

中學生通訊解題第十三期參考解答與評析

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號

901301

已知 k 是自 10001 開始的 10000 個連續之乘積， t 是自 1 開始的 10000 個連續奇數之乘積，若 $\frac{k}{t}$ 則 n 是不是整數？請說明理由

Sol: $\because 10001 \times 10002 \times \dots \times 20000$

$$= \frac{(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 10000) \times 10001 \times 10002 \times \dots \times 20000}{(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 10000)}$$

$$= \frac{(2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 20000) \times (1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 19999)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 10000}$$

$$= \left(\overbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}^{10000 \text{個}} \right) \times (1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 19999)$$

$$\therefore \frac{10001 \times 10002 \times \dots \times 20000}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 19999} = 2^{10000} \text{ 是一個整數}$$

解題重點與評析：

1. 答題方法較簡潔者有：桃園縣國立陽明高中廖威豪、台南市建興國中黃信溢、彰化員林國中羅元隆、台北縣福和國中賈士卜、楊智寰、北市大安國中林永鴻、興雅國中林洋德、仁愛國中吳宗哲、台北縣南門國中段佳宏、秀峰高中翁宜靜、板橋國中張源平等 以上同學採用參考解答之做法或類似之方法。
2. 這次參答學生人數有 36 位。不論你的方法是否是最簡潔的，但評閱這題的作答，看到許多同學展現了相當大的耐心與毅力，而得出結果，各位的這股解題的企圖心與

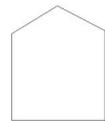
是值得嘉勉的。繼續努力！加油！

3. 參與徵答的共有 36 位同學，平均得分數 5.3 分，得分率為 75%。

問題編號

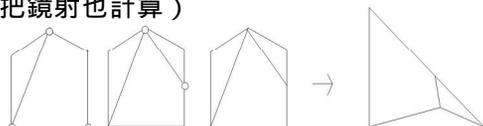
901302

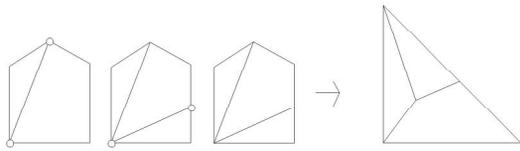
兩個全等等腰直角三角形對稱地拼合後，加在正方形的一條邊上，得到一個五邊形，試分割這個五邊形為三部分，使這三部分可重新拼合為一個新的等腰直角三角形。



參考解答：

如果題中的正方形邊長為 2，那麼這個五邊形的面積為 5，所以新的等腰直角三角形的直角邊為 $2\sqrt{5}$ ，這個數恰好是我們五邊形的每條長的對角線的長度因此，我們可以把這五邊形沿一條長對角線分割，這樣割開後的兩條邊可作為新的等腰直角三角形的直角邊，我們進一步發現，五邊形未被分割的其他角的頂點應在新的三角形之內，而且由這些頂點出發的邊在新三角形內應對對吻合，故我們可以得到這樣的分割法：沿任意一條長的對角線分割五邊形，再把這五邊形的一條與該對角線沒有交點的邊對半平分，這樣做的結果，我們得到兩種不同的解法。（不把鏡射也計算）





解題重點與評析：

1. 本題為實際操作題所以解出答案者頗多，但是在思考過程中，有充分之時間，故評分之標準採如下之方法：
7分：由面積不變推出邊長，故作分割者可得兩種情形。
6分：利用對稱或旋轉之概念解出一種者。
5分：作出二圖或有一圖並加以證明者，或全討論到者。
A：找到直角邊長為最長對角線長者，得 2 分。
B：應將另一邊對分，得 1 分。
C：作出圖形，得 4 分。
2. 答題優良者有南門國中段佳宏，福和國中楊智寰，另外江翠國中黃明山以旋轉法解題相當優秀，而秀峰高中國中部黃俊平，建興國中黃信溢，大直國中涂智翔，興雅國中林洋德，明德國中王琨傑，民生國中黃彥豪，陽明國中侯景維，新莊國中潘柏諺，介壽國中蔡佳珍，仁愛國小陳奕修，民生國中涂豫新，大安國中林永鴻。

問題編號

901303

有 17 袋硬幣（每袋各 200 個）及一台特殊的天平，此天平上有指針可指出哪一邊重及重多少。若只有一袋裝的全是假幣而其餘皆為真幣。已知所有真幣的質量一樣，所有假幣也具有相同質量，但與真幣不同。試問至少需秤幾次方可確定哪一袋為假幣？

參考解答：

第一次：先在一個盤子上放上 16 袋之硬幣各 1 枚，然後在另一個盤子上放上剩下的那一袋的硬幣 16 枚，以確定何者較重。

第二次：在第 1 袋取 1 枚，第 2 袋取 2 枚，第 16 袋取 16 枚硬幣放在一個盤子上，然後在另一個盤子上放剩下哪一袋的硬幣 136 枚。

先設 x_1 為第 1 袋中 1 枚之重量

x_2 為第 2 袋中 1 枚之重量……

x_{16} 為第 16 袋中 1 枚之重量

x_{17} 為另 1 袋中 1 枚之重量

由兩次稱量可求得 p, k 值，滿足下列兩個等式

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{16} = 16x_{17} + p$$

$$x_1 + 2x_2 + \dots + 16x_{16} = 136x_{17} + k$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_{17}) + (x_2 - x_{17}) + \dots + (x_{16} - x_{17}) = p$$

$$(x_1 - x_{17}) + 2(x_2 - x_{17}) + \dots + 16(x_{16} - x_{17}) = k$$

若 x_{17} 為真幣之重量，則 $p = (1 \text{ 枚假幣之重量} - 1 \text{ 枚真幣之重量})$ ，馬上可推知第 $\lfloor \frac{k}{p} \rfloor$ 袋為假幣；若 x_{17} 為假幣之重量，則 $p = 16(1 \text{ 枚真幣之重量} - 1 \text{ 枚假幣之重量})$ ，因此第 17 袋即為假幣。

解題重點與評析：

1. 本題重點在於先求出一個真幣與一個偽幣之重量差，其次在於每一袋中取出不同數目的錢幣共秤，由其重量差額即可知道何袋為偽幣。
2. 答題品質佳者有基隆市銘傳國中李曼鈺，台北市薇閣中學歐陽奕，
3. 參答人數有 43 人，得對率為 22.60 %。板橋海山國中張源平，北縣福和國中賈士卜，

台北縣江翠國中黃明山，彰化縣陽明國中侯景維，高雄市立志國中林華玉。

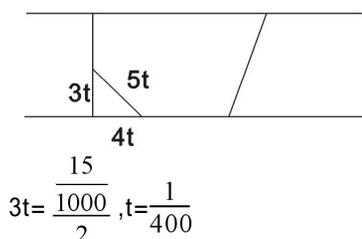
問題編號

901304

有一正方形隊伍長寬各 15m，以固定每小時4km的速度向前推進。若一人自隊伍後排中央處，以固定每小時 5km的速度，繞行隊伍，當他又回到隊伍後排中央時，共花了幾分鐘？

參考解答：

設一開始移至隊伍後排一端所需時間 t(hr)



則此人在隊伍的前排 + 後排移動所花時間為 $\frac{1}{400} \times 4 = \frac{1}{100}$ ，另此人在隊伍的左側及右廁所

花時間為 $\frac{15}{5+4} + \frac{15}{5-4} = \frac{5}{300}$ 故此人共花費

$(\frac{1}{100} + \frac{5}{300}) \times 60 = 1.6$ (分鐘)

解題重點與評析：

1. 將問題分為隊伍前後及隊伍兩側來討論。
2. 隊伍兩側的情況為追趕問題。
3. 參答者當中，以板橋海山國中張源平之解答較清晰扼要。其次為北縣秀峰國中唐韻如，北縣永和國中陳宏泰，北縣福和國中賈土卜，北縣新莊國中潘柏諺，吳之堯。

4. 參答人數有 41 人，平均得分為 4.24 分，得分率為 60.70 %。

問題編號

901305

用一張邊長 10 公分的正方形紙張，摺成一個有蓋的正立方體盒子，紙張可重疊，但不可剪破，試求此正立方體之最大體積？

參考解答：

設摺成的正立方體之稜長為 a 則

$$3a + 2\left(\frac{a}{2}\right) \leq \text{對角線長 } 10\sqrt{2} \text{ (公分)}$$

$$\Rightarrow a \leq \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow V = a^3 = \frac{125 \times 2\sqrt{2}}{8}$$

$$= \frac{125\sqrt{2}}{4} \text{ (立方公分)}$$

解題重點與評析：

1. 本題之解重點在於『紙張可以重疊，但不可剪破』。依此限制將正方形紙張之任兩點的最大距離找出（也就是對角線長 $10\sqrt{2}$ ），即得正方體上任一點 P 環繞一週之正交路徑長度：當 P 取在正方形之形心處，即得最大正方體。
2. 來函之同學共 24 位。其中解答最詳盡者，首推福和國中楊智寰，大直國中涂智翔，江翠國中黃明山三位同學，其次為介壽國中涂耿華，北縣新莊國中吳之堯，高雄市立志國中蔡政江等 12 位同學對解答完整性尚宜加強。