

由牛頓力學看對稱陀螺的運動

蔡尚芳

國立臺灣大學 物理系

摘要

本文利用牛頓力學中的一些基本概念與守恆定律，分析支點在對稱軸上的陀螺，在重力下的進動與章動問題。除了導出對稱陀螺出現正規進動須滿足的條件外，也經由平面圓周運動的相關公式與概念，說明為何重心不低於支點時，陀螺繞對稱軸轉動的角速度，必須夠快才有可能出現正規進動。此外，本文也說明，陀螺繞其對稱軸和繞空間鉛直軸的轉動，對維持進動與章動，其影響究竟有什麼不同，以及在重力作用下，為何陀螺的章動運動具有穩定性，其對稱軸能保持在一定的極角範圍內，在每次下降後又能夠重新上升。

一般剛體的轉動運動，由於較為複雜，在高中物理或大學普通物理學課程中，很少被列為正式或參考的教材，但對稱陀螺的轉動運動，其實簡單許多，只要能夠掌握一些高中與大一的數學知識，如微分與向量的基本概念與運算規則，並利用總力學能守恆定律，與力矩必等於角動量時變率的定律，就可以了解。由於觀察到的陀螺轉動現象，與直覺有相當的出入，高中與大學生通常對這個問題也頗感興趣，可惜一般的理論力學教科書，在討論陀螺的轉動運動時，通常多半利用轉動參考座標系、尤拉方程式或拉格朗日方程式，不僅牽涉到較高深的數學與物理知識，且所採用的解法，往往過分強調解題技巧的一般性，反而不容易瞭解陀螺在重力作用下，何以不會倒下的道理。至於陀螺的對稱軸，為何能在到達低點後又再上升，而陀螺繞對稱軸的轉動速度，為何必須快到一定的程度，才有可能出現正規進動，通常也不會被當作討論的重點，自然也就不會強調

陀螺繞其對稱軸和繞空間鉛直軸的轉動運動，扮演的角色究竟有什麼不同。

本文利用牛頓力學中有關轉動運動的一些基本概念與定律，分析在重力下陀螺繞其對稱軸上一固定支點的轉動運動，說明在何種特殊情況下，對稱陀螺會出現正規進動(或稱旋進)，亦即陀螺重心保持相同的高度，在水平面做等速圓周運動，也說明為何重心不低於支點時，陀螺繞對稱軸轉動的角速度，必須夠快才可能出現正規進動，以及在一般情況下，陀螺的章動運動為何具穩定性，其對稱軸可以在一定的角度範圍內反覆升降，不會倒下。

(一) 牛頓力學中的基本運動定律

考慮一個支點固定於 O 點的陀螺，取此支點為慣性座標系 xyz 的原點，並將此陀螺當作是一個由多個質點組成的剛體。假設此剛體第 i 個組成質點的質量為 m_i ，而在座標系 xyz 中(參見圖 1)，此質點之位置向量、速度與所受的力分別為 \vec{r}_i 、 \vec{v}_i 與 \vec{F}_i ，則由牛頓第二

運動定律得

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \vec{F}_i \quad (1)$$

若此陀螺之總質量為 M ，質心 C 的位置向量為 \vec{r}_c ，則依定義可得

$$M = \sum_i m_i \quad (2)$$

$$M \vec{r}_c = \sum_i m_i \vec{r}_i \quad (3)$$

以原點(即支點) O 為參考點時，陀螺所受之總力矩 $\vec{\tau}$ ，等於(1)式中所有的力 \vec{F}_i 對此支點之力矩和。因質點間相互作用之內力，一般均屬空間等向性的守恆力，其力矩總和為零，而作用於支點之外力(即支撐力)，因力臂為零，其力矩亦為零，故陀螺僅受來自重力之力矩，利用式(3)可得

$$\vec{\tau} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{g}) = \vec{r}_c \times M \vec{g} \quad (4)$$

上式中 \vec{g} 為重力加速度。

此陀螺相對於支點之總角動量 \vec{L} ，依定義為

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) \quad (5)$$

由式(1)可得各質點之角動量時變率等於其所受之力矩，即

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (6)$$

由式(4)、(5)、(6)可得以下兩式：

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \vec{\tau} \quad (7)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{r}_c \times M \vec{g} \quad (8)$$

上式顯示以支點為參考點時，陀螺之總角動量的時變率等於來自重力之總力矩。

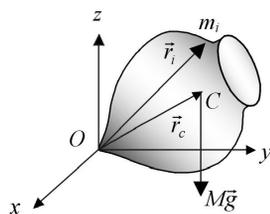


圖 1

(二) 一般陀螺繞支點轉動之角速度、角動量、動能與重力位能

圖 2a 中之 1、2、3 軸，互相垂直，且均固定於陀螺上，此三軸之單位向量 \hat{e}_1 、 \hat{e}_2 、 \hat{e}_3 ，分別代表以支點為參考點時，陀螺轉動慣量三個主軸的方向。當陀螺繞支點轉動時，其角速度 $\vec{\omega}$ 可表示為

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3 \quad (9)$$

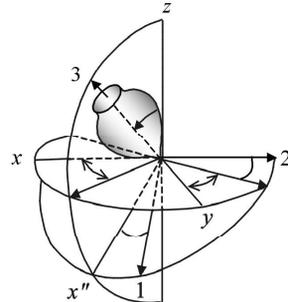


圖 2a

若陀螺繞主軸 1、2、3 的轉動慣量分別為 I_1 、 I_2 、 I_3 ，則其相對於支點之總角動量 \vec{L} 可表示為

$$\begin{aligned} \vec{L} &= L_1 \hat{e}_1 + L_2 \hat{e}_2 + L_3 \hat{e}_3 \\ &= I_1 \omega_1 \hat{e}_1 + I_2 \omega_2 \hat{e}_2 + I_3 \omega_3 \hat{e}_3 \end{aligned} \quad (10a)$$

而陀螺的動能則為

$$K = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega} \quad (10b)$$

若陀螺重心位於 $z = 0$ 的平面時，其重力位能 U 為零，則位能 U 的一般式可寫為

$$U = -M \vec{g} \cdot \vec{r}_c \quad (10c)$$

(三) 一般陀螺的守恆定律

若以 \hat{x} 、 \hat{y} 、 \hat{z} 代表沿 x 、 y 、 z 座標軸之單位向量時，則 \vec{g} 與 $-\hat{z}$ 平行，故由式(8)可看出總角動量的分量 L_z 必守恆，即其時變率為零：

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d(\vec{L} \cdot \hat{z})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \hat{z} = \vec{r}_c \times M \vec{g} \cdot \hat{z} = 0 \quad (11a)$$

陀螺之總力學能 E 為總動能 K 與位能 U 之

和，因支點固定，作用於支點之支撐力對陀螺不做功，故陀螺之總力學能 E 守恆。由式(10b)與(10c)得

$$E = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega} - M\vec{g} \cdot \vec{r}_c = \text{常數} \quad (11b)$$

(四) 一般陀螺繞支點轉動之尤拉角

由圖 2b 可得在圓柱座標系中，沿 ρ 、 ϕ 、 z 座標軸之單位向量 $\hat{\rho}$ 、 $\hat{\phi}$ 、 \hat{z} ，須滿足以下之關係：

$$\hat{\rho} = \hat{\phi} \times \hat{z} = \cos\phi \hat{x} + \sin\phi \hat{y} \quad (12a)$$

$$\hat{\phi} = \hat{z} \times \hat{\rho} = -\sin\phi \hat{x} + \cos\phi \hat{y} \quad (12b)$$

$$\hat{z} = \hat{\rho} \times \hat{\phi} \quad (12c)$$

三度空間中之 x 、 y 、 z 軸，經三次轉動後，可與陀螺之 1、2、3 軸完全重合。此過程中之轉角，稱為尤拉角。力學中較常採用的尤拉角定義，有以下介紹之 y 制與 x 制。

(甲) y 制尤拉角

在此制中，3 軸在空間座標系 xyz 中之極角為 θ ，方位角為 ϕ ，如圖 2b 所示，故得

$$\hat{e}_1 = \sin\psi \hat{\phi} + \cos\psi (-\sin\theta \hat{z} + \cos\theta \hat{\rho}) \quad (13a)$$

$$\hat{e}_2 = \cos\psi \hat{\phi} - \sin\psi (-\sin\theta \hat{z} + \cos\theta \hat{\rho}) \quad (13b)$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_3 &= \sin\theta(\cos\phi \hat{x} + \sin\phi \hat{y}) + \cos\theta \hat{z} \\ &= \sin\theta \hat{\rho} + \cos\theta \hat{z} \end{aligned} \quad (13c)$$

在 y 制中之轉角與轉動次序如下(見圖 2b)：先繞 z 軸旋轉 ϕ 角，直到 x 軸轉至 $\hat{\rho}$ 方向。其次以旋轉後之 y 軸(即圖 2b 中之 $\hat{\phi}$ 方向)為轉軸，旋轉 θ 角，使 z 軸轉至 3 軸位置， $\hat{\rho}$ 向量轉至圖 2 中 $\hat{\theta}$ 向量之位置。最後再繞 3 軸旋轉 ψ 角，使 $\hat{\theta}$ 向量轉至 1 軸位置。

如圖 2b 所示， $\hat{\theta}$ 、 $\hat{\phi}$ 、 \hat{e}_3 為一右手制正交座標系的三個單位向量，故由式(13c)、(12a)與(12c)可得

$$\hat{\theta} = \hat{\phi} \times \hat{e}_3 = -\sin\theta \hat{z} + \cos\theta \hat{\rho}$$

$$\hat{\phi} = e_3 \times \hat{\theta} \quad (14a)$$

而由圖 2b，或由式(13c)與(14a)，可得

$$\hat{\rho} = \cos\theta \hat{\theta} + \sin\theta \hat{e}_3, \hat{z} = -\sin\theta \hat{\theta} + \cos\theta \hat{e}_3 \quad (14b)$$

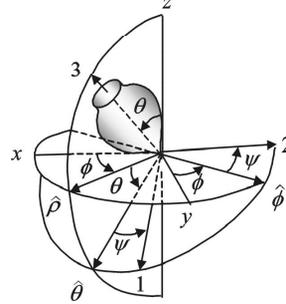


圖 2b

採用 y 制時，3 軸之極角 θ 與方位角 ϕ 隨時間之變化，分別對應於陀螺之章動與進動的角速度，因此與實際觀察到之陀螺轉動運動直接比較時，此制相當方便。利用式(14b)，可將式(13a)與(13b)中之 1、2 軸的單位向量改用下式表示：

$$\hat{e}_1 = \sin\psi \hat{\phi} + \cos\psi \hat{\theta}, \hat{e}_2 = \cos\psi \hat{\phi} - \sin\psi \hat{\theta} \quad (14c)$$

(乙) x 制尤拉角

在 x 制中，轉角與轉動次序如圖 3 所示。此制之轉動順序如下：先使空間座標系繞 z 軸旋轉 ϕ 角，其次以旋轉後之 x 軸(即圖 2 中之 $\hat{\rho}$ 方向)為轉軸，旋轉 θ 角，使 z 軸轉至 3 軸位置，最後再繞 3 軸旋轉 ψ 角，使 x 軸轉至 1 軸位置。

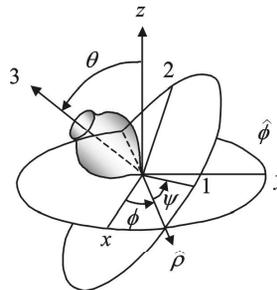


圖 3

在 x 制中，1、2、3 軸的單位向量可表示如下：

$$\begin{aligned}\hat{e}_3 &= \sin\theta\sin\phi\hat{x} - \sin\theta\cos\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z} \\ &= -\sin\theta\hat{\phi} + \cos\theta\hat{z}\end{aligned}\quad (15a)$$

$$\begin{aligned}\hat{e}_1 &= \cos\psi\hat{\rho} + \sin\psi\hat{e}_3 \times \hat{\rho} \\ &= \cos\psi\hat{\rho} + \sin\psi(\sin\theta\hat{z} + \cos\theta\hat{\phi})\end{aligned}\quad (15b)$$

$$\begin{aligned}\hat{e}_2 &= \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 \\ &= -\sin\psi\hat{\rho} + \cos\psi(\sin\theta\hat{z} + \cos\theta\hat{\phi})\end{aligned}\quad (15c)$$

比較式(13a)-(13c)與式(15a)-(15c)，可看出 x 制之任何結果，均可由 y 制之公式，利用以下之角度轉換獲得：

$$\theta \rightarrow \theta, \quad \phi \rightarrow \phi - \frac{\pi}{2}, \quad \psi \rightarrow \psi + \frac{\pi}{2}\quad (16)$$

故以下之討論與所得結果，只使用 y 制。

(五) 一般陀螺繞支點轉動之角速度

本文中為簡化符號，有時將代表角度之符號冠以一或二點，以表示對時間之一次或二次微分，例如 $\dot{\phi}$ 與 $\ddot{\phi}$ 分別代表 ϕ 對時間 t 之一次與二次微分。

依以上(四)(甲)中所述，在 y 制中，陀螺在 Δt 之時間內，繞 \hat{z} 、 $\hat{\phi}$ 、 \hat{e}_3 軸旋轉之角度分別為 $\Delta\phi$ 、 $\Delta\theta$ 、 $\Delta\psi$ ，故可得知陀螺轉動之瞬時角速度為

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\Delta\phi\hat{z} + \Delta\theta\hat{\phi} + \Delta\psi\hat{e}_3) \\ &= \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\theta}\hat{\phi} + \dot{\psi}\hat{e}_3\end{aligned}\quad (17a)$$

利用式(13a) - (13c)，可由上式求得角速度沿 1、2、3 軸之分量為

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \hat{e}_1 \cdot \vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{e}_1 \cdot \hat{z} + \dot{\theta}\hat{e}_1 \cdot \hat{\phi} \\ &= -\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi\end{aligned}\quad (18a)$$

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \hat{e}_2 \cdot \vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{e}_2 \cdot \hat{z} + \dot{\theta}\hat{e}_2 \cdot \hat{\phi} \\ &= \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\end{aligned}\quad (18b)$$

$$\begin{aligned}\omega_3 &= \hat{e}_3 \cdot \vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{e}_3 \cdot \hat{z} + \dot{\psi}\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 \\ &= \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\end{aligned}\quad (18c)$$

角速度亦可用其它互相垂直的三個分量表示，例如在式(17a)中，將 \hat{z} 依式(14b)之結果改用 $\hat{\theta}$ 與 \hat{e}_3 表示，則可得

$$\vec{\omega} = -\dot{\phi}\sin\theta\hat{\theta} + \dot{\theta}\hat{\phi} + (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\hat{e}_3\quad (19a)$$

故得角速度沿 $\hat{\theta}$ 、 $\hat{\phi}$ 、 \hat{e}_3 三個正交軸之分量為

$$\omega_{\theta} = \hat{\theta} \cdot \vec{\omega} = -\dot{\phi}\sin\theta\quad (19b)$$

$$\omega_{\phi} = \hat{\phi} \cdot \vec{\omega} = \dot{\theta}\quad (19c)$$

$$\omega_3 = \hat{e}_3 \cdot \vec{\omega} = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\quad (19d)$$

式(19d)與(18c)的結果顯然是相同的。

(六) 對稱陀螺之動能、重力位能與總角動量

以下考慮的是具旋轉對稱軸之陀螺，在重力作用下，繞其對稱軸上一固定支撐點的轉動運動。在此情況下，可取陀螺之對稱軸為 3 軸，因重心必在對稱軸上，故式(10c)之重力位能 U 公式，可表示為

$$U = Mg\hat{z} \cdot r_c \hat{e}_3 = Mgr_c \cos\theta\quad (20a)$$

而由對稱觀點，繞 1 軸與 2 軸的轉動慣量必相等，即 $I_1 = I_2$ ，故由式(10a)與(14c)可得對稱陀螺之總角動量為

$$\begin{aligned}\vec{L} &= I_1(\omega_1\hat{e}_1 + \omega_2\hat{e}_2) + I_3\omega_3\hat{e}_3 \\ &= I_1(\omega_1\cos\psi - \omega_2\sin\psi)\hat{\theta} \\ &\quad + I_1(\omega_1\sin\psi + \omega_2\cos\psi)\hat{\phi} + I_3\omega_3\hat{e}_3\end{aligned}\quad (20b)$$

將式(18a) - (18b)之結果代入上式後可得

$$\begin{aligned}\vec{L} &= -I_1\dot{\phi}\sin\theta\hat{\theta} + I_1\dot{\theta}\hat{\phi} + I_3\omega_3\hat{e}_3 \\ &= I_1\omega_{\theta}\hat{\theta} + I_1\omega_{\phi}\hat{\phi} + I_3\omega_3\hat{e}_3\end{aligned}\quad (20c)$$

上式中最後一個等式，是利用式(19b)-(19c)之角速度公式得到的。

將式(19a)與(20c)之結果代入式(10b)，可求得對稱陀螺之總動能 K 為

$$K = \frac{1}{2}\vec{L} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2}I_1(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2$$

$$= \frac{1}{2} I_1 (\omega_{\hat{\theta}}^2 + \omega_{\hat{\phi}}^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \quad (21a)$$

由式(11a)，知對稱陀螺總角動量的分量

L_z 必守恆。故依式(20c)與(14b)得

$$\begin{aligned} L_z &= \hat{z} \cdot \vec{L} = -I_1 \dot{\phi} \sin \theta \hat{z} \cdot \hat{\theta} + I_3 \omega_3 \hat{z} \cdot \hat{e}_3 \\ &= I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 \omega_3 \cos \theta = \text{常數} \end{aligned} \quad (22a)$$

而由式(11b)，知對稱陀螺之總力學能 E

守恆，故由式(20a)與(21a)得

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) \\ &+ \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 + Mgr_c \cos \theta = \text{常數} \end{aligned} \quad (22b)$$

(七) 單位向量的時變率

由式(12a)、(12b)與(14b)可得

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\phi}}{dt} &= -\dot{\phi}(\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}) \\ &= -\dot{\phi} \hat{\rho} = -\dot{\phi}(\cos \theta \hat{\theta} + \sin \theta \hat{e}_3) \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \dot{\phi}(-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}) = \dot{\phi} \hat{\phi} \quad (23b)$$

由式(14a)、(13c)與(23b)可得

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\theta}}{dt} &= -\dot{\theta}(\cos \theta \hat{z} + \sin \theta \hat{\rho}) + \cos \theta \frac{d\hat{\rho}}{dt} \\ &= -\dot{\theta} \hat{e}_3 + \dot{\phi} \cos \theta \hat{\phi} \end{aligned} \quad (23c)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{e}_3}{dt} &= \dot{\theta}(-\sin \theta \hat{z} + \cos \theta \hat{\rho}) + \sin \theta \frac{d\hat{\rho}}{dt} \\ &= \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{\phi} \sin \theta \hat{\phi} \end{aligned} \quad (23d)$$

根據上式與式(20c)可得

$$\vec{L} \cdot \frac{d\hat{e}_3}{dt} = 0 \quad (23e)$$

可見對稱陀螺在轉動時，其質心的運動方向，恆與總角動量垂直。

(八) 對稱陀螺角動量分量的時變率

由式(8)、(14a)與(14b)可得總角動量的時變率為

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = r_c \hat{e}_3 \times Mg(-\hat{z}) = Mgr_c \hat{e}_3 \times (\sin \theta \hat{\theta})$$

$$= Mgr_c \sin \theta \hat{\phi} \quad (24a)$$

分別取上式沿 $\hat{\theta}$ 、 $\hat{\phi}$ 、 \hat{e}_3 三個正交軸之分

量，可得

$$\hat{\theta} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad (24b)$$

$$\hat{\phi} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = Mgr_c \sin \theta \quad (24c)$$

$$\hat{e}_3 \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad (24d)$$

由式(23e)與(24d)之結果，可得

$$\frac{dL_3}{dt} = \frac{d(\hat{e}_3 \cdot \vec{L})}{dt} = \hat{e}_3 \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} + \frac{d\hat{e}_3}{dt} \cdot \vec{L} = 0 \quad (24e)$$

換言之，角動量沿 3 軸(即對稱軸)之分量

L_3 不隨時間變化，即 $L_3 = I_3 \omega_3$ 為常數，故角速度沿 3 軸之分量 ω_3 亦為常數。

(九) 對稱陀螺的進動

因為 3 軸的正方向，恆可選定為 $L_3 \geq 0$ 的方向，故本文在以下之各部分，均假定 $L_3 \geq 0$ ，並排除 $L_3 = L_z = 0$ (即陀螺為靜止)之情形。由式(22a)可得

$$\dot{\phi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \quad (25a)$$

上式顯示，一般而言，進動之角速度 $\dot{\phi}$ 隨極角 θ 而變，而若 $|L_z| > L_3$ ，則 $\dot{\phi}$ 與 L_z 的符號相同，即陀螺在不同極角時，恆沿同一時針方向進動。

若 $L_3 \geq |L_z|$ ，則可令

$$\cos \theta_c = L_z / L_3 \quad (L_3 \geq |L_z|) \quad (25b)$$

而將式(25a)改寫為

$$\dot{\phi} = \frac{L_3(\cos \theta_c - \cos \theta)}{I_1 \sin^2 \theta} \quad (25c)$$

由上式可看出，在此情況下，當 $\theta > \theta_c$ 時， $\dot{\phi}$ 為正值，而當 $\theta < \theta_c$ 時， $\dot{\phi}$ 為負值。故如在半徑為 r_c 的球面上顯示對稱陀螺質心的運動時，其可能之軌跡會如圖 4 所示，即在 θ

$> \theta_c$ 時，質心向右運動，在 $\theta < \theta_c$ 時，質心向左運動，而在 θ_c 時，質心的運動方向，與代表 $\theta = \theta_c$ 的虛線垂直。

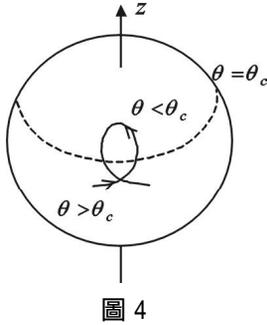


圖 4

(十) 對稱陀螺的章動

將式(25a)之結果代入式(22b)可得

$$I_1^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 = I_1 \sin^2 \theta (2E - I_3 \omega_3^2 - 2Mg r_c \cos \theta) - (L_z - I_3 \cos \theta)^2 \quad (26a)$$

如以極角之餘弦 $\xi = \cos \theta$ 表示，上式可改寫為

$$I_1^2 \dot{\xi}^2 = I_1 (1 - \xi^2) (2E - I_3 \omega_3^2 - 2Mg r_c \xi) - (L_z - L_3 \xi)^2 = f(\xi) \quad (26b)$$

當陀螺做轉動運動時，上式左邊不可為負值，故由上式可得知陀螺在轉動時，極角之餘弦 ξ 必滿足 $f(\xi) \geq 0$ 條件。但 $f(\xi)$ 為 ξ 的三次多項式，具有以下之性質：

$$f(+\infty) > 0 \quad (27a)$$

$$f(+1) = -(L_z - L_3)^2 \leq 0 \quad (27b)$$

$$f(-1) = -(L_z + L_3)^2 \leq 0 \quad (27c)$$

$$f(-\infty) < 0 \quad (27d)$$

假設陀螺開始轉動時，其極角為 θ_0 ，餘弦為 $\xi_0 = \cos \theta_0$ ，則如前述可確定 $f(\xi_0) \geq 0$ 。若只考慮 $L_3 \neq |L_z|$ 的情形，則 $f(+1)$ 與 $f(-1)$ 均為負值，故由以上諸式，可推知 $f(\xi) = 0$ 的三個根中，必有一實根 $\xi_3 > 1$ 不在極角餘弦的範圍內，而另兩個實根 ξ_1 與 ξ_2 ($\xi_1 \leq \xi_2$)，必

介於 -1 與 +1 之間。若 $f(\xi_0) \geq 0$ (如圖 5a)，或 $f(\xi_0) = 0$ 但其微分 $f'(\xi_0) \neq 0$ (如圖 5b)，則 ξ_1 與 ξ_2 相異。若 $f(\xi_0) = 0$ 且其微分 $f'(\xi_0) = 0$ (如圖 5c)，則 ξ_1 與 ξ_2 相等，均等於 ξ_0 。

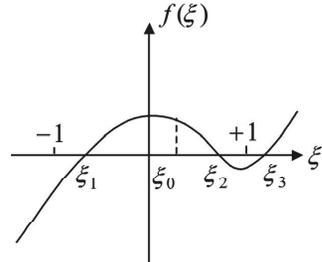


圖 5a $f(\xi_0) \geq 0$

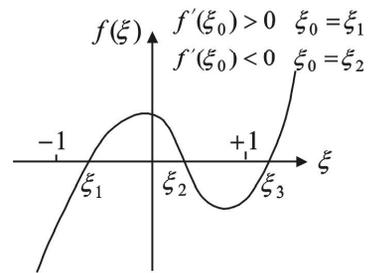


圖 5b $f(\xi_0) = 0, f'(\xi_0) \neq 0$

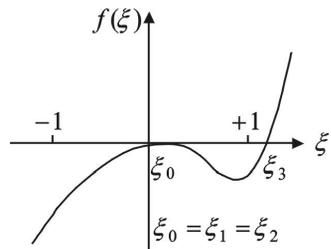


圖 5c $f(\xi_0) = 0, f'(\xi_0) = 0$

在圖 5a 或圖 5b 所述之情況下，當陀螺做轉動運動時，其質心的極角 θ ，會在 $\theta_2 = \cos^{-1} \xi_2$ 到 $\theta_1 = \cos^{-1} \xi_1$ 的範圍內升降 ($0 < \theta_2 < \theta_1 < \pi$)，亦即陀螺會出現章動的現象。此時若考慮 $L_3 > |L_z|$ 之運動情形，則如式(25a)或圖 4 所示，陀螺質心的運動，當 $\theta_c < \theta_2 < \theta_1$ 時，會出現如圖 6a 所示之軌跡；當 $\theta_c = \theta_2 < \theta_1$ 時，會出現

如圖 6b 所示之軌跡；當 $\theta_c = \theta_2 < \theta_1$ 時，會出現如圖 6c 所示之軌跡。

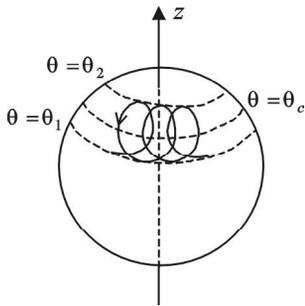


圖 6a

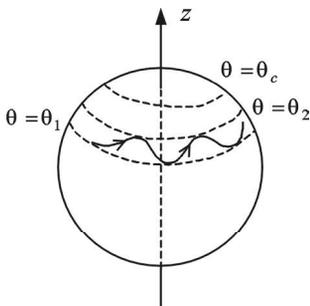


圖 6b

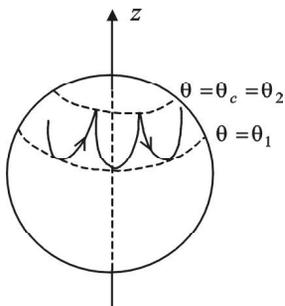


圖 6c

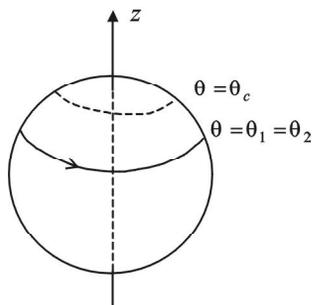


圖 7

(十一) 對稱陀螺的正規進動

在圖 5c 所述之情況下，當陀螺做轉動運動時，其質心的極角 θ 只能等於 $\theta_0 = \cos^{-1} \xi_2 = \cos^{-1} \xi_1$ ，即維持固定不變，亦即 $\dot{\theta} = 0$ ，換言之，陀螺不會出現章動，只能做進動，如圖 7 所示，此種運動特稱為正規進動。因 $f(\xi_0) = 0$ ， $f'(\xi_0) = 0$ ，故為二重根，由式(26b)得

$$-(L_z - L_3 \xi_0)^2 = 0 \quad (28a)$$

$$f'(\xi_0) = 2I_1 \{ Mgr_c (\xi_0^2 - 1) - \xi_0 (2E - I_3 \omega_3^2 - 2Mgr_c \xi_0) - 2Mgr_c \xi_0 \} + 2L_3 (L_z - L_3 \xi_0) = 0 \quad (28b)$$

但由式(22b)，以及 $\dot{\theta} = 0$ ，得

$$2E - I_3 \omega_3^2 - 2Mgr_c \xi_0 = I_1 \dot{\phi}^2 (1 - \xi_0^2) \quad (28c)$$

另外，由式(25a)可得

$$L_z - L_3 \xi_0 = I_1 \dot{\phi} (1 - \xi_0^2) \quad (28d)$$

由以上二式可看出，在正規進動(即 $\dot{\theta} = 0$)的情況下，極角餘弦的起始值 ξ_0 必然滿足式(28a)。

若將以上二式的關係代入式(28b)，則可得正規進動的角速度 $\dot{\phi}$ 與 ξ_0 必須滿足下式：

$$f'(\xi_0) = 2I_1 (1 - \xi_0^2) (-Mgr_c - I_1 \dot{\phi}^2 \xi_0 + L_3 \dot{\phi}) = 0 \quad (28d)$$

上式顯示除非 $\xi_0 = \pm 1$ (即陀螺繞鉛直軸轉動，此二特例以下不再考慮)，否則 $\dot{\phi}$ 須為下式之根：

$$I_1 \xi_0 \dot{\phi}^2 - L_3 \dot{\phi} + Mgr_c = 0 \quad (29a)$$

上式之 $\dot{\phi}$ 有不為零之實根的條件為其判別式須大於零，即

$$L_3^2 = (I_3 \omega_3)^2 > 4I_1 Mgr_c \xi_0 \quad (29b)$$

此條件顯示，當 $\xi_0 \geq 0$ (即極角不大於 90° ，或陀螺質心之 $z \geq 0$) 時，陀螺繞對稱軸轉動的角速度 ω_3 必須夠快，才有可能在極角固定的情況下，以固定的 $\dot{\phi}$ 做正規進動。在式

(29b)的條件下，若 $\xi_0 = 0$ (即 $\theta_0 \geq 90^\circ$)，則由式

(29a)可知正規進動的角速度為

$$\dot{\phi} = \frac{Mg r_c}{L_3} \quad (29c)$$

而若 $\xi_0 \neq 0$ ，則式(29a)有兩相異實根，

此時正規進動的角速度有兩種可能，即

$$\dot{\phi} = \frac{L_3 \pm \sqrt{L_3^2 - 4I_1 Mg r_c \xi_0}}{2I_1 \xi_0} \quad (29d)$$

(十二) 正規進動的可能性

以上的討論，利用牛頓力學中一些相當基本的守恆定律，定性地描述了對稱陀螺的進動與章動運動，但並未能清楚地指出，為何極角在 $0 < \theta \leq \pi/2$ 範圍內時，陀螺繞其對稱軸的角速度，必須快速到能夠滿足式(29b)的關係，才有可能出現正規進動。此外，以上的討論，也未清楚地指出陀螺在重力作用下，其章動運動何以能維持穩定性，不致倒下，亦即陀螺的對稱軸為何能保持在一定的極角範圍內，在每次下降後又能夠重新上升。這兩個問題，其實是彼此互有關聯的，其道理也是共通的，且可以經由平面圓周運動的相關公式與概念，加以澄清與理解。

考慮一個質量為 m 的質點，受向心力 $-F(r)$ 的作用，在一平面內做圓周運動。依牛頓第二運動定律，即式(1)，此質點之動量 $\vec{p} = m\vec{v}$ 必須滿足下式：

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = -F(r)\hat{r} \quad (30a)$$

使用平面極座標 r 、 θ 時，對應之座標軸單位向量 \hat{r} 與 $\hat{\theta}$ ，可表示為

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y} \quad (30b)$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y} \quad (30c)$$

以上二式中的單位向量，其時變率可表示為

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}(-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}) = \dot{\theta}\hat{\theta} \quad (30d)$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta}(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}) = -\dot{\theta}\hat{r} \quad (30e)$$

利用式(30b)-(30e)，可將質點之位置向量

\vec{r} 、速度 \vec{v} 與動量 \vec{p} 表示為

$$\vec{r} = r(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}) = r\hat{r} \quad (31a)$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\hat{r}) = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad (31b)$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{r}\hat{r} + mr\dot{\theta}\hat{\theta} \quad (31c)$$

以沿座標軸 \hat{r} 與 $\hat{\theta}$ 的分量表示時，式(30a)

可改寫為

$$\hat{r} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\hat{r} \cdot \vec{p})}{dt} - \frac{d\hat{r}}{dt} \cdot \vec{p} = -F(r) \quad (32a)$$

$$\hat{\theta} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\hat{\theta} \cdot \vec{p})}{dt} - \frac{d\hat{\theta}}{dt} \cdot \vec{p} = 0 \quad (32b)$$

將式(30d)-(30e)與(31c)的結果代入以上

二式，可得常見之平面運動方程式，即

$$\frac{dp_r}{dt} = m\ddot{r} = -F(r) + \dot{\theta}p_\theta = -F(r) + mr\dot{\theta}^2 \quad (32c)$$

$$\frac{dp_\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(mr\dot{\theta}) = -\dot{\theta}p_r = -m\dot{r}\dot{\theta} \quad (32d)$$

式(32c)清楚地顯示出，當轉動角速度 $\dot{\theta}$

不為零時，向心力 $-F(r)$ (恆為負值)使質點靠近力中心 $r = 0$ 的趨勢，會被轉動運動所產生的離心力 $mr\dot{\theta}^2$ (恆為正值)消弱。當轉速 $\dot{\theta}$ 夠快時，向心力完全被離心力抵銷，因此質點的徑向距離 r 有可能保持固定值，而出現等速率圓周運動 (r 與 $\dot{\theta}$ 均固定)。當 r 固定不變時， $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ ，此時由式(32d)知 $\dot{\theta}$ 亦為固定，但其值並非任意，必須滿足式(32c)，即

$$\dot{\theta}^2 = \frac{F(r)}{mr} \quad (32e)$$

對稱陀螺出現正規進動時，極角 θ 固定，角速度 $\dot{\phi}$ 與 ω_3 也固定，但這樣的運動方式，當質心不低於支點時，角速度 ω_3 必須夠高，才有可能出現，基本上這與以上所述圓周運動的道理是相同的。仿照由質點動量時

變率，即式(30a)，導出其分量式(32a)與(32b)的做法，可由對稱陀螺角動量時變率，即式(24a)，求得其分量式為

$$\hat{\phi} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\hat{\phi} \cdot \vec{L})}{dt} - \frac{d\hat{\phi}}{dt} \cdot \vec{L} = Mgr_c \sin \theta \quad (33a)$$

$$\hat{e}_3 \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\hat{e}_3 \cdot \vec{L})}{dt} - \frac{d\hat{e}_3}{dt} \cdot \vec{L} = 0 \quad (33b)$$

$$\hat{\theta} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\hat{\theta} \cdot \vec{L})}{dt} - \frac{d\hat{\theta}}{dt} \cdot \vec{L} = 0 \quad (33c)$$

利用式(20c)的角動量公與式(14b)，可得

$$L_\theta = \hat{\theta} \cdot \vec{L} = -I_1 \dot{\phi} \sin \theta \quad (34a)$$

$$L_\phi = \hat{\phi} \cdot \vec{L} = I_1 \dot{\theta} \quad (34b)$$

$$L_3 = \hat{e}_3 \cdot \vec{L} = I_3 \omega_3 \quad (34c)$$

$$L_\rho = \hat{\rho} \cdot \vec{L} = -I_1 \dot{\phi} \sin \theta (\hat{\rho} \cdot \hat{\theta}) + I_3 \omega_3 (\hat{\rho} \cdot \hat{e}_3) \\ = (-I_1 \dot{\phi} \cos \theta + I_3 \omega_3) \sin \theta \quad (34d)$$

利用(23a)、(23c)、(23e)及以上四式，可將式(33a)-(33c)改寫成類似式(32c)與(32d)的形式，即

$$\frac{dL_\phi}{dt} = I_1 \ddot{\theta} = Mgr_c \sin \theta - (\dot{\phi} \hat{\rho}) \cdot \vec{L} \\ = (Mgr_c + I_1 \dot{\phi}^2 \cos \theta - I_3 \omega_3 \dot{\phi}) \sin \theta \quad (35a)$$

$$\frac{dL_3}{dt} = I_3 \dot{\omega}_3 = \frac{d\hat{e}_3 \cdot \vec{L}}{dt} = 0 \quad (35b)$$

$$\frac{dL_\theta}{dt} = \frac{d}{dt} (-I_1 \dot{\phi} \sin \theta) = \frac{d\hat{\theta}}{dt} \cdot \vec{L} \\ = (-I_3 \omega_3 + I_1 \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\theta} \quad (35c)$$

由式(35a)可看出，當角速度 $\dot{\phi}$ 與 ω_3 同為正或負值時，重力矩 $Mgr_c \sin \theta$ (恆不為負值) 使極角 θ 增加的趨勢，會被陀螺繞其對稱軸轉動運動所產生的反向力矩 $-I_3 \omega_3 \dot{\phi} \sin \theta$ (恆不為正值) 消弱，但會被陀螺繞 z 軸轉動所產生的力矩 $I_1 \dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta$ 增強 ($\theta < \pi/2$) 或減弱 ($\theta > \pi/2$)。因此，若考慮的是對稱陀螺在 $0 < \theta \leq \pi/2$ 範圍的轉動運動，則只有當轉速 ω_3 夠快時，正、反向的力矩，才有可能完全

抵銷，而使陀螺對稱軸的極角 θ 保持固定值，出現等規律的正規進動 (θ 與 $\dot{\phi}$ 均固定)；而若考慮的是 $\pi/2 < \theta < \pi$ 的轉動運動，則即使轉速 ω_3 為零，只要陀螺繞 z 軸轉動的角速度 $\dot{\phi}$ 夠大，正、反向的力矩亦有可能完全抵消，而使陀螺出現正規進動，亦即錐擺運動。

當 θ 固定不變時， $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$ ，此時由式(35b)與(35c)知 ω_3 與 $\dot{\phi}$ 亦為固定，但兩者之值並非任意，必須滿足式(35a)，即

$$Mgr_c + I_1 \dot{\phi}^2 \cos \theta - I_3 \omega_3 \dot{\phi} = 0 \quad (36a)$$

此與(29a)式所得之結果完全相同。

(十三) 章動運動的穩定性

出現章動時，極角 θ 不為固定值。利用式(35a)的結果，可以將式(35a)中最後兩項之和改寫為 θ 的函數，即

$$K(\theta) = I_1 \dot{\phi} (\dot{\phi} \cos \theta - L_3) \sin \theta \\ - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta} \{ (L_z - L_3 \cos \theta) \cos \theta \\ - L_3 \sin^2 \theta \} \\ = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta} (L_z \cos \theta - L_3) \quad (37a)$$

令 $L_>$ 與 $L_<$ 分別代表 L_3 與 L_z 中絕對值較大與較小者，若 $L_> \neq 0$ ，則可令 $L_<$ 與 $L_>$ 之比值為 θ_m 之餘弦，即

$$\cos \theta_m = \frac{L_<}{L_>} \quad (0 \leq \theta_m \leq \pi) \quad (37b)$$

而將式(37a)表示為

$$\kappa(\theta) = \frac{L_>^2 (\cos \theta - \cos \theta_m) (1 - \cos \theta_m \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta} \quad (37c)$$

上式顯示陀螺繞 3 軸與 z 軸轉動的淨效果，在 $\theta < \theta_m$ 時，因 $\kappa(\theta) > 0$ ，故與重力矩 $Mgr_c \sin \theta$ 同向，會產生使極角 θ 增大的趨勢；而在 $\theta > \theta_m$ 時，因 $\kappa(\theta) < 0$ ，故與重力矩反向，而會

產生使極角 θ 減小的趨勢。綜合以上兩種情況，可見陀螺繞 3 軸與 z 軸轉動的淨效果，乃是要使極角 θ 不要偏離 θ_m 。基本上，這就是陀螺在重力作用下為何不會倒下的原因。以下分析極角在重力矩與 $\mathbf{k}(\theta)$ 合起來作用下的變化情形。

由式(37a)的第二個等式，可得

$$\begin{aligned} \kappa(\theta) &= \frac{1}{2I_1} \left\{ (L_z - L_3 \cos\theta)^2 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{-1}{\sin^2\theta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{-1}{\sin^2\theta} \right) \frac{d}{d\theta} (L_z - L_3 \cos\theta)^2 \right\} \\ &= -\frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{(L_z - L_3 \cos\theta)^2}{2I_1 \sin^2\theta} \right\} \end{aligned} \quad (38a)$$

故式(35a)可改寫為

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta} &= \frac{d}{d\theta} \left\{ \left(E - \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 - Mgr_c \cos\theta \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(L_z - L_3 \cos\theta)^2}{2I_1 \sin^2\theta} \right\} \end{aligned} \quad (38b)$$

利用式(26b)中定義的函數 $f(\cos\theta)$ (如圖 5

與 6)，上式右邊可改寫為

$$I_1 \ddot{\theta} = \frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{f(\cos\theta)}{2I_1 \sin^2\theta} \right\} = -\frac{dU}{d\theta} \quad (38c)$$

上式中右邊出現的函數 U ，其定義為

$$\begin{aligned} U(\theta) &= \frac{-f(\cos\theta)}{2I_1 \sin^2\theta} = -\left(E - \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 - Mgr_c \cos\theta \right) \\ &\quad + \frac{(L_z - L_3 \cos\theta)^2}{2I_1 \sin^2\theta} \end{aligned} \quad (38d)$$

根據上式與式(22b)可知

$$U(\theta) = -\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 \quad (38e)$$

利用式(38d)，及圖 5a 與 5b，可得如圖 8 所示的 $U - \theta$ 曲線。因為 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$ ，故得 $U(\theta_1) = U(\theta_2) = 0$ ，而在極角 θ 接近 0 或 π 時，由於分母之正弦 $\sin\theta$ 趨近於零，故 U 之值趨近於無窮大。注意：陀螺只能在 $\theta_2 = \cos^{-1}\xi_2$ 到 $\theta_1 = \cos^{-1}\xi_1$ 之間 f 不為負值(亦即 U 不為正值)的範圍內做轉動運動。由式(38e)與圖 8 可知，當陀螺往 θ_2 或 θ_1 逼近時， U 與 $\dot{\theta}$ 均會趨近於零。但由圖 8 中曲線的斜率與式(38c)，可看出對稱陀螺的極角 θ 增大而往 θ_1 靠近時，曲線的斜率為正，角加速度 $\ddot{\theta}$ 為負，而當極角 θ 減小而往 θ_2 靠近時，角加速度 $\ddot{\theta}$ 為正，故陀螺受到的都是使極角回復到中間值的力矩，因此對稱陀螺的章動，確具穩定性。

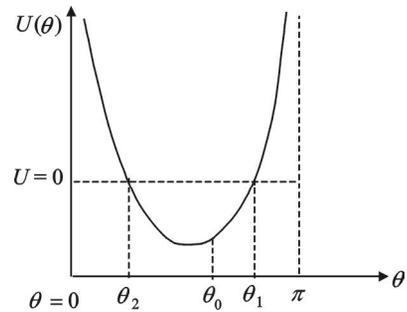


圖 8