推理問題四則

許介彥

大葉大學　通訊與計算機工程學系

前言

具備基本的數學技巧及邏輯推理能力可以說是從事任何科學研究必備的條件；美國的研究所入學考試 GRE 的第二及第三部份即是分別測驗這兩方面的能力，用來評估應試者適不適合從事研究工作，或者更廣泛地說，是不是能夠清晰而有條理地思考並解決問題。

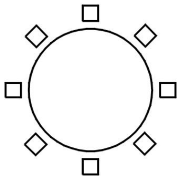
對極少數天資聰穎的人來說，數學及推理能力只需經由簡單的啟發，即可輕鬆掌握運用的訣竅；對一般人而言，雖然沒有這麼幸運，卻可經由後天的鍛鍊而在這兩方面達到一定的程度。我們每個人從小都作過非常多的數學練習題，相較之下，推理能力的培養在我們的學習過程中是較被忽視的。

本文包含了四道推理方面的問題，題目敘述都簡短而易懂，所運用的邏輯亦不難，解題的關鍵在於是否能將已知的資料作適當的整理並有效地加以應用在正確的方向上。建議讀者每個題目盡可能先自行求出答案，然後再參考本文所附的說明與解答。

推理練習題

問題一：

A、B、C、D 等四個男生的太太分別是 a、b、c、d 等四個女生；某天，這四對夫婦中的某一對邀請其他三對到家裡來共進晚餐，當時餐桌的座位分布如下：



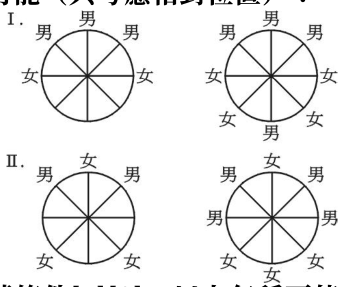
已知：

1. B 與 a 相鄰而坐，B 坐在 a 的左手邊；
2. c 坐在 B 的正對面；
3. 女主人是這八人當中唯一一個左右兩邊正好是同一對夫婦的人；
4. 這八人當中只有一個人的左右兩邊都是男生，而且這個人在晚餐時曾經讚美女主人駐顏有術。

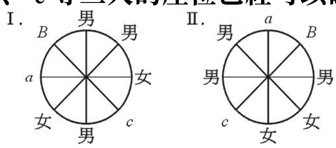
這個讚美女主人的人是誰？

解答：

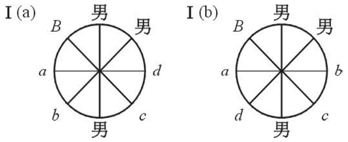
由條件[4]，八人中只有一人坐在兩個男生之間，參考題目的座位分布，可推知只有以下兩種可能（只考慮相對位置）：



又根據條件[1][2]，以上每種可能情形中，B、a、c 等三人的座位已經可以確定：



如果是情形 I，女生只剩下 b 與 d 的座位還沒確定，因此可能的情形有兩種：



如果是情形 I (a)，根據條件[3]，a 必為女主人，但此情形中，還未確定的 A 與 D 之中至少會有一個人坐在 B 或 b 旁邊，而使得 a 不是這八人當中唯一一個左右兩邊是同一對夫婦的人，因此不可能是情形 I (a)。

如果是情形 I (b)，根據條件[3]，女主人必為 b 或 d。如果 b 是女主人，則 C 必定坐在 b 的右手邊，但此時 A 不管是坐在剩下的兩個位子中的哪個位子都將使得 b 不是這八人當中唯一一個左右兩邊是同一對夫婦的人，因此女主人不可能是 b。如果 d 是女主人，則 A 必定坐在 d 的右手邊，此時 C 必須坐在 B 的左手邊且 D 坐在 C 的左手邊以滿足條件[3]，在此情形下，C 是條件[4]所說讚美女主人的人。

如果是情形 II，由於只有女主人的左右兩邊是同一對夫婦，因此 b 必定坐在 a 的正對面，但如此一來，沒有任何女生的兩邊會是同一對夫婦，因此不可能是情形 II。

結論：

條件[4]所述讚美女主人的人一定是 C，這是唯一的可能。

問題二：

A、B 等兩個男生的太太分別是 a、b 等兩個女生；某天，他們聚在一起玩象棋，總共比了三局，每局比賽皆由兩個人對壘而且每局都分得出輸贏，沒有和局的情形。

已知：

1. 只有第一局的兩個出賽者是同一對夫婦；
2. 男生總共贏了兩局，女生只贏得一局；
3. A 與 a 兩個人合起來贏得的局數比 B 與 b 兩個人合起來贏得的局數還要多；
4. 比賽採單淘汰制；如果某人在某局輸了，此人就不能再參加往後的其他比賽。

誰沒有輸過？

解答：

根據條件[3]，這三場比賽中，A 與 a 兩個人合起來贏得的局數必為兩場或三場，再配合條件[2]可推知這三局比賽的結果必為以下三種情形之一：

I. A 贏兩局，a 贏一局

II. A、a、B 等三人各贏一局

III. A 贏兩局，b 贏一局

如果是情形 I，根據條件[1]，第一局的出賽者一定是 A 和 a，不管是誰贏了，根據條件[4]，將迫使對方無法參加往後的比賽，也就無法在某局獲勝，因此不可能是情形 I。

如果是情形 II，由於 A 和 a 都是某局的贏家，因此第一局的出賽者一定是 B 和 b，且 B 贏得第一局。接著的第二局出賽者一定有 B，另一人為 A 或 a，且 B 輸掉了第二局。由於 b 和 B 先後都遭淘汰，接著的第三局只剩下 A 與 a 可以出賽，但這與條件[1]抵觸，因此情形 II 也不可能。

如果是情形 III，第一局的出賽者可能是 B 和 b 或是 A 和 a。如果是 B 和 b 比第一局，贏家一定是 b。接著的第二局的出賽者必定是 A 和 b 而且贏家一定是 A。由於 B 和 b 先後都遭淘汰，接著的第三局只剩下 A 與 a 可以出賽，但這與條件[1]抵觸，因此第一局的出賽

者不可能是 B 和 b。

如果是情形III而且第一局的出賽者是 A 和 a，贏家一定是 A。接著的第二局的出賽者一定是 A 和 B 而且贏家一定是 A。接著的第三局的出賽者一定是 A 和 b 而且贏家一定是 b。由於這是唯一可能的情形，因此可以確定四人中沒輸過的人為 b。

問題三：

甲、乙、丙、丁等四個學生一起修了某門課，這門課的老師打成績只分 A、B、C、D 四個等級（A 最好，D 最差）；以下他們所說的每句話都是真的。

甲說：

1.我們四人每個人的成績都不同；

2.如果我的成績是 A，丙的成績就是 D。

乙說：

3.如果丙的成績是 C，甲的成績就是 D；

4.甲的成績比丁好。

丙說：

5.如果乙的成績不是 A，甲的成績就是 C；

6.如果我的成績是 B，丁的成績就不是 D。

丁說：

7.如果丙的成績是 A，我的成績就是 B。

他們每個人各得到什麼成績？

解答：

由條件[1][4]，四個人的成績都不同而且甲的成績比丁好，可知甲的成績不會是 D。

如果甲的成績是 A，根據條件[1]知乙的成績不是 A，再根據條件[5]知甲的成績為 C，與甲的成績是 A 矛盾，因此甲的成績不會是 A。

將已知的資訊整理於下表：

	甲	乙	丙	丁
A	×			
B				
C				
D	×			

如果丙的成績是 A，根據條件[7]知丁的成績為 B，但這樣一來，條件[4]將無法滿足，因此丙的成績不會是 A。

如果丙的成績是 B，根據條件[1]知甲的成績不是 B，因此甲的成績一定是 C；但根據條件[6]知丁的成績不是 D，使得條件[4]無法滿足，因此丙的成績不會是 B。

如果丙的成績是 C，根據條件[3]知甲的成績為 D，與條件[4]抵觸，因此丙的成績不會是 C。

既然丙的成績既不是 A，也不是 B 或 C，只剩下一種可能，他的成績一定是 D。將已知的資訊整理如下：

	甲	乙	丙	丁
A	×		×	
B			×	
C			×	
D	×	×	○	×

由上表可明顯看出，為了滿足條件[4]，甲的成績必為 B 而且丁的成績必為 C，這又可推知乙的成績必為 A，如下表所示：

	甲	乙	丙	丁
A	×	○	×	×
B	○	×	×	×
C	×	×	×	○
D	×	×	○	×

結論：

甲、乙、丙、丁四人的成績分別為 B、

A、D、C。

問題四：

下面的乘法運算中用到了十個不同的字母，每個字母代表一個阿拉伯數字，不同的字母代表不同的數字。

$$\begin{array}{rcccccc} & & & & A & L & E \\ \times & & & & R & U & M \\ \hline & & & W & I & N & E \\ & & W & U & W & L & \\ & E & W & W & E & & \\ \hline & E & R & M & P & N & E \end{array}$$

每個字母各代表什麼阿拉伯數字？

解答：

由相乘的結果的十位數 $N = N + L$ 可知 L 必定代表數字 0。

任何數與數字 1 相乘的結果一定與未乘之前相同。由 $ALE \times M = WINE$ 可知 M 一定不是 1。同理，U 和 R 也一定不是 1。又由 $M \times E$ 的結果的個位為 E 可知 E 也一定不是 1。

由觀察得知：$M \times E$ 的結果的個位為 E 且 $R \times E$ 的結果的個位亦為 E。E 一定不是 2，因為只有當 M 與 R 其中一個為 1 而另一個為 6 時，$M \times E$ 和 $R \times E$ 的結果的個位才會都是 2，但之前我們已推知 M 和 R 都不能是 1。E 也一定不是 3，因為根本找不出兩個相異的阿拉伯數字使得它們與 3 相乘的結果的個位都是 3。經由類似的嘗試，我們不難發覺在所有的阿拉伯數字中，E 只可能是數字 5。

確定 E 是 5 後，由 E 與 R、U、M 相乘的結果的個位是 5 或 0 可知：M 與 R 必為奇數而 U 必為偶數。將已知資訊整理如下：

A	E	I	L	M	N	P	R	U	W
	5		0	奇			奇	偶	

U 可能的值只有 2、4、6、8 等四個，由 $ALE \times U = A05 \times U = WUW0$ 可知 W 可能的值也只有四個：1、2、3、4。

U	2	4	6	8
W	1	2	3	4

由於題目中相乘的結果的萬位數 R 是奇數而 $W + W = 2W$ 是偶數，因此必定有一個 1 由千位進位到萬位，也就是說，$R = 2W + 1$；由於已知 E 為 5，因此 $R \neq 5$，$W \neq 2$，$U \neq 4$。考慮相乘的結果的千位數，由於 $W + U + W$ 加上由百位而來的可能的進位必須大於 9（才有進位），可知 $U \neq 2$，$W \neq 1$。由於我們已知 M 是奇數且 U 是偶數，因此 M 一定是 $2W + U + 1$ 的結果的個位數。考慮 U 與 W 剩下的兩種情況：

(1) U 為 6，W 為 3 $\Rightarrow$ M 為 3，但這不可能，因為 W 亦為 3。

(2) U 為 8，W 為 4 $\Rightarrow$ M 為 7。

因此，可確定 M 為 7，U 為 8，W 為 4，接著將這些已經確定的字母代入題目中的乘法，可輕易地求得其他各個字母所代表的數字。如果將題目中所有的字母還原為數字，可得如下的結果：

$$\begin{array}{rcccccc} & & & & 6 & 0 & 5 \\ \times & & & & 9 & 8 & 7 \\ \hline & & & 4 & 2 & 3 & 5 \\ & & 4 & 8 & 4 & 0 & \\ & 5 & 4 & 4 & 5 & & \\ \hline & 5 & 9 & 7 & 1 & 3 & 5 \end{array}$$

參考資料

1. 許介彥（2001），推理大考驗，俊傑書局。
2. C. R. Wylie Jr., Puzzles in Thought and Logic, New York, Dover, 1957.