

中學生通訊解題第十四期參考解答與評析

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號

901401

建中為校慶排練表演隊伍，將 1500 名高一學生按前後順序排成若干排。已知其總排數大於 20，且後排必須比前排多 1 人，試求表演隊伍要排成幾排才能滿足條件之要求？此時最前排應排幾名學生？

參考解答：

設最前排有 a 人且共有 b 排，得每排人數依次為 $a, a+1, a+2, \dots, a+b-1$

由題意知 $a+(a+1)+(a+2)+\dots+(a+b-1)$

$$= \frac{[a+(a+b-1)] \times b}{2} = 1500$$

$$\text{亦即 } (2a+b-1) \times b = 3000 = 2^3 \times 3^1 \times 5^3$$

但是 $(2a+b-1)+b=2(a+b)-1$ 為奇數，因此 $2a+b-1$ 與 b 化為一奇數一偶數且 $2a+b-1 > b$ 其值的分佈可列表如下：

$$(i) \quad b > 20 \quad 2^3 \times 3 = 24 \quad 2^3 \times 5 = 40 \quad 5^2 = 25$$

$$(ii) \quad 2a+b-1 \quad 5^3 = 125 \quad 3 \times 5^2 = 75 \quad 2^3 \times 3 \times 5 = 120$$

從上表中可得知表演隊伍可能為 24 排，25 排，40 排三種，其對應的最前排人數依序為 51 人，48 人，18 人。

評析：

1. 本題之解答共有三組，除少數參答者沒有得分，其餘皆至少能答對一組答案。
2. 在所有參答者中，答案簡捷清晰的有北市永吉國中李俊緯、敦化國中柯舒方、東湖國中賴昱臣、北縣海山國中張源平、江翠國中黃明山、新莊國中吳之堯，基市銘傳國中陳

昱瑋，彰化縣陽明國中侯景維，南市復興國中劉峻麟，建興國中黃信溢等。

3. 本題參與答題人數共有 59 人，答對一組者得 3 分，答對兩組者得 5 分，答對三組者得 7 分，平均得分為 4.02 分，得分率為 57.42%。

問題編號

901402

試求出所有邊長為自然數，且面積等於周長的直角三角形。

參考解答：

設直角 $\triangle$ 的邊長為 a, b, c 其中 $c \geq b \geq a \geq 1, a, b, c$ 為正整數

$$\text{則 } \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ a + b + c = \frac{1}{2}ab \end{cases}$$

$$\therefore (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab = c^2 + 4(a+b+c)$$

$$\therefore (a+b)^2 - c^2 = 4(a+b+c)$$

$$\therefore (a+b+c)(a+b-c) = 4(a+b+c)$$

$$\therefore a+b-c=4, \text{ 用 } c=a+b-4 \text{ 代入 } a+b+c=\frac{1}{2}ab \text{ 得}$$

$$a+b+a+b-4=\frac{1}{2}ab \text{ 即 } 4a+4b-8=ab$$

$$\Rightarrow (a-4)(b-4)=8 \text{ 且 } (a-4) \leq (b-4) \quad a, b \text{ 為正整數}$$

$$\therefore \begin{cases} a-4=1 \\ b-4=8 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a-4=2 \\ b-4=4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a-4=-8 \\ b-4=-1 \end{cases} \text{ 或}$$

$$\begin{cases} a-4=-4 \\ b-4=-2 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a=5 \\ b=12 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=6 \\ b=8 \end{cases} \text{ 或}$$

$$\begin{cases} a=-4 \\ b=3 \end{cases} \text{ (不合) 或 } \begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases} \text{ (不合)}$$

∴條件符合的直角三角形有(5,12,13)和(6,8,10)兩個。

評析：

(1)應用直角三角形的邊長與面積關係，再輔以畢氏定理，就可以求出滿足題目條件的解。

(2)本題是要求出滿足條件的所有正整數解，大部分參答的同學都有辦法求得正確案，但是有部分同學因為數學觀念不夠嚴密而出現以下兩種誤解：

1.用(3,4,5)、(6,8,10)、(5,12,13)、(7,24,25)……逐一代入檢驗而求得(6,8,10)(5,12,13)兩組正確的解，但是之後並未說明除了這兩組之外沒有其他的解。

2.設直角三角形三邊長為 m^2+n^2 ， m^2-n^2 ， $2mn$ ，(其中 $m>n$)

∵ m^2+n^2 ， m^2-n^2 ， $2mn$ 為正整數

∴ m, n 正整數

此處有點繆誤，反例如下：

設 $m=\frac{3}{\sqrt{2}}$ ， $n=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 則 $m^2+n^2=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=5$ ， $m^2-n^2=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4$ ， $2mn=2\times\frac{3}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=3$

所以 m^2+n^2 ， m^2-n^2 ， $2mn$ 正整數

但 m, n 不為正整數

由此可見同學們的計算能力不錯，但有關的數學概念似乎不夠嚴謹。

(3)本題共有 43 人參答，平均得分為 3.96 分，得分率為 57%，。

問題編號

901403

牆有 6 個燈泡，由左至右分別編號為 1~6 號。擲一個骰子一次，編號與出現點數相同

的燈泡就會改變狀態(所謂改變狀態是指：由亮變暗，或由暗變亮)。今假設一開始 6 個燈泡都是暗的。

(1)若小明擲骰子 3 次後發現結果恰有一個燈泡仍然亮著。試問共有幾種擲骰子的情形會得到恰有一個燈泡仍然亮著的結果？

(2)若小英擲骰子 5 次後發現恰有一個燈泡還亮著，問共有幾種擲骰子的情形會得到恰有一個燈泡仍然亮著的結果？

參考解答：

(1)因為第一次按下去必定是亮，且題目規定要擲 3 次，所以剩下兩種必為一暗一亮，因此有兩類，一類是亮暗亮，另一類是亮亮暗，所以共有 $6\times 1\times 6=36$

$$6\times 5\times 2=60$$

$$36+60=96 \text{ 共 } 96 \text{ 種}$$

(2)五次要只有一亮，就必須是 3 亮 2 暗而第一次按下去必定是亮的，所以應該有五大類。

第一類是亮亮亮暗暗 $6\times 5\times 4\times 3\times 2=720$

第二類是亮亮暗亮暗 $6\times 5\times 2\times 5\times 2=600$

第三類是亮亮暗暗亮 $6\times 5\times 2\times 1\times 6=360$

第四類是亮暗亮亮暗 $6\times 1\times 6\times 5\times 2=360$

第五類是亮暗亮暗亮 $6\times 1\times 6\times 1\times 6=216$

共 $720+600+360+360+216=2256$ 種

評析：

(1)本題是加法原理與乘法原理的混合應用題，再分類討論的方式。

(2)參與本題的同學共計 50 人，答對者有 14 人，其中新竹市光華國中賴俊儒同學的解答最為簡捷明瞭，高雄縣鳳西國中葉仲恆同學的解答最為詳盡，另北市永吉國中李

俊緯銘傳國中，陳昱瑋新莊國中潘柏諺也很清晰，值得嘉許。

(3) 本題的平均得分為 2.76 分得分率為 40%。

問題編號

901404

把一個四位數的數字順序顛倒(如 1234 寫成 4321)，其值增加 2088，這樣的四位數是唯一的嗎？如果不是的話究竟有多少這種四位數呢？

參考解答：

設四位數為 $\overline{abcd}$ ，則 $1000d+100c+10b+a-1000a-100b-10c-d=2088$ 可得 $111(d-a)+10(c-b)=232$ ，其中 $-9 < d-a < 9$ ， $-9 \leq c-b \leq 9$ 這樣的解只有 $d-a=2$ 及 $c-b=1$ ，

兩種情況分別有 7 種及 9 種的取值方法，故共有 63 種這樣的數。

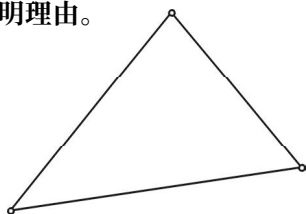
評析：

- (1) 本題是屬於數論的題目，只要列出式子，再利用範圍求解即可。
- (2) 參與答題的同學共計 63 人，其中得滿分 7 分的總計 46 人，平均得分為 5.84 分，得分率為 90%。

問題編號

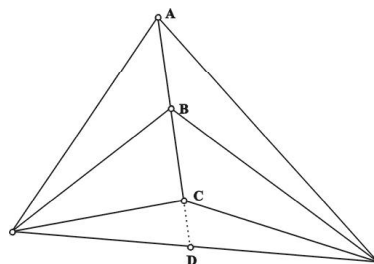
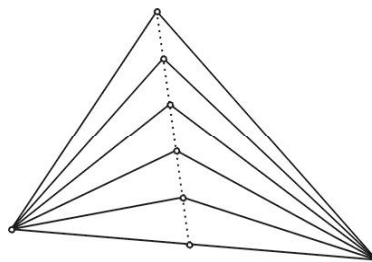
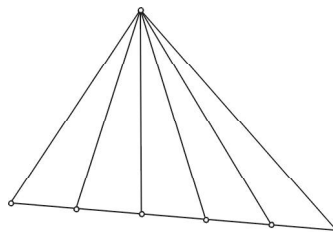
901405

如圖，給定一個三角形 ABC，請設計出各種不同的方式，將三角形 ABC 分成等面積的五個部分，並說明理由。

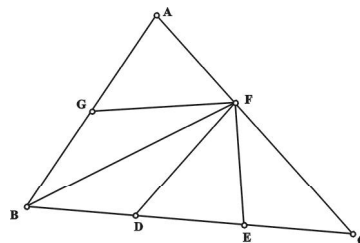


參考解答：

如下圖，列出 5 種方式可將一個三角形分成面積相等的五個部分。



$$AB : BC : CD = 2 : 2 : 1$$



$$\overline{AG} = \overline{GB}, \overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}, \overline{AF} : \overline{FC} = 2 : 3$$

(下轉第 51 頁)