

Miquel 定理及其應用（續）

趙文敏
國立臺灣師範大學 數學系

乙、Miquel 定理的相關性質

由於 Miquel 點是圓的交點，這自然會引出許多角的相等或互補關係。

定理 5：設 $\triangle A_1A_2A_3$ 為任意三角形。若點 P_1 、 P_2 與 P_3 分別在線段 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_3A_1}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 上，且點 P_1 、 P_2 與 P_3 都不是 $\triangle A_1A_2A_3$ 的頂點，又圓 $A_1P_2P_3$ 、圓 $A_2P_3P_1$ 與圓 $A_3P_1P_2$ 交於點 P ，則

(1) 當點 P 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 的內部時，恆有

$$\begin{aligned}\angle PP_1A_2 &= \angle PP_2A_3 = \angle PP_3A_1 ; \\ \angle A_2PA_3 &= \angle A_2A_1A_3 + \angle P_2P_1P_3 ; \\ \angle A_3PA_1 &= \angle A_3A_2A_1 + \angle P_3P_2P_1 ; \\ \angle A_1PA_2 &= \angle A_1A_3A_2 + \angle P_1P_3P_2 .\end{aligned}$$

(2) 當點 P 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 的外部且與點 A_1 在直線 A_2A_3 異側時，恆有

$$\begin{aligned}180^\circ - \angle PP_1A_2 &= \angle PP_2A_3 = \angle PP_3A_1 ; \\ \angle A_2PA_3 &= 360^\circ - \angle A_2A_1A_3 - \angle P_2P_1P_3 ; \\ \angle A_3PA_1 &= \angle A_3A_2A_1 + \angle P_3P_2P_1 ; \\ \angle A_1PA_2 &= \angle A_1A_3A_2 + \angle P_1P_3P_2 .\end{aligned}$$

證：參看圖 1(1)與圖 1(2)。

(1) 因為圓內接四邊形的對角互補，所以， $\angle PP_1A_2$ 、 $\angle PP_2A_3$ 與 $\angle PP_3A_1$ 三個角相等。另一方面，因為 $\angle A_2PA_3 = \angle A_2PP_1 + \angle P_1PA_3$ ，而且

$$\begin{aligned}\angle A_2PP_1 &= \angle A_2P_3P_1 = \angle A_2A_1P_1 + \angle A_1P_1P_3 , \\ \angle P_1PA_3 &= \angle P_1P_2A_3 = \angle P_1A_1A_3 + \angle A_1P_1P_2 ,\end{aligned}$$

所以，得 $\angle A_2PA_3 = \angle A_2A_1A_3 + \angle P_2P_1P_3$ 。同理，可得後面兩個等式。

(2) 在圓 $A_2P_3P_1P$ 中，因為點 P_1 與點 P_3 在直線 A_2P 的同側，所以，依圓周角定理，得 $\angle PP_1A_2 = \angle PP_3A_2 = 180^\circ - \angle PP_3A_1$ 。另一方面，因為 $\angle A_2PA_3 = \angle A_2PP_1 + \angle P_1PA_3$ ，而且 $\angle A_2PP_1 = \angle P_1P_3A_1$ ， $\angle P_1PA_3 = \angle P_1P_2A_1$ ，所以，得

$$\angle A_2PA_3 = \angle P_1P_3A_1 + \angle P_1P_2A_1 = 360^\circ - \angle A_2A_1A_3 - \angle P_2P_1P_3 .$$

因為 $\angle A_3PA_1 = \angle A_3PP_2 + \angle P_2PA_1$ ，而且 $\angle A_3PP_2 = \angle A_3P_1P_2$ 、 $\angle P_2PA_1 = \angle P_2P_3A_1$ ，

所以，得

$$\begin{aligned}\angle A_3PA_1 &= \angle A_3P_1P_2 + \angle P_2P_3A_1 \\ &= (180^\circ - \angle A_2A_3A_1 - \angle A_3P_2P_1) + (180^\circ - \angle A_2A_1A_3 - \angle A_1P_2P_3) \\ &= \angle A_3A_2A_1 + \angle P_3P_2P_1.\end{aligned}$$

同理，可得最後一個等式。||

前述定理 5 所討論的角關係式，當點 P_1 、 P_2 、 P_3 與 P 位於其他位置時，也有類似的角關係式。不過，因為分類相當複雜，所以，本文不再一一說明，有興趣的讀者請自行討論。在定理 5 的角關係式中，讓我們注意到定理 5(1) 的後三個關係式指出： $\angle P_2P_1P_3$ 、 $\angle P_3P_2P_1$ 與 $\angle P_1P_3P_2$ 的度數都只與點 A_1 、 A_2 、 A_3 、 P 有關，而與點 P_1 、 P_2 、 P_3 無關，這現象說明了定理 6(2) 的相似關係。

定理 6：設 $\triangle A_1A_2A_3$ 為任意三角形。若點 P 是 $\triangle A_1A_2A_3$ 平面上異於點 A_1 、 A_2 與 A_3 的一個定點，則

- (1) 對於點 P 對 $\triangle A_1A_2A_3$ 的任意兩個 Miquel 三角形 $\triangle P_1P_2P_3$ 與 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ ，將點 P_1 、 P_2 與 P_3 繞點 P 旋轉一個有向角 $\angle P_1PQ_1$ ，再以點 P 為中心伸縮 $\overline{PQ_1} / \overline{PP_1}$ 倍，則點 P_1 、 P_2 、 P_3 分別與點 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 重合。換言之，點 P 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 與 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 的相似中心 (center of similitude)。因此， $\triangle P_1P_2P_3$ 與 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 為同方向的相似三角形。(可能兩組點分別都共線。)
- (2) 點 P 對 $\triangle A_1A_2A_3$ 的每一組 Miquel 圓的圓心所成三角形恆與 $\triangle A_1A_2A_3$ 相似。

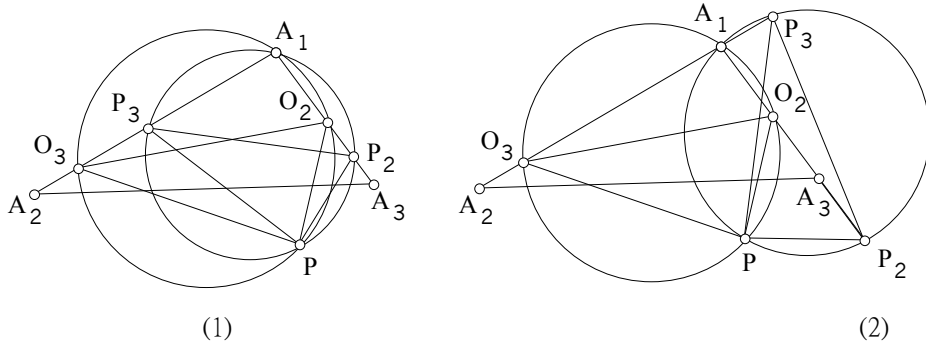


圖 5

證：參看圖 5(1)與圖 5(2)。

- (1) 在直線 A_1A_2 與直線 A_1A_3 上分別選取定點 O_3 與 O_2 ，使得點 A_1 、 O_2 、 O_3 與 P 共圓而且點 P 位於 $\angle O_2A_1O_3$ 的內部。於是，點 O_2 與 O_3 在直線 A_1P 的異側。我們先考慮 $P_2 \neq A_1$ 且 $P_3 \neq A_1$ 的情形。因為點 P 在 $\angle O_2A_1O_3$ 的內部而且點 A_1 、 P_2 、 P_3 與 P 共圓，所以，點 A_1 不能既介於點 P_2 與點 O_2 之間、又介於點 P_3 與點 O_3 之間。換言之，下述二等式至少有一個成立：
 $\overrightarrow{AP_2} = \overrightarrow{AO_2}$ 、 $\overrightarrow{AP_3} = \overrightarrow{AO_3}$ 。

若 $\overrightarrow{AP_2} = \overrightarrow{AO_2}$ 且 $\overrightarrow{AP_3} = \overrightarrow{AO_3}$ ，如圖 5(1)所示，則點 P_2 與 P_3 在直線 A_1P 的異側。於是，有向角 $\angle P_2PP_3$ 與 $\angle O_2PO_3$ 的方向相同且

$$\angle P_2PP_3 = 180^\circ - \angle P_2A_1P_3 = 180^\circ - \angle O_2A_1O_3 = \angle O_2PO_3;$$

$$\angle P_2P_3P = \angle P_2A_1P = \angle O_2A_1P = \angle O_2O_3P。$$

由此可知：有向角 $\angle P_2PP_3$ 與 $\angle O_2PO_3$ 方向相同、大小相等，而且 $\triangle PP_2P_3 \sim \triangle PO_2O_3$ 。若 $\overrightarrow{AP_2} = \overrightarrow{AO_2}$ 但 $\overrightarrow{AP_3} \neq \overrightarrow{AO_3}$ ，即點 A_1 介於點 P_3 與 O_3 之間，則點 P_2 與 P_3 在直線 A_1P 的同側。於是，有向角 $\angle P_2PP_3$ 與 $\angle O_2PO_3$ 的方向相同且

$$\angle P_2PP_3 = \angle P_2A_1P_3 = 180^\circ - \angle O_2A_1O_3 = \angle O_2PO_3;$$

$$\angle P_2P_3P = \angle P_2A_1P = \angle O_2A_1P = \angle O_2O_3P。$$

由此可知：有向角 $\angle P_2PP_3$ 與 $\angle O_2PO_3$ 方向相同、大小相等，而且 $\triangle PP_2P_3 \sim \triangle PO_2O_3$ 。若 $\overrightarrow{AP_2} \neq \overrightarrow{AO_2}$ 但 $\overrightarrow{AP_3} = \overrightarrow{AO_3}$ ，則同理可得相同的結果。

若 $P_3 = A_1$ ，即圓 A_1P_2P 與直線 A_1A_2 相切於頂點 A_1 ，則有向角 $\angle P_2PP_3$ 與 $\angle O_2PO_3$ 的方向相同且

$$\begin{aligned} \angle P_2PP_3 &= 180^\circ - \angle P_2A_1P - \angle A_1P_2P \\ &= 180^\circ - \angle O_2A_1P - \angle O_3A_1P = 180^\circ - \angle O_2A_1O_3 = \angle O_2PO_3; \end{aligned}$$

$$\angle P_2P_3P = \angle P_2A_1P = \angle O_2A_1P = \angle O_2O_3P。$$

由此可知：有向角 $\angle P_2PP_3$ 與 $\angle O_2PO_3$ 方向相同、大小相等，而且 $\triangle PP_2P_3 \sim \triangle PO_2O_3$ 。若 $P_2 = A_1$ ，則同理可得相同的結果。

仿前面的論證，可知：有向角 $\angle Q_2PQ_3$ 與 $\angle O_2PO_3$ 方向相同、大小相等，而且 $\triangle PQ_2Q_3 \sim \triangle PO_2O_3$ 。於是，有向角 $\angle P_2PP_3$ 與 $\angle Q_2PQ_3$ 方向相同、大小相等，而且 $\triangle PP_2P_3 \sim \triangle PQ_2Q_3$ 。同理，可知：有向角 $\angle P_3PP_1$ 與 $\angle Q_3PQ_1$ 方向相同、大小相等，而且 $\triangle PP_3P_1 \sim \triangle PQ_3Q_1$ ；有向角 $\angle P_1PP_2$ 與 $\angle Q_1PQ_2$ 方向相同、大小相等，而且 $\triangle PP_1P_2 \sim \triangle PQ_1Q_2$ 。於是，得

$$\frac{\overrightarrow{P_2P_3}}{\overrightarrow{Q_2Q_3}} = \frac{\overrightarrow{P_3P_1}}{\overrightarrow{Q_3Q_1}} = \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{Q_1Q_2}} = \frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{PQ_1}} = \frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{PQ_2}} = \frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{PQ_3}}。$$

因爲三對有向角分別相等且上述對應邊長的比值相等，所以，可知所欲證的性質成立。

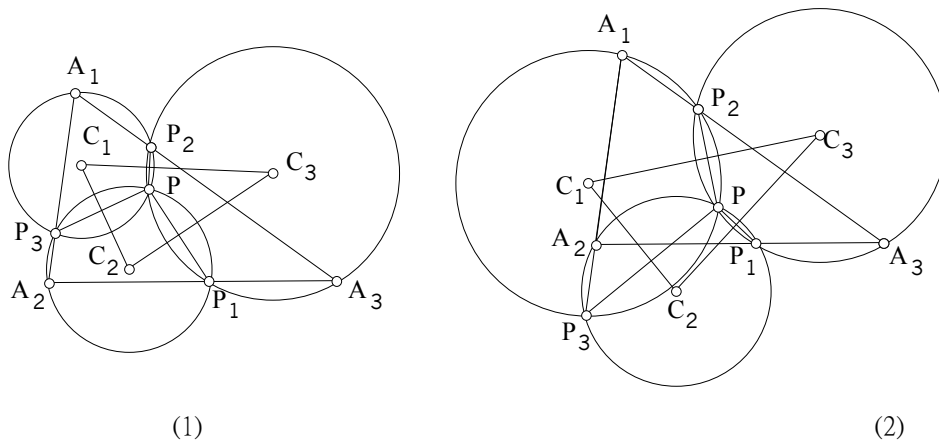


圖 6

(2) 設 $\triangle P_1P_2P_3$ 為點 P 對 $\triangle A_1A_2A_3$ 的一個 Miquel 三角形，而圓 $A_1P_2P_3$ 、圓 $A_2P_3P_1$ 與圓 $A_3P_1P_2$ 的圓心分別為 C_1 、 C_2 與 C_3 。要完整地證明 $\triangle C_1C_2C_3 \sim \triangle A_1A_2A_3$ ，必須像定理 2 後面那段敘述中所說明的，就點 P_1 、 P_2 與 P_3 的位置組合加以分類。此處我們不一一分類，而只舉兩個情形為例。

設點 P_1 、 P_2 與 P_3 分別在 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_3A_1}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 上，而點 P 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 的內部，如圖 6(1) 所示。因為 $\overline{PP_3}$ 是圓 $A_1P_2P_3$ 與圓 $A_2P_3P_1$ 的公共弦，所以，連接兩圓圓心的直線 C_1C_2 與 $\overline{PP_3}$ 垂直。同理，直線 C_1C_3 與 $\overline{PP_2}$ 垂直。於是，得

$$\angle C_2C_1C_3 = 180^\circ - \angle P_2PP_3 = \angle A_2A_1A_3。$$

同理，可得 $\angle C_3C_2C_1 = \angle A_3A_2A_1$ 及 $\angle C_1C_3C_2 = \angle A_1A_3A_2$ 。由此可知： $\triangle C_1C_2C_3 \sim \triangle A_1A_2A_3$ 。

設點 P_1 與 P_2 分別在 $\overline{A_2A_3}$ 與 $\overline{A_3A_1}$ 上、點 P_3 在直線 A_1A_2 上且點 A_2 介於點 A_1 與點 P_3 之間，而點 P 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 的內部，如圖 6(2) 所示。仿前段的證法，可得 $\angle C_2C_1C_3 = \angle A_2A_1A_3$ 及 $\angle C_1C_3C_2 = \angle A_1A_3A_2$ 。另一方面，可得

$$\angle C_3C_2C_1 = 180^\circ - \angle P_3PP_1 = 180^\circ - \angle P_3A_2P_1 = \angle A_3A_2A_1。$$

由此可知： $\triangle C_1C_2C_3 \sim \triangle A_1A_2A_3$ 。||

前面所得的結果中，可以得出兩個逆方向的性質，我們寫成兩個定理。

定理 7：設 $\triangle A_1A_2A_3$ 為任意三角形。若 $\triangle P_1P_2P_3$ 與 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 是兩個相異而同方向的相似三角形，且對應頂點 P_1 與 Q_1 在直線 A_2A_3 上、對應頂點 P_2 與 Q_2 在直線 A_3A_1 上、對應頂點 P_3 與 Q_3 在直線 A_1A_2 上，則 $\triangle P_1P_2P_3$ 與 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 對 $\triangle A_1A_2A_3$ 的 Miquel 點相同，這個共同的 Miquel 點是它們的相似中心。特例：當這兩個三角形恰有一對對應頂點重合時，它們的共同 Miquel 點就是這個頂點。由上述結果立即可知：若一組同方向的相似三角形的對應頂點都共線，則它們有一個共同的相似中心。

證：我們先假設特例成立而以特例證明一般情形。設 $P_k \neq Q_k, k=1, 2, 3$ 。若三點集 $\{P_1, P_2, P_3\}$ 對 $\triangle A_1A_2A_3$ 的 Miquel 點為點 P ，則點 P 不是 $\triangle A_1A_2A_3$ 的頂點。因為直線 A_2A_3 、 A_3A_1 與 A_1A_2 中至多只有一直線會通過點 P ，所以，我們設直線 A_2A_3 與 A_3A_1 不通過點 P 。於是， $P \neq Q_1$ 。作圓 A_3Q_1P 。（若 $Q_1 = A_3$ ，則圓 A_3Q_1P 是指通過點 P 而與直線 A_2A_3 相切於點 A_3 的圓。）因為圓 A_3Q_1P 與直線 A_3A_1 已有一交點 A_3 ，所以，它們有另一交點 R_2 且 $P \neq R_2$ 。同理，作圓 A_1R_2P ，設此圓與直線 A_1A_2 的交點為 A_1 與 R_3 。由此可知：點 P 是三點集 $\{Q_1, R_2, R_3\}$ 對 $\triangle A_1A_2A_3$ 的 Miquel 點。因為 $\triangle P_1P_2P_3$ 與 $\triangle Q_1R_2R_3$ 都是點 P 對 $\triangle A_1A_2A_3$ 的 Miquel 三角形，所以，依定理 6(1)，可知 $\triangle P_1P_2P_3$ 與 $\triangle Q_1R_2R_3$ 是同方向的相似三角形。因為 $\triangle P_1P_2P_3$ 與 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 也是同方向的相似三角形，所以，可知 $\triangle Q_1R_2R_3$ 與 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 也是同方向的相似三角形。我們欲證明 $R_2 = Q_2$ 且 $R_3 = Q_3$ 。假設 $R_2 \neq Q_2$ 或 $R_3 \neq Q_3$ ，則因為有向角 $\angle R_2Q_1R_3$ 與有向角 $\angle Q_2Q_1Q_3$ 方向相同且大小相等，所以， $R_2 \neq Q_2$ 且 $R_3 \neq Q_3$ 。於是， $\triangle Q_1R_2R_3$ 與 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 恰有一對對應頂點重合。依特例的結果，它們的共同 Miquel 點是點 Q_1 ，但前面已知三點集 $\{Q_1, R_2, R_3\}$ 對 $\triangle A_1A_2A_3$ 的 Miquel 點為點 P 且 $P \neq Q_1$ ，這是一個矛盾的結果。因此， $R_2 = Q_2$ 、 $R_3 = Q_3$ 且點 P 是三點集 $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ 對 $\triangle A_1A_2A_3$ 的 Miquel 點。

其次，我們要證明特例，亦即：若 $P_1 = Q_1$ 、 $P_2 \neq Q_2$ 且 $P_3 \neq Q_3$ ，則在定理的假設下， $\triangle P_1P_2P_3$ 與 $\triangle P_1Q_2Q_3$ 的 Miquel 點都是點 P_1 。

若 $P_1 = A_3$ ，則因為點 P_1 、 P_2 、 Q_2 共線，且有向角 $\angle Q_2P_1Q_3$ 與有向角 $\angle P_2P_1P_3$ 方向相同、大小相等，所以，點 P_1 、 P_3 、 Q_3 共線，因而得 $P_1 = A_2$ ，這是不可能的。因此， $P_1 \neq A_3$ 。同理， $P_1 \neq A_2$ 。參看圖 7(1)與圖 7(2)。

我們仿照定理 2 的方法採用複數坐標來證明，設點 A_1 、 A_2 與 A_3 的複數坐標分別為 z_1 、 z_2 與 z_3 ，點 P_1 、 P_2 與 P_3 的複數坐標分別為 $w_1 = (1-t_1)z_2 + t_1z_3$ 、 $w_2 = (1-t_2)z_3 + t_2z_1$ 與 $w_3 = (1-t_3)z_1 + t_3z_2$ ，點 Q_2 與 Q_3 的複數坐標分別為 $v_2 = (1-s_2)z_3 + s_2z_1$ 與 $v_3 = (1-s_3)z_1 + s_3z_2$ 。因為 $\triangle P_1Q_2Q_3$ 與 $\triangle P_1P_2P_3$ 是同方向的相似三角形，所以，得

$$\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2} = \frac{w_1 - v_3}{w_1 - v_2}。$$

因為 $Q_2 \neq P_2$ 且 $Q_3 \neq P_3$ ，所以， $s_2 \neq t_2$ 且 $s_3 \neq t_3$ 。

若 $Q_2 \neq A_1$ 且 $Q_3 \neq A_1$ ，則 $s_2 \neq 1$ 且 $s_3 \neq 0$ 。於是，依和比定理，可得

$$\frac{w_1 - v_3}{w_1 - v_2} = \frac{v_3 - w_3}{v_2 - w_2} = \frac{-(1-s_2)(s_3-t_3)}{s_3(s_2-t_2)} \times \frac{z_1 - v_3}{z_1 - v_2}。$$

上式表示： $[(w_1 - v_3)/(w_1 - v_2)] : [(z_1 - v_3)/(z_1 - v_2)]$ 是一個非 0 的實數。依引理 3，可知點 A_1 、 P_1 、 Q_2 與 Q_3 共圓，亦即：圓 $A_1Q_2Q_3$ 通過點 P_1 。因為圓 $A_2Q_3P_1$ 與圓 $A_3P_1Q_2$ 也都通過

點 P_1 ，所以，三點集 $\{P_1, Q_2, Q_3\}$ 對 $\triangle A_1A_2A_3$ 的 Miquel 點為點 P_1 。

設 $Q_2 = A_1$ ，則 $Q_3 \neq A_1$ (即 $s_3 \neq 0$)，而且圓 $A_1Q_2Q_3$ 乃是過點 Q_3 而與直線 A_3A_1 相切於點 A_1 的圓。因為 $\triangle P_1P_2P_3$ 與 $\triangle P_1A_1Q_3$ 是同方向的相似三角形，所以，當 $P_3 \neq A_1$ (即 $t_3 \neq 0$) 時，可得

$$\frac{w_3 - w_2}{w_1 - w_2} = \frac{v_3 - z_1}{w_1 - z_1} = \frac{s_3}{t_3} \times \frac{w_3 - z_1}{w_1 - z_1}。$$

上式表示： $[(w_3 - w_2)/(w_1 - w_2)] : [(w_3 - z_1)/(w_1 - z_1)]$ 是一個非 0 的實數。依引理 3，可知點 A_1 、 P_1 、 P_2 與 P_3 共圓。於是，必有一個非 0 的實數 r 使得

$$\frac{w_1 - z_1}{w_2 - z_1} = r \times \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} = r \times \frac{w_1 - v_3}{z_1 - v_3}。$$

上式表示： $[(w_1 - z_1)/(w_2 - z_1)] : [(w_1 - v_3)/(z_1 - v_3)]$ 是一個非 0 的實數。依引理 4，可知點 P_1 在過點 Q_3 而與直線 A_3A_1 相切於點 A_1 的圓上，亦即：圓 $A_1Q_2Q_3$ 通過點 P_1 。因為圓 $A_2Q_3P_1$ 與圓 $A_3P_1Q_2$ 也都通過點 P_1 ，所以，三點集 $\{P_1, Q_2, Q_3\}$ 對 $\triangle A_1A_2A_3$ 的 Miquel 點為點 P_1 。當 $Q_2 = A_1$ 且 $P_3 = A_1$ 時，因為 $\triangle P_1P_2A_1$ 與 $\triangle P_1A_1Q_3$ 為同方向的相似三角形，所以，可得

$$\frac{w_1 - z_1}{w_2 - z_1} = \frac{w_1 - v_3}{z_1 - v_3}。$$

仿前面的說明，可知三點集 $\{P_1, Q_2, Q_3\}$ 對 $\triangle A_1A_2A_3$ 的 Miquel 點為點 P_1 。

若 $Q_3 = A_1$ ，則仿前段的論證，可知三點集 $\{P_1, Q_2, Q_3\}$ 對 $\triangle A_1A_2A_3$ 的 Miquel 點為點 P_1 。

同理，可證得三點集 $\{P_1, P_2, P_3\}$ 對 $\triangle A_1A_2A_3$ 的 Miquel 點也是點 P_1 。||

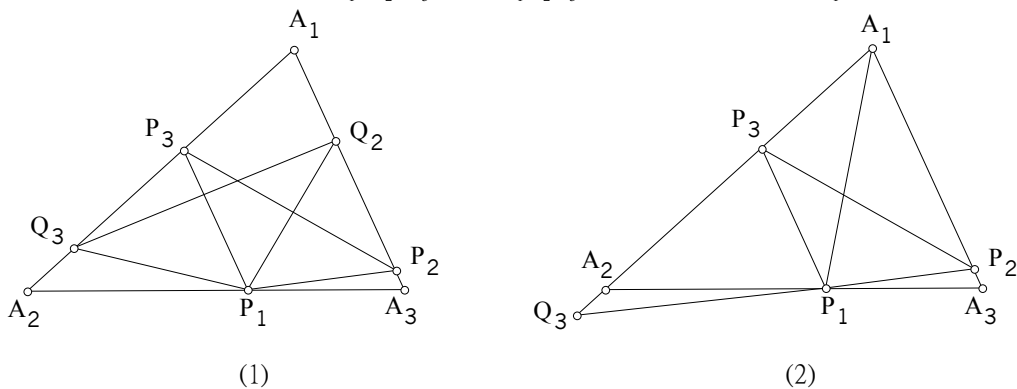


圖 7

定理 8：若圓 O_1 、圓 O_2 與圓 O_3 交於一點 P 且其中至多只有兩圓相切，則對於圓 O_1 上異於點 P 的每個點 A_1 ，都可在圓 O_2 與圓 O_3 上分別找到點 A_2 與 A_3 ，使得直線 A_2A_3 、 A_3A_1 與 A_1A_2 分別通過三圓中兩兩的另一交點。更進一步地，所有此種 $\triangle A_1A_2A_3$ 都彼此相

似。

證：設圓 O_2 與圓 O_3 的另一個交點為點 P_1 ，圓 O_3 與圓 O_1 的另一個交點為點 P_2 ，圓 O_1 與圓 O_2 的另一個交點為點 P_3 。因為三圓中至多只有兩圓相切，所以，點 P_1 、 P_2 與 P_3 兩兩相異，而且其中至多只有一點與點 P 重合。設直線 A_1P_3 與圓 O_2 的另一個交點為點 A_2 ，直線 A_1P_2 與圓 O_3 的另一個交點為點 A_3 。（若 $A_1=P_3$ ，則點 A_2 乃是圓 O_1 過點 P_3 的切線與圓 O_2 的另一個交點。）

因為點 P_1 、 P_2 與 P_3 中至多只有一點與點 P 重合，所以，我們可設 $P \neq P_3$ 。設圓 A_2P_3P (即圓 O_2) 與直線 A_2A_3 的另一交點為點 Q_1 ，我們只須證明 $Q_1=P_1$ 。因為點 Q_1 、 P_2 與 P_3 兩兩相異，且分別在 $\triangle A_1A_2A_3$ 的邊線 A_2A_3 、 A_3A_1 與 A_1A_2 上，所以，依定理 2，圓 $A_1P_2P_3$ (即圓 O_1)、圓 $A_2P_3Q_1$ 與圓 $A_3P_2Q_1$ 交於一點。因為圓 $A_1P_2P_3$ (即圓 O_1) 與圓 $A_2P_3Q_1$ (即圓 O_2) 都過點 P ，所以，此三圓的交點為點 P 。因為圓 $A_3P_2Q_1$ 過點 P ，所以，圓 $A_3P_2Q_1$ 就是圓 O_3 。因為圓 $A_2P_3Q_1$ 與圓 $A_3P_2Q_1$ 的另一交點為點 Q_1 ，而圓 O_2 與圓 O_3 的另一個交點為點 P_1 ，所以，得 $Q_1=P_1$ ，亦即：點 A_2 、 A_3 與 P_1 共線。

至於所有此種 $\triangle A_1A_2A_3$ 都彼此相似，顯然成立。||

將 Miquel 定理所對應的圖形做適當的反轉 (inversion)，可以得出一些有趣的結果，我們說明如下：設點 P 是三點集 $\{P_1, P_2, P_3\}$ 對 $\triangle A_1A_2A_3$ 的 Miquel 點，而且點 A_1 、 A_2 、 A_3 、 P_1 、 P_2 、 P_3 與 P 等七點兩兩相異。

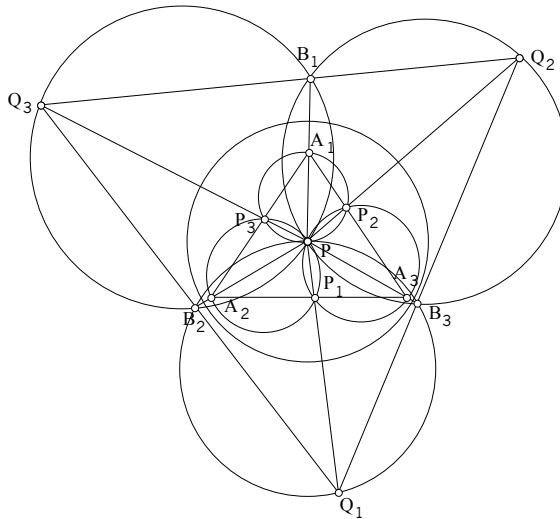


圖 8

設反轉圓的圓心為點 P ，而點 A_1 、 A_2 、 A_3 、 P_1 、 P_2 與 P_3 的反轉像分別為點 B_1 、 B_2 、 B_3 、 Q_1 、 Q_2 與 Q_3 ，則圓 $A_1P_2P_3$ 、 $A_2P_3P_1$ 與 $A_3P_1P_2$ 上異於點 P 的所有點分別反轉成直線 Q_2Q_3 、

如下。

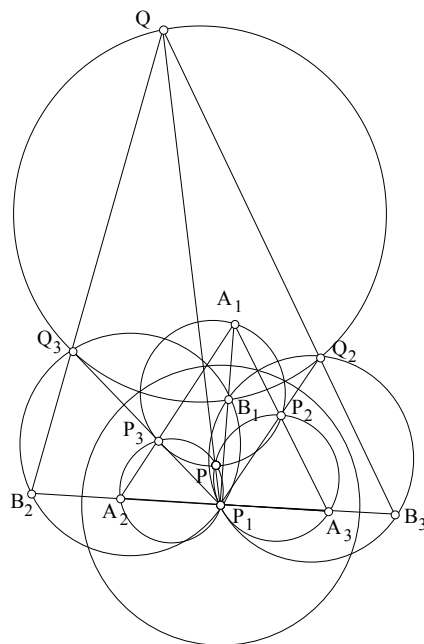


圖 10

定理 9：設點 B_1 、 B_2 、 B_3 、 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 與 O 為同一平面上七個相異點，而圓 $B_2B_3Q_1$ 、 $B_3B_1Q_2$ 、 $B_1B_2Q_3$ 、 $B_1Q_2Q_3$ 、 $B_2Q_3Q_1$ 與 $B_3Q_1Q_2$ 是互不重合的六個相異圓。若圓 $B_2B_3Q_1$ 、 $B_3B_1Q_2$ 與 $B_1B_2Q_3$ 交於點 O ，則圓 $B_1Q_2Q_3$ 、 $B_2Q_3Q_1$ 與 $B_3Q_1Q_2$ 也共點。

證：以點 O 為反轉中心作反轉。設點 B_1 、 B_2 、 B_3 、 Q_1 、 Q_2 與 Q_3 的反轉像分別為點 A_1 、 A_2 、 A_3 、 P_1 、 P_2 與 P_3 ，則圓 $B_2B_3Q_1$ 、 $B_3B_1Q_2$ 與 $B_1B_2Q_3$ 上異於點 O 的所有點分別反轉成直線 A_2A_3 、 A_3A_1 與 A_1A_2 ，因而形成 $\triangle A_1A_2A_3$ ，且點 P_1 、 P_2 與 P_3 分別在它的三條邊線上。依定理 2，圓 $A_1P_2P_3$ 、 $A_2P_3P_1$ 與 $A_3P_1P_2$ 共點，設其交點為 P 。因為圓 $B_3B_1Q_2$ 與 $B_1B_2Q_3$ 是相異的圓，所以，圓 $B_1Q_2Q_3$ 不過點 O 。於是，其反轉像是不過點 O 的圓，亦即：圓 $A_1P_2P_3$ 不過點 O 。由此可知： $P \neq O$ ，並設點 P 的反轉像為點 Q 。因為圓 $B_1Q_2Q_3$ 、 $B_2Q_3Q_1$ 與 $B_3Q_1Q_2$ 分別為圓 $A_1P_2P_3$ 、 $A_2P_3P_1$ 與 $A_3P_1P_2$ 的反轉像，而圓 $A_1P_2P_3$ 、 $A_2P_3P_1$ 與 $A_3P_1P_2$ 交於點 P ，所以，圓 $B_1Q_2Q_3$ 、 $B_2Q_3Q_1$ 與 $B_3Q_1Q_2$ 交於點 P 的反轉像 Q 。 || (待續)