

「虛擬進退」的數學解題

許建銘
高雄市龍華國民中學

一、思想起……

聽過兩位開雜貨店的老闆做生意的故事：其中一個老闆生意做得很好，而另一個比較差。問題出在：第一個老闆，當顧客上門買東西時，一定先把顧客要的斤兩故意秤不夠，之後再逐漸加兩到足夠的重量。而另一個老闆，並不在乎這點，他常常是先大把抓起來秤，如果超重，只好一次再一次減量，最後才秤好顧客要的斤兩。

姑且不論兩位老闆的方法是否一定會帶給顧客不同的感受或導致生意的成敗。單純以數學的角度看，兩者解決問題的方法就是拿捏好「進退增減」的分寸罷了！

二、童年遊戲……

這是一個簡單的遊戲，一人拿了 10 枚銀幣置於桌上，並告訴另一人說：「等一下我背向你時，你一次把一枚或兩枚銀幣放成一堆，但每做成一堆，就跟我說一聲『好！』直到把 10 枚銀幣全部放成若干堆。然後我要猜出桌上 2 枚與 1 枚數目的銀幣各多少堆？」

說完後便轉過身去，另一人也開始堆銀幣，且每堆 1 枚或 2 枚便跟著說一聲『好！』10 枚銀幣堆好了，譬如說堆銀幣的人共說了 7 聲『好！』猜者也馬上毫不猶豫的說出：「2 枚的 3 堆，1 枚的 4 堆。」

三、思路無限寬廣……

(一)上面的遊戲，如果換成代數的解法，可能是這樣解的：

設 2 枚的 x 堆，1 枚的 y 堆

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = 4$$

但猜者並不是用上面那種方式計算出答案的。猜題的小朋友因怕分心而把『好』的次數算錯，於是用自己的手指頭幫忙計算，同時他也想到：如果總共只有 5 聲『好』，那麼 5 堆一定都是 2 枚的。所以當聽到第 6 聲『好』時，他就暗自把原來握拳的 5 根手指頭打開一指，之後，再多聽到一聲『好』，就又打開一根手指頭。最後藉由自己手上彎曲的手指頭有多少根，便知道 2 枚的有幾堆，自然那些打開的手指頭都是從 2 枚一堆變成 1 枚兩堆的，只要把打開的手指頭數乘以 2，便是 1 枚銀幣的堆數了。

「虛擬進退」是一種極普通且實用的解題觀念：解題者藉著「虛擬的情境」或「虛

設的標準」，把實際問題中的某些數量，經由適度的「應對進退」，使「別開生面」的解法也可以得到「異曲同工」的解題目標。就如同上例中猜銀幣的小朋友，把銀幣堆數預設成 5 堆 2 枚，再逐步增減 1 枚和 2 枚數目的道理一樣。而且教師透過「創意」與「正規」解題的比較，可以啟發更多學習者不一樣的解題與創意思維的能力。以下讓我們再看幾個國中課程的例子：

(二)這一道問題，是許多國中生學習數學時，常算到的問題：

雞兔同籠，共有 16 頭，54 隻腳，問雞、兔各多少隻？

大部分的教師只教應用方程式的解法：

設雞 x 隻，兔 y 隻

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ 2x + 4y = 54 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 11 \quad \text{答：雞 2 隻，兔 11 隻。}$$

如果把之前解銀幣問題的想法，應用在此問題上，我們將可以得到以下的解法：

如果 16 隻都是雞，應該有 32 隻腳。但把一隻雞換成一隻兔，那麼腳便多出 2 隻來。
 $54 - 32 = 22$ ，既然多了 22 隻腳，所以 $22 \div 2 = 11$ ，即有 11 隻兔，當然雞便是 $16 - 11 = 5$ 隻了。

日本一位小學生，虛擬一個很有趣的情境：

他說：「我住鄉下，家裏養許多雞和兔，每次我只要吹一聲口哨，所有的雞都會『金雞獨立』，所有的兔馬上抬高前足，我只要算一算頭數與地上的腳數，就會知道雞和兔各有多少隻了。」

這位聰明的小學生的話，告訴我們解雞兔問題時，只要將腳數除以 2，再減去頭數就是兔子的隻數。

所以問題中的兔子有 $54 \div 2 - 16 = 11$ 隻，雞有 5 隻。

(三)「算法統宗」這本書中，有下列一道問題：

一百饅頭一百僧，大僧三個便無爭，

小僧三人分一個，大小和尚各幾個？

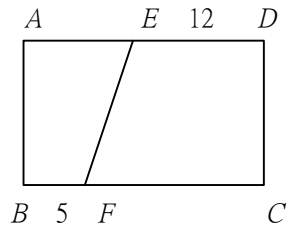
如果把它翻譯成白話，意思就是：一百個和尚分 100 個饅頭，剛好可以全部分完。如果大和尚一人分 3 個，小和尚三人分 1 個，問大、小和尚各多少人？

我們試著不用方程式的解法。假如眾和尚某日把三餐當一餐吃（虛擬的情境），那麼大和尚一人吃 9 個，小和尚一人吃 1 個，那一百個和尚便吃了 300 個饅頭。這時很容易看出，小和尚每人吃的饅頭數等於小和尚的人數，而大和尚每人吃的饅頭數比大和尚的人數多 8。

現在總饅頭數比總人數多 200，而 200 是 8 的 25 倍，由此推知大和尚有 25 人，小和

尚有 75 人。

(四)問題：有一矩形 $ABCD$ ， $\overline{ED}=12$ ， $\overline{BF}=5$ ，請算出左右兩個梯形的周長差？



有學生這樣算：

$$\text{設 } \overline{AE} = x \quad \therefore \overline{FC} = (x+12) - 5 = 7+x$$

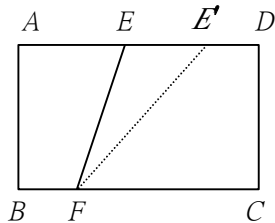
$$\begin{aligned} EFCD \text{ 周長} - ABFE \text{ 周長} &= (\overline{ED} + \overline{FC}) - (\overline{AE} + \overline{BF}) \\ &= (12 + 7 + x) - (x + 5) = 14 \end{aligned}$$

其實最快的解法是這樣：

$$\overline{ED} - \overline{BF} = 12 - 5 = 7 \quad \therefore \text{周長相差 } 7 \times 2 = 14$$

上面的解法是這樣推想的：

如果設 $\overline{E'D} = \overline{BF} = 5$ （虛設的標準），那左右周長是相等的。但現在 $\overline{ED}$ 比 $\overline{E'D}$ 的 5 還多了 7，這右左兩梯形邊長「一進一退」的改變，便相差 $7 \times 2 = 14$ ，所以右邊梯形比左邊梯形的周長多了 14。



(五)問題：有一矩形，長寬和為 36，面積 320，求長與寬各多少？

一元二次方程式的解法：

設長為 x ，寬為 $(36-x)$

$$x(36-x) = 320 \Rightarrow x^2 - 36x + 320 = 0 \quad (x-20)(x-16) = 0 \quad \therefore x = 20 \text{ 或 } 16$$

$$36 - x = 16 \text{ 或 } 20$$

答：長為 20，寬為 16。

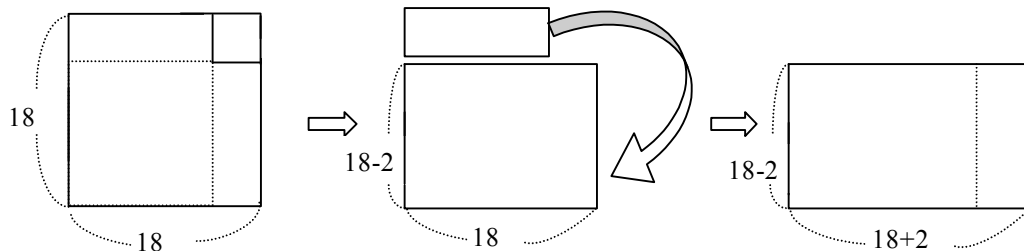
我們藉由圖解的輔助來說明另一解法：

我們虛設長與寬都等於 18，則面積等於 324

$$324 - 320 = 4 \quad \sqrt{4} = 2 \quad (\text{比原面積多 } 4, \text{ 即邊長 } 2 \text{ 之正方形面積})$$

$$18 + 2 = 20 \quad 18 - 2 = 16$$

就可以求得長為 20，寬為 16。



(六)問題：一個二位數的十位數字與個位數字和為 15，若將這個數的十位數字與個位數字對調位置，則所得的新數比原數小 27，問原數是多少？

應用方程式的解法：

設原數的個位數字為 x ，十位數字為 $(15-x)$

$$[10(15-x)+x]-27=10x+(15-x)$$

$$\Rightarrow 150-9x-27=9x+15 \Rightarrow 18x=108 \Rightarrow x=6$$

$$\therefore 15-x=15-6=9 \quad \text{故原數為 } 96。$$

如果現在把這個問題以「等價觀念」虛擬成另一個較生活化的問題：10 元和 1 元的硬幣共 15 個，若把 10 元與 1 元的硬幣個數互調，將比原有的錢少了 27 元，求原來的 10 元及 1 元硬幣各多少個？

當然如果用以上的代數解法將得到相同的解題過程與答案。不過，如果我們這樣想，把 1 個 10 元硬幣換成 1 個 1 元硬幣的話會少了 9 元。現在互換後少了 27 元，可見互換後各增減了 3 個，意即 10 元硬幣少 3 個，1 元硬幣多了 3 個。

所以更簡單的解法就變成：

設原數的十位數字為 x ，個位數字為 y

$$\begin{cases} x+y=15 \\ x-y=3 \end{cases}, \text{ 故 } x=9, y=6, \text{ 當然原來的數是 } 96 \text{ 了。}$$

(七)國中二次函數的問題：黃金旅行社招攬黃金旅遊兩天一夜旅行團，預定人數 30 人，每人收費 5000 元，但達到 30 人後，每增加 1 人則每人減收 100 元。問應增加多少個人，這旅行社才能收到最多的錢？最多共可收到多少錢呢？

解：設增加 x 個人，全部的收入為 y 元

$$\begin{aligned} \therefore y &= (30+x)(5000-100x) \\ &= -100x^2 + 5000x - 3000x + 150000 = -100x^2 + 2000x + 150000 \\ &= -100(x^2 - 20x + 10^2) + 150000 + 10000 \\ &= -100(x-10)^2 + 160000 \leq 160000 \end{aligned}$$

當 $x=10$ 時， y 有最大值 160000

答：應增加 10 人才能收到最多錢 160000 元

若假設 1 新元=100 元，則可以將原問題虛擬成如下的問題：黃金旅行社招攬黃金旅遊兩天一夜旅行團，預定人數 30 人，每人收費 50 新元，但達到 30 人後，每增加 1 人則每人減收 1 新元。問應增加多少個人，這旅行社才能收到最多的錢？最多共可收到多少錢呢？

我們應用「若兩正數和為定數時，取兩數相等，所得的乘積最大」的道理：問題中

$30+50=80$ 、 $31+49=80$ 、 $32+48=80$ ……，依序推得和是定數，所以取人數=40 人(即增加 10 人)，每人收費 40 新元=4000 元時，共可收最多錢 160000 元。

(八)目前國中數學課本第六冊「算術平均數」的單元中，是以「總和/個數」的方法計算平均數，道理雖然簡單，但是計算過程往往很麻煩。補充「補數」概念來輔助計算，是任課教師可以考慮的方法之一。

問題：下表是某班 47 個學生的身高次數分配表：

身高 (公分)	135 § 140	140 § 145	145 § 150	150 § 155	155 § 160	160 § 165	165 § 170	170 § 175
次數 (人)	2	7	10	12	5	8	2	1

求身高的算術平均數。(不足 0.1 公分四捨五入)

解法：假設算術平均數為 152.5 公分(虛設的標準)

原身高 中間值	137.5	142.5	147.5	152.5	157.5	162.5	167.5	172.5
偏差值	-15	-10	-5	-0	+5	+10	+15	+20
次數 (人)	2	7	10	12	5	8	2	1

$$(-15) \times 2 + (-10) \times 7 + (-5) \times 10 + 5 \times 5 + 10 \times 8 + 15 \times 2 + 20 \times 1$$

$$= 10 \times 1 + (-5) \times 5 + 20 \times 1 = 5$$

$$5 \div 47 \approx 0.1$$

所以身高算術平均數為 $152.5 + 0.1 = 152.6$ (公分)

四、許自己一個未來……

今日國內的中等數學教育，仍過於強調短期、立即效益，尤其太重視學生紙筆測驗的表現，而漠視「邊際效益」，忽略培養學生長期的學習興趣與解決問題的能力。所以教學活動常為「測驗」的狹窄內容而設計，因此容易失去活潑、建構、創意、樂趣及統整。我們共勉並期許每一位新時代的數學教師，不但要教活用的、有創意的、人性化的數學課程，更要不斷的觀摩進修、充實專業知識，尤其也要謙虛學習通俗而適切的教材溝通與表達能力，使課程自然呈現生動化與生活化的內涵，讓學生更喜愛學習數學。