中學生通訊解題第八期參考解答與評析

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
89801

設 a,b,c,d 爲任意數，且 a+b=c,b+c=d,c+d=a，若 b 是一個自然數，試求 a+b+c+d 的最大值？

參考解答一：

a+b=c---(1)

b+c=d---(2)

c+d=a---(3)

則(1)+(2)+(3) ⇒ 2b+c=0 ⇒c=-2b 代入(1)得 a=-3b 由(1)+(3)得 b=-d

故 a+b+c+d=-3b+b-2b-b=-5b≦-5

即最大可能值爲-5（此方法由北市仁愛國中吳宗哲提供）

參考解答二：

a+b=c---(1)

b+c=d---(2)

c+d=a---(3)

則(1)+(3) ⇒ a+b+c+d = a+c ⇒b=-d---(4)

由題意 b 爲正整數⇒ $b \geq 1 \Rightarrow d \leq -1$

(4)代入(1) ⇒a-d=c ---(5)

(4)代入(2) ⇒c-d=d ⇒c=2d ---(6

(6)代入(5) ⇒a-d=2d ⇒a=3d ---(7)

則 a+b+c+d=3d-d+2d+d=5d≦-5

故 a+b+c+d 最大值爲-5（此方法由北市永吉國中黃紹倫提供）

評析：

1.本題旨在檢測同學對加法律與消去律的概念。

2.答題優良者，台北市仁愛國中吳宗哲，永吉國中黃紹倫，師大附中國中部黃道生，北縣江翠國中黃明山，特別是吳宗哲方法簡潔扼要。

3.參答人數有 242 人，平均得分數 5.24 分，得分率爲 74.86% 。

問題編號
89802

設 a 爲任意數，符號[a]表示不大於 a 的最大整數，符號(a)表示 a－[a]，試求下列聯立方程式的解？

$$\begin{cases} x+[y]+(z)=1.5---(1) \\ y+[z]+(x)=7.7---(2) \\ z+[x]+(y)=2.6---(3) \end{cases}$$

參考解答：

(1)+(2)+(3) ⇒　2(x+y+z)=11.8　⇒　x+y+z=5.9---(4)

(2)+(1)　⇒　x+y+z+[y]+(x)=9.2　⇒　[y]+(x)=3.3　⇒[y]=3, (x)=0.3

(2)+(3)　⇒　x+y+z+[z]+(y)=10.3　⇒　[z]+(y)=4.4　⇒[z]=4, (y)=0.4

(3)+(1)　⇒　x+y+z+[x]+(z)=4.1　⇒　[x]+(z)=-1.8=-2+0.2

⇒　[x]=-2,(z)=0.2

∴x=−1.7, y=3.4, z=4.2

評析：

1.本題爲變相的三元一次聯立方程式。主要想看同學是否能靈活的思考，將數做正確的拆解，再做適當的合併。

2.答題優良者，台北市民生國中林介昊、金華國中蔣佳君、敦化國中薛伊婷、北投國中周書緯、永吉國中黃國僑、弘道國中賴楷文、師大附中國中部黃道生、螢橋國中陳玉潔、、仁愛國中吳宗哲、高縣鳳西國中葉仲恆、台北縣永和國中張嚴修、新莊國中吳之堯、彰化陽明國中陳民澤、基隆市銘傳國中施良儒、新竹市光華國中賴俊儒、高雄市立志中學蔡政江等人，解題扼要清晰、堪爲表率。

3.參答人數有 189 人，平均得分數 5.76 分，得分率爲 82.29% 。

問題編號
89803

實驗室的木盒裡有 n 種不同法碼，每種法碼個數有足夠多個，且每個重量分別爲 1 克, $\frac{1}{2}$ 克,…., $\frac{1}{n}$ 克。今有 A_1,A_2,…..An 等 n 位同學依照下列規則從木盒裡取出法碼，並將之放在天平上。他們的取法爲：A_1 同學每種法碼取 1 個，A_2 同學第 1 種法碼不取,其餘每種法碼各取 3 個，……，A_n 同學前 n-1 種法碼不取，第 n 種碼法取 2n-1 個。試問所有同學取的法碼在天平上顯示的總重量是不是整數？

參考解答：

總重量

$=1\times(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})+3\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})+$

$5\times(\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n})+\ldots\ldots+(2n-3)\times(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})+(2n-1)\times(\frac{1}{n})$

$=\frac{1}{n}\times[1+3+5+\ldots\ldots+(2n-1)]+\frac{1}{n-1}\times[1+3+5+\ldots.(2n-3)]+\ldots..+\frac{1}{3}\times(1+2+3)+\frac{1}{2}\times(1+3)+1\times1$

$=\frac{1}{n}\times n^2+\frac{1}{n-1}\times(n-1)^2+\ldots..+\frac{1}{3}\times3^2+\frac{1}{2}\times2^2+1\times1$

$=n+(n-1)+\ldots..+3+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$ 故總重量爲整數

評析：

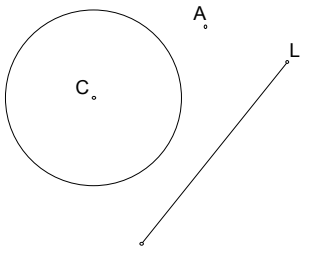
1.本題主要在測驗學生等差級數的概念與序列求和重組的技巧，題目比較簡單答題人數非常多。

2.答題優良者：台北市明德國中王琨傑，螢橋國中吳亦緯、陳玉潔，北投國中黃愛茹，民生國中林介昊、鍾佳琦，陽明國中陳明澤，台師大附中黃道生，仁愛國中吳宗哲，永吉國中黃紹倫、黃國僑，大直高中國中部陳俊曄，基隆市銘傳國中江政融，台北縣新莊國中潘柏諺，新泰國中沈文超、沈文強，永和國中宋岳穎，高雄縣鳳西國中葉仲恆，彰化縣彰和國中陳予勁。

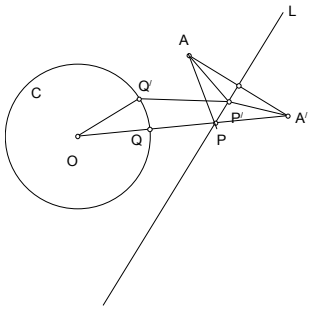
3.參答人數 262 人，平均得分數 5.89 分，得分率 84.14%。

問題編號
89804

已知圓 C，直線 L 及定點 A，如圖所示：利用幾何作圖在直線 L 及圓 C 上各找出一點 P 與 Q, 使 $\overline{AP}+\overline{PQ}$ 之值最小？



參考解答：



＜作法＞1.作定點 A 關於直線 L 之對稱點 A'

2.將圓 C 之圓心 O 與 A'連線，分別交直線 L 與圓 C 於 P,Q 兩點則 P,Q 兩點即爲所求

＜證明＞在直線 L 及圓 C 上各任取一點 P'及 Q',

連接$\overline{A'P'}$,$\overline{AP'}$,$\overline{AP}$,$\overline{P'Q'}$,$\overline{Q'O}$,則$\overline{AP}=\overline{A'P}$,$\overline{AP'}=\overline{A'P'}$

∵任意兩點間以直線連接之路徑爲最短

∴ $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QO}=\overline{A'O}\le\overline{A'P'}+\overline{P'Q'}+\overline{Q'O}=\overline{AP'}+\overline{P'Q'}+\overline{Q'O}$

∵ $\overline{QO}=\overline{Q'O}$=半徑

∴ $\overline{AP}+\overline{PQ}\le\overline{AP'}+\overline{P'Q'}$

故 P,Q 兩點即爲所求

評析：

1.能掌握「對稱」與「兩點間之距離以直線爲最短」的觀念即可輕易解出本題，本題旨在檢測同學們的「對稱」與「兩點間之距離以直線爲最短」的觀念及是否能運用它們來解題。

2.答題優良者，台北市敦化國中洪仕安、仁愛國中吳宗哲、北投國中黃愛茹、民生國中鍾佳琦、林介昊、南門國中林柏宇、台北縣永和國中張嚴修、明德國中王琨傑、新莊國中潘柏諺，等人。

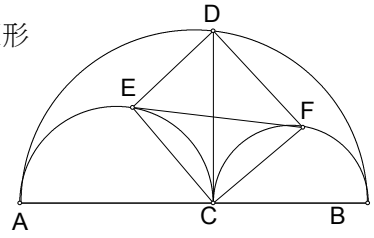
3.參答人數有 212 人，平均得分數 4.92 分，得分率爲 70.29% 。

問題編號
89805

設 C 是線段 AB 上的任意一點，在線段 AB 的同側分別以 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$，$\overline{CB}$ 爲直徑畫三個半圓，如圖：

設 D 爲以 $\overline{AB}$ 爲直徑的半圓上的一點，且 $\overline{CD}$ 垂直 $\overline{AB}$ ，又設 E 和 F 依次是以 AC 和 CB 爲直徑的半圓上的點且 $\overline{EF}$ 是這兩個半圓的公切線的一段。

試證：ECFD 是一個矩形



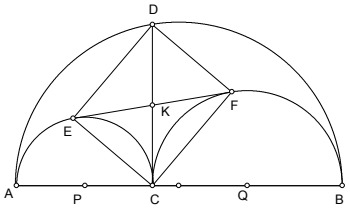
參考解答一：

如右圖，

1.∵ $\overline{CD}$ 切圓 P、圓 Q 於 C，又 $\overline{EF}$ 爲外公切線

∴ $\overline{KE}=\overline{KC}=\overline{KF}$ 。

2.令 $\overline{AP}$ =R， $\overline{QB}$ =r，∵ $\overline{CD}\perp\overline{AB}$ ， $\overline{AB}$ 爲直徑，



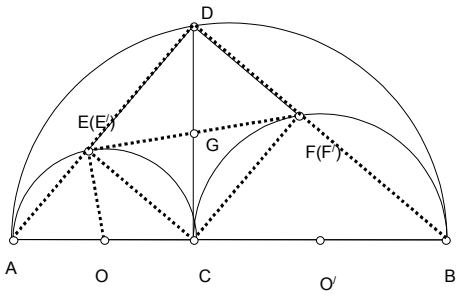
$\therefore \overline{CD}^2=\overline{AC}\cdot\overline{CB} \Rightarrow \overline{CD}=\sqrt{2R\cdot 2r}=2\sqrt{Rr}$

又 $\overline{EF}$ 爲圓 P、圓 Q 之外公切線，　所以 $\overline{EF}=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{Rr}$。

因此，$\overline{CD}=\overline{EF}$ 。

3.由 1.2.可推得 $\overline{KE}=\overline{KC}=\overline{KF}=\overline{KD}$ ⇒ ECFD 爲矩形。

參考解答二：如右圖



(1)連接 $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ 分別交兩個小圓於 E′、F′

連接CE′、CF′、E′F′，E′F′與CD交於 G

(2)∵ ∠ADB=∠AE′C=∠BF′C=90°

∴ ∠CE′D=∠CF′D=90°

⇒四邊形 E′CF′D 爲矩形。

(3)取AC的中點 O，連OE′

⇒ ∠CAE′=∠AE′O 且 ∠CAE′=∠DCE′ （同弧的圓周角與弦切角）

又∵ G 爲矩形 E′CF′D 兩對角線之交點 ∴ GE′=GC，∠F′E′C=∠DCE′

⇒∠AE′O=∠CAE′=∠DCE′=∠F′E′C　　故∠AE′O=∠F′E′C

⇒∠OE′F′=∠F′E′C+∠CE′O =∠AE′O+∠CE′O =∠AE′C=90°

所以OE′⊥E′F′，同理O′F′⊥E′F′ 。

(4)因爲在大圓內兩個小圓的外公切線只有一條，所以 E=E′ 且 F=F′ 。

故可證得四邊形 ECFD 爲矩形。（此方法由北縣新莊國中潘柏諺同學提供）

評析：

(1)目前國中教材中幾何證明部分內容已大幅減少，本題主要目的在加強學生幾何證明的能力。由參答學生人數，明顯看出國中學生對幾何證明的解題能力有待加強。

(2)本題的徵答者中，有一些同學都將 A、E、D 或是 B、F、D 視爲共線，這是錯誤的想法，因爲這就是本題所要求證的關鍵。

(3)答題優良的有：北市螢橋國中吳奕緯、陳玉潔、永吉國中陳思翰、明德國中王琨傑、南門國中李舒平、民生國中張哲瑞、金華國中趙心宇、馬欣婕、台北縣中山國中張源平、永和國中陳宏泰、鄭宇翔、福和國中楊智寰、劉胤廷、江翠國中黃明山、彰化縣陽明國中李昱融、高市立志中學蔡政江、高雄縣鳳西國中葉仲恆、彰化縣員林國中楊益銓、基隆市銘傳國中江政融、新竹市光華國中賴俊儒、以上同學採用的是參考解答一的做法，北縣新莊國中潘柏諺、吳之堯兩位同學均採用參考解答二之做法，此種解法是很漂亮的解法。

(4)參與徵答的共有 49 位同學，平均得分數 5.4 分，得分率爲 77%。