E, a, b, c, d, e\}$ 滿足以下性質：V 可被分割成兩個集合 X 與 Y 使得圖中每條線的兩個端點分別屬於 X 與 Y。以此例來說，如果我們將 V 分割成 $X=\{A,B,C,D,E\}$ 及 $Y=\{a,b,c,d,e\}$ 即可滿足上述性質。當一個圖中所有的點所成的集合滿足上述性質，述語上稱此圖為一個「二裂圖」(bipartite graph)，而 X 與 Y 則稱為此圖的 partite sets。

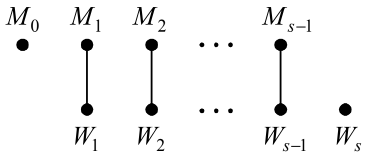
有一個性質相當明顯：當 n 個男生與 n 個女生之間存有完全配對，對任意 k（$1 \le k \le n$）個男生而言，這 k 個男生合起來所願意交往的女生至少也須有 k 個，否則這 k 個男生的配對是不可能達成的，更遑論全部 n 個男生的配對；這是存在完全配對的一個必要條件（necessary condition）。令人訝異的是，它同時也是存在完全配對的充分條件（sufficient condition），也就是說，對 $k=1,2,\ldots,n$，只要任意 k 個男生合起來所願意交往的女生都不少於 k 個，那麼完全配對就一定能達成。以下我們証明此性質。

假設我們已經為 r 個男生完成了配對而且 $r<n$，以下我們將說明我們必可使達成配對的對數增為 $r+1$ 對。

如果還未被配對的男生中有某個男生願意與一個還未被配對的女生交往，這兩人顯然就能做為第 $r+1$ 對；以下我們只討論所有出現於還未被配對的男生所列出的名單中的女生都已被配對的情形。

假設 M_0 是任意一個還未被配對的男生，以下我們將透過一連串步驟來找到一個還未被配對的女生。首先，由已知條件可知 M_0 所列出的名單中至少會包含一個女生；假設某女生 W_1 出現於 M_0 的名單內，而且 W_1 已與另一個男生 M_1 配對；根據已知條件，M_0 與 M_1 兩個男生合起來所願意交往的女生至少會有兩個，因此除了 W_1 之外還會有至少一個女生 W_2；如果 W_2 還未被配對，尋找過程即告結束；如果 W_2 已與另一個男生 M_2 配對，根據已知條件，M_0,M_1,M_2 三個男生合起來所願意交往的女生除了 W_1 與 W_2 之外還會有至少一個女生 W_3；如果 W_3 還未被配對，尋找過程即告結束；如果 W_3 已與另一個男生 M_3 配

對，我們重複上述步驟直到找到一個還未被配對的女生 W_s 為止：



上述尋找過程中的每個女生 W_i 都出現於某個男生 M_j（$j<i$）的名單中。當我們找到 W_s 後，我們將 W_s 與任意一個曾經出現於上述過程且願意與 W_s 交往的男生 M_i 配對（$i<s$）。如果 $i=0$，在我們將 W_s 與 M_0 配對後工作已結束。如果 $i\geq 1$，我們取消 M_i 與 W_i 的配對，讓 W_i「重獲自由」。接著將 W_i 與一個曾經出現於上述過程且願意與 W_i 交往的男生 M_j 配對（$j<i$），讓 W_j 重獲自由。若重複此步驟，被重新配對的男生與女生的編號將分別持續減小，我們最後必能讓某個重獲自由的女生與最前面的 M_0 配對，使得達成配對的對數增為 $r+1$ 對。証明完畢。

上面的証明同樣是建構性証明，同樣能發展出一個可用來實際為所有男生找到對象的演算法。

因此 n 個男生與 n 個女生之間存在完全配對的充要條件為：任意 k 個男生合起來所願意交往的女生人數都不少於 k 個（對 $k=1,2,\ldots,n$ 皆須成立）；這個定理稱作「結婚定理」（marriage theorem），其基本觀念是由英國數學家 Phillip Hall 於 1935 年提出的，因此又常被稱作 Hall’s theorem，而上述充要條件則稱為 Hall’s condition。

請留意上面的証明過程中，如果我們只在意每個男生都找得到對象而不在意每個女生是否都有對象，那麼女生的總人數可以大於或等於 n。當然，如果女生人數大於 n，勢必會有女生無法被配對。

結婚定理的其他形式

Hall’s theorem 有好幾種不同的描述方式，利用男生和女生間的關係來描述只是其中之一，另一種方式是純粹透過集合來描述，例如考慮下面六個集合：

$A_1=\{a, c\}$, $A_4=\{b, d, f, g\}$,
$A_2=\{b, c\}$, $A_5=\{a, e\}$,
$A_3=\{a, c, d, e\}$, $A_6=\{a, b\}$.

請問：是否有可能從每個集合中各選出一個元素而且所有被選出的六個元素皆相異？

我們可以將這個問題看成是六個男生 $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$ 與女生的配對，其中的 A_1 願意與女生 a 與 c 配對，A_2 願意與女生 b 與 c 配對等。因此這個問題與前面的男女配對問題在本質上並無不同。

這個例子也可以重新包裝如下：$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 是六個社團，其中 A_1 有 a 與 c 兩名社員，A_2 有 b 與 c 兩名社員等，而我們希望知道是否有可能讓每個社團各派出一名代表，而且沒有任何兩個社團所派出的代表為同一人。以此例而言，(c,b,d,g,e,a) 即為一組可能的代表，也就是 A_1 派出 c，A_2 派出 b 等。述語上將 (c,b,d,g,e,a) 稱為集合 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 的一個可能的 SDR（system of distinct representatives）。

有了以上概念，我們可以用集合的語言將 Hall’s theorem 重新描述如下：$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 等 n 個集合存在 SDR 的充要條件為：對任意 $I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$，下式都成立：

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \geq |I|.$$

Hall’s theorem 還可以透過矩陣來描述；例如我們可以將剛才的六個集合所含的資訊整理於下面的 6×7 矩陣中：

	a	b	c	d	e	f	g
A_1	1	0	1	0	0	0	0
A_2	0	1	1	0	0	0	0
A_3	1	0	1	1	1	0	0
A_4	0	1	0	1	0	1	1
A_5	1	0	0	0	1	0	0
A_6	1	1	0	0	0	0	0

此時我們的問題是：有沒有可能從矩陣的每一列挑出一個 1 而且所有被挑出來的 1 中沒有任何兩個 1 位於同一行？對一個由 0 和 1 組成的 $m\times n$ 矩陣而言，可從矩陣的每一列挑出一個 1 而且所有被挑出來的 m 個 1 中沒有任何兩個 1 位於同一行的充要條件為：矩陣的任意 k 列合起來都在至少 k 行有 1。

另一種常見的描述方式則是以工作的分配為場景，例如 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 等六人中，A_1 有能力獨力完成 a 與 c 兩項工作，A_2 有能力獨力完成 b 與 c 兩項工作等，那麼每個人可被指派完成一項工作而且沒有任何兩人被指派到相同工作的充要條件為：任意 k 人有能力完成的工作合起來至少有 k 項。

在拉丁方陣的應用

一個 $n\times n$ 矩陣中，如果每一列都是 $1,2,\ldots,n$ 等 n 個數的一個排列，每一行也都是 $1,2,\ldots,n$ 等 n 個數的一個排列，我們稱這個矩陣為一個「拉丁方陣」（Latin square）。（事實上，數學上的拉丁方陣不限於由數字組成，不過本文為了討論方便作此假設。）

舉例來說，下面是 n 的值分別為 2、3、4 的三個拉丁方陣：

1	2
2	1

3	2	1
1	3	2
2	1	3

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

一個 $r\times n$（$1 \leq r \leq n$）矩陣中，如果每一列的都是 $1,2,\ldots,n$ 等 n 個數的一個排列，而且每一行的 r 個數中沒有任何兩數相同，我們稱這個矩陣為一個「拉丁矩陣」（Latin rectangle）。舉例來說，下面是一個 2×4的拉丁矩陣（請注意此矩陣可由上面的 4×4 拉丁方陣的最下面兩列刪除而得）：

1	2	3	4
3	4	1	2

對任意一個拉丁方陣，如果我們將它的某幾列刪除，所得顯然必定是一個拉丁矩陣；反過來就沒那麼明顯了：對任意一個拉丁矩陣，我們是否一定能為它新增幾列而將它擴充成一個拉丁方陣呢？以下我們將証明答案是肯定的；我們將証明：對

任意一個大小爲 $r\times n$（$r<n$）的拉丁矩陣，我們必能爲它新增一列使得結果爲一個 $(r+1)\times n$ 的拉丁矩陣。

要爲一個 $r\times n$ 拉丁矩陣增加一列也就是要爲每一行的 r 個數再增加一個數。對 $i=1,2,\ldots,n$，我們定義 S_i 爲 $1,2,\ldots,n$ 等 n 個數中尚未出現於矩陣的第 i 行的數所成的集合。以剛才看過的 2×4 拉丁矩陣爲例，$S_1=S_3=\{2,4\}$，而 $S_2=S_4=\{1,3\}$。以下我們將証明：$S_1,S_2,\ldots,S_n$ 等 n 個集合必存在 SDR；果真如此，其任意一個 SDR 自然可以用來做爲矩陣的第 $r+1$ 列。

採歸謬証法；假設 $S_1,S_2,\ldots,S_n$ 等 n 個集合不存在 SDR。根據 Hall’s theorem，這 n 個集合中必有某 k（$k\le n$）個集合的聯集的元素個數少於 k。由於每個集合 S_i 都含有 $n-r$ 個數，這 k 個集合中總共有 $k(n-r)$ 個數（允許相同的數被重複計算的話）；一個數在這 $k(n-r)$ 個數中最多有可能被重複算了幾次呢？由於由 1 至 n 的每個數在 $S_1,S_2,\ldots,S_n$ 中各會出現 $n-r$ 次，因此任何一個數在 $S_1,S_2,\ldots,S_n$ 的任意 k 個集合中最多只能出現 $n-r$ 次，我們由此推知在上述 $k(n-r)$ 個數中至少將含有

$$\left\lceil \frac{k(n-r)}{n-r} \right\rceil = k$$

個不同的數，但這與這 k 個集合的聯集的元素個數少於 k 矛盾。証明完畢。

一個有趣的性質

以下我們將証明：如果一個二裂圖的每個點的價數都等於 k（k 可爲任意正整數），則此圖必存在完全配對。

以男女關係來說，我們相當於要証明：在一群男生和女生中，如果每個男生都願意與 k 個女生交往而且每個女生都願意與 k 個男生交往，那麼每個人都可被配對。

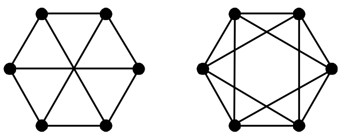
我們將先說明男生人數與女生人數一定相等（即 $|X|=|Y|$，X 與 Y 如前所述，爲圖形的 partite sets），然後說明所對應的圖形滿足 Hall’s condition。

先說明人數相等。由於每條線的兩個端點分別爲 X 與 Y 中的點，因此與 X 中的點相連的線的總數一定會等於與 Y 中的點相連的線的總數，也就是 $k|X|=k|Y|$，得 $|X|=|Y|$。

接著說明圖形滿足 Hall’s condition。假設 S 爲 X 的任意一個部分集合；我們將集合 Y 中所有與 S 中的點相連的點所成的集合記作 $N(S)$，我們希望能夠証明 $|S|\le|N(S)|$。

由於所有與 S 中的點相連的線（總共有 $k|S|$ 條）都與 $N(S)$ 中的點相連，因此整個圖中與 $N(S)$ 中的點相連的線至少有 $k|S|$ 條（$N(S)$ 中的點也有可能與不在 S 中的點相連）；由於整個圖中與 $N(S)$ 中的點相連的線總共有 $k|N(S)|$ 條，因此 $k|N(S)|\ge k|S|$，得 $|N(S)|\ge|S|$。証明完畢。

當一個圖的每個點的價數都等於 k，術語上稱此圖爲一個 k-regular graph；例如下面兩個圖分別爲 3-regular 與 4-regular：

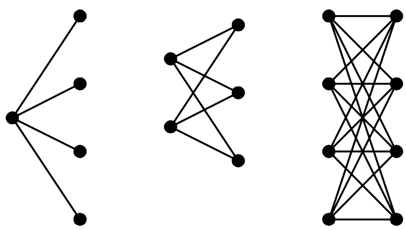


因此我們剛才可以說証明了「每個 k-regular bipartite graph 都存在完全配對」（k 可為任意正整數）。一般而言，當一個圖存在完全配對，我們可將圖中的某些線剔除使得剩下的圖為 1-regular。

結語

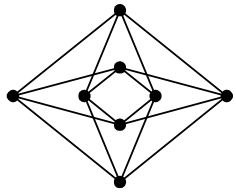
二裂圖也可以定義為：每個點可被塗成紅色或藍色使得圖中每條線的兩個端點顏色皆相異的圖。

當一個二裂圖的任意兩個顏色相異的點都有線相連，我們稱此圖為一個 complete bipartite graph，一般記作 $K_{m,n}$，其中的 m 與 n 為紅點與藍點的個數（也就是前面的定義方式中的 $|X|$ 與 $|Y|$）。下面是三個 complete bipartite graph 的例子：



$K_{1,4}$　　$K_{2,3}$　　$K_{4,4}$

由於同一個圖常可以有許多種畫法，因此當我們畫一個二裂圖時不見得要將所有的點分成左右兩邊或上下兩邊，例如下圖也是一個二裂圖（事實上它與上面的 $K_{4,4}$ 同構）：



當一個二裂圖不滿足 Hall's condition 時，我們固然知道無法為每個點配對，在應用上此時我們常會希望知道最多能配成幾對，並且希望能有效率地將這些配對實際找出來；這些問題經過數學家及電腦科學家的研究之後已有快速的演算法可以解決。

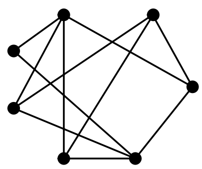
由男女的擇偶到工作的指派，相信您不難感受到 Hall's theorem 除了在觀念上有趣外，它的應用範圍還相當廣泛，甚至在實際生活上也用得到。

練習題

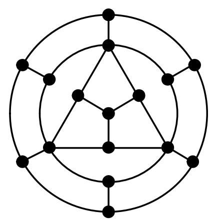
以下是幾個與本文相關的問題，提供讀者參考。

1.判斷下面兩個圖分別是否為二裂圖。

(a)



(b)



2.畫出一個含有 10 個點而且每個點的價數都不小於 4 而且不存在完全配對的圖。

3.將一副洗好的撲克牌（總共 52 張）任意排成一個 4×13 矩陣，試証：我們一定可從每一行選出一張牌使得所選出來的全

部 13 張牌包含了 A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K 各一張。

4.試証：在一群男生和女生中，如果每個男生都認識至少 k 個女生而且每個女生都被至多 k 個男生認識（k 為任意正整數），那麼這群人中的每個男生都可與某個他所認識的女生達成配對。

5.試証：在 n 個男生和 n 個女生中，如果任意 k 個男生合起來都認識至少 k 個女生（對 $k=1,2,\ldots,n$ 皆成立），那麼對任意 k 個女生而言，她們合起來一定被至少 k 個男生認識。

6.已知 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 等 n 個集合都是集合 $S=\{1,2,\ldots,n\}$ 的部分集合，其中每個 A_i 都含有正好 r 個元素（r 為某個小於 n 的正整數），而且 S 的每個元素都出現於正好 r 個 A_i 中。試証：$A_1,A_2,\ldots,A_n$ 必存在 SDR。

參考資料

1.許介彥（2005），數學悠哉遊，第 14 章，三民書局。

2.D. B. West, Introduction to Graph Theory, 2nd edition, Prentice-Hall, 2001.

（上承第 50 頁）

球上生物總體的活動可以使地球上的溫度及化學組成等環境因子維持動態的平衡，但人類在地球環境中的活動，的確扮演著關鍵性的角色。近年來，大氣中二氧化碳濃度的增加，氣候的變遷、外來種生物入侵、生物多樣性的改變、乃至於 SARS、禽流感等病毒威脅人類的生命安全，都引起社會廣大的關注。

本文討論高中學生在「人類與環境」單元中應發展之概念及培養之能力，先分析比較舊教材中相關內容之異同，再以九十五學年度將實施之課程暫行綱要為依據，提出本單元應有內容之建議，希望能提供教科書編輯的參考。

六、參考文獻

1.寂靜的春天。瑞秋・卡森/著。李文昭/譯。晨星。

2.沙郡年記。阿爾多・李奧波/著。吳美真/譯。天下文化。

3.生物圈的未來。威爾森著。楊玉齡/譯。天下文化。

4.蓋婭-大地之母：地球是活的！。洛夫洛克/著。金恆鑣/譯。天下文化。

5.生命聚寶盆。趙榮台/著。幼獅文化。