Fermat 極值問題及其推廣（續）

趙文敏
國立臺灣師範大學　數學系

乙、第二等角中心

將甲小節中的向“外”作正三角形改成向“內”作正三角形，我們可以得出許多相類似的結果，而且還有內、外互動的新結果。下面的定理 6 與前面的定理 1 相似。

定理 6：設$\triangle A_1A_2A_3$爲非等邊的任意三角形。若$\triangle A_2A_3P_1'$、$\triangle A_3A_1P_2'$與$\triangle A_1A_2P_3'$爲正三角形，且點P_k'與點A_k在直線$A_{k+1}A_{k+2}$同側，k= 1, 2, 3，則直線A_1P_2'、A_2P_2'與A_3P_3'都通過一定點R'，三個正三角形$\triangle A_2A_3P_1'$、$\triangle A_3A_1P_2'$與$\triangle A_1A_2P_3'$的外接圓也都通過點R'，而且下述性質成立：

(1) 當只有α_1大於60°或只有α_1小於60°而α_2與α_3都不等於60°時，點R'在$\triangle A_1A_2A_3$的外部，而且點R'與點A_1在直線A_2A_3異側。

(2) 當$\alpha_1 = 60^\circ$時，$R'=A_1$。

證：因爲$\triangle A_1A_2A_3$不是正三角形，所以，點P_1'、P_2'與P_3'都不是$\triangle A_1A_2A_3$的頂點。

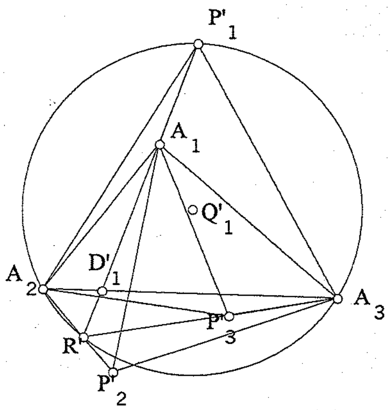
(1) 設只有α_1大於60°或只有α_1小於60°。若只有α_1大於60°，則點A_1位於$\triangle A_2A_3P_1'$的內部。若只有α_1小於60°，則點P_1'位於$\triangle A_1A_2A_3$的內部。在這兩種情形中，直線A_1P_1'與$\overline{A_2A_3}$相交於一點D_1'。作$\triangle A_2A_3P_1'$的外接圓，設圓心爲Q_1'。因爲直線A_1P_1'與外接圓Q_1'有一交點P_1'，所以，它們必有另一交點R'。因爲直線$D_1'P_1'$（即直線A_1P_1'）與$\overline{A_2A_3}$的交點在外接圓Q_1'內部，而點P_1'在圓Q_1'上，所以，直線$D_1'P_1'$與外接圓Q_1'的另一交點R'必與點P_1'在直線A_2A_3異側，亦即：點R'與點A_1在直線A_2A_3異側，也因此點R'在$\triangle A_1A_2A_3$外部。如圖 5(1)與圖 5(2)所示。

因爲$\angle A_2R'P_1' = \angle A_2A_3P_1'$而且$\angle A_3R'P_1' = \angle A_3A_2P_1'$，所以，$\angle A_2R'P_1' = \angle A_3R'P_1' = 60^\circ$。因爲$\angle A_3R'P_1' = 60^\circ = \angle A_3P_2'A_1$，所以，點$A_1$、$A_3$、$P_2'$與R'共圓。同理，點$A_1$、$A_2$、$P_3'$與R'也共圓。於是，三個正三角形$\triangle A_2A_3P_1'$、$\triangle A_3A_1P_2'$與$\triangle A_1A_2P_3'$的外接圓都通過點R'。

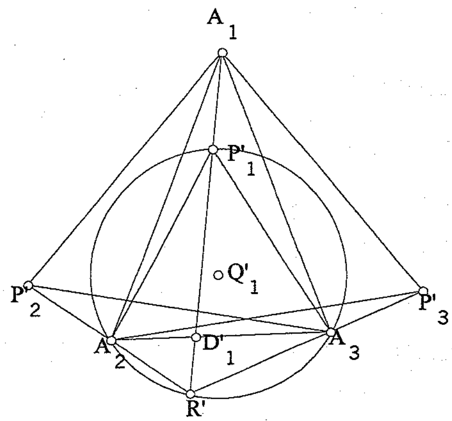
設只有α_1大於60°。因爲$\angle A_2R'P_1' = 60^\circ$且$\angle P_1'R'P_2' = 180^\circ - \angle A_1A_3P_2' = 120^\circ$，所以，$\angle A_2R'P_1' + \angle P_1'R'P_2' = 180^\circ$。於是，點$A_2$、R'與$P_2'$共線。如圖 5(1)所示。設只有$\alpha_1$小於$60^\circ$。因爲$\angle A_1R'A_2 = \angle A_2R'P_1' = 60^\circ$且$\angle A_1R'P_2' = 60^\circ$，所以，點$A_2$、R'與$P_2'$共線。如圖 5(2)所示。同理，點$A_3$、R'與$P_3'$共線。換言之，直線$A_1P_1'$、$A_2P_2'$與$A_3P_3'$都通過點R'。（請注意：點R'在直線$A_2P_2'$與$A_3P_3'$上的相對位置會受到$\alpha_2$與$\alpha_3$的相對大小所影

響，本段的論證係根據圖 5 的情形。）

(2) 若$\alpha_1=60^\circ$，則點P_2'在直線 A_1A_2 上、點P_3'在直線 A_3A_1 上。於是，直線A_1P_1'、A_2P_2'與A_3P_3'的交點爲A_1。 ‖



(1)



(2)

圖 5

定理 6 中的點R'通常稱爲$\triangle A_1A_2A_3$的第二等角中心，因爲點R'具有下述定理 7 的性質，它與定理 2 頗爲相似。

定理 7：若$\triangle A_1A_2A_3$ 爲非等邊的任意三角形，而點R'爲定理 6 中直線A_1P_1'、A_2P_2'與A_3P_3'的交點，則直線A_1R'、A_2R'與A_3R'兩兩都有一交角爲 60°，而且當只有α_1大於 60°或只有α_1小於 60°而α_2與α_3都不等於 60°時，恆有$\angle A_2R'A_3=120^\circ$、$\angle A_3R'A_1=60^\circ$、$\angle A_1R'A_2=60^\circ$。

證：依定理 6 的證明立即可得。 ‖

定理 8：若$\triangle A_1A_2A_3$爲非等邊的任意三角形，$\triangle A_2A_3P_1'$、$\triangle A_3A_1P_2'$與$\triangle A_1A_2P_3'$是定理 6 所提的向內作出的正三角形，點R'是直線A_1P_1'、A_2P_2'與A_3P_3'的交點，則$\overline{A_1P_1'}=\overline{A_2P_2'}=\overline{A_3P_3'}$，而且下述性質成立：

(1) 當只有α_1大於 60°時，$\overline{A_1P_1'}=\overline{A_2R'}+\overline{A_3R'}-\overline{A_1R'}$。

(2) 當只有α_1小於 60°時，$\overline{A_1P_1'}=\overline{A_1R'}-\overline{A_2R'}-\overline{A_3R'}$。

證：仿定理 3 的證明立即可得。 ‖

定理 3 與定理 8 中的性質，乃是下述較一般性的性質的必然結果：若$\triangle ABC$ 爲一個正三角形，點 P 是$\triangle ABC$ 的外接圓的 BC 弧上任意點，則$\overline{PA}=\overline{PB}+\overline{PC}$。這個性質是 Ptolemy 定理的必然結果，因爲□ABPC 是一個圓內接四邊形，所以，根據 Ptolemy 定理，$\overline{PA}\times\overline{BC}=\overline{PB}\times\overline{AC}+\overline{PC}\times\overline{AB}$。再由$\overline{BC}=\overline{AC}=\overline{AB}$立即可得。

定理 6 中所提的第二等角中心R'也與第一等角中心相同地，是某個極值問題的最小

點嗎？在適當的條件下，答案是：對的，我們寫成定理 9。

定理 9：若$\triangle A_1A_2A_3$的內角中只有α_1小於 60^o，而點 R' 是$\triangle A_1A_2A_3$的第二等角中心，則對於$\triangle A_1A_2A_3$平面上每個點 P，恆有

$$-\overline{A_1R'}+\overline{A_2R'}+\overline{A_3R'} \leq -\overline{A_1P}+\overline{A_2P}+\overline{A_3P}\text{。}$$

證：依定理 8(2)，知$-\overline{A_1R'}+\overline{A_2R'}+\overline{A_3R'}=-\overline{A_1P_1'}$。我們只需證明：對於$\triangle A_1A_2A_3$平面上每個點 P，恆有$\overline{A_2P}+\overline{A_3P}\geqq\overline{PP_1'}$。由此即得

$$-\overline{A_1P}+\overline{A_2P}+\overline{A_3P}\geqq\overline{PP_1'}-\overline{A_1P}\geqq-\overline{A_1P_1'}=-\overline{A_1R'}+\overline{A_2R'}+\overline{A_3R'}\text{。}$$

至於欲證的不等式，乃是廣義 Ptolemy 定理的必然結果：因爲P_1'、A_2、P 與A_3爲共平面四點，所以，恆有

$$\overline{A_2P_1'}\times\overline{A_3P}+\overline{A_3P_1'}\times\overline{A_2P}\geqq\overline{PP_1'}\times\overline{A_2A_3}\text{。} \qquad (*)$$

因爲$\overline{A_2P_1'}=\overline{A_3P_1'}=\overline{A_2A_3}$，所以，由(*)式可得$\overline{A_2P}+\overline{A_3P}\geqq\overline{PP_1'}$。關於(*)式的證明，可參看[11]。在此式的證明方法中，應該是複數方法最爲簡單：對任意四複數 a、b、c 與 d，因爲

$$(a-b)(c-d)+(a-d)(b-c)=-(a-c)(d-b)\text{，}$$

所以，可得

$$|a-c||b-d|\leqq|a-b||c-d|+|a-d||b-c|\text{。} \quad \|$$

關於向內作出的三個正三角形，也有與定理 5 類似的性質。

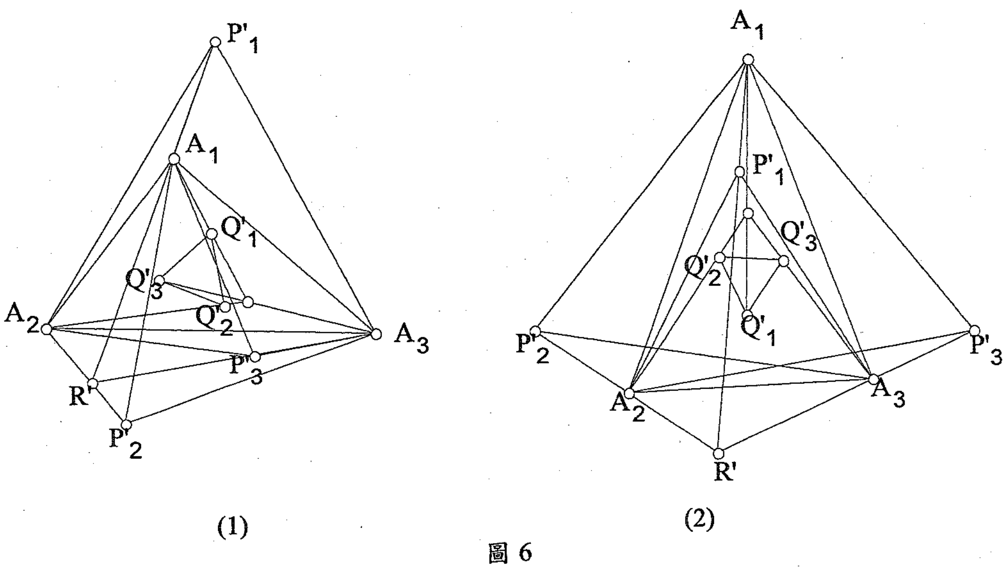


圖 6

定理 10：設$\triangle A_1A_2A_3$爲非等邊的任意三角形，$\triangle A_2A_3P_1'$、$\triangle A_3A_1P_2'$與$\triangle A_1A_2P_3'$爲向內作出的正三角形。若點Q_1'、Q_2'與Q_3'分別是這三個正三角形的中心，則

(1) $\triangle Q_1'Q_2'Q_3'$是正三角形。

(2) 直線 A_1Q_1' 、 A_2Q_2' 與 A_3Q_3' 共點。

(3) 直線 $P_1'Q_1'$ 、 $P_2'Q_2'$ 與 $P_3'Q_3'$ 共點，其交點是 $\triangle A_1A_2A_3$ 的外心。

證：本定理的三項結論，都可以仿照定理 5 的方法立即得出。不過，我們要寫出(1)的另一種證法，因爲後者可附帶得出另一性質。對於 $\triangle A_1A_2A_3$，同時考慮圖 4 中的 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 與圖 6 中的 $\triangle Q_1'Q_2'Q_3'$。因爲 $\overline{A_1Q_2}$ 是 $\triangle A_3A_1P_2$ 的外接圓半徑，所以，$\overline{A_1Q_2}=a_2/\sqrt{3}$。同理，$\overline{A_1Q_3}=a_3/\sqrt{3}$，$\angle Q_2A_1Q_3=\alpha_1+60^{\circ}$ 或 $300^{\circ}-\alpha_1$。於是，依餘弦定律，得

$$\overline{Q_2Q_3}^2=\frac{1}{3}a_2^2+\frac{1}{3}a_3^2-\frac{2}{3}a_2a_3\cos(\alpha_1+60^{\circ})。$$

請注意：上式在點 A_1、Q_2 與 Q_3 共線時也成立。另一方面，因爲 $\overline{A_1Q_2'}=a_2/\sqrt{3}$、$\overline{A_1Q_3'}=a_3/\sqrt{3}$、$\angle Q_2'A_1Q_3'=\left|\alpha_1-60^{\circ}\right|$，所以，得

$$\overline{Q_2'Q_3'}^2=\frac{1}{3}a_2^2+\frac{1}{3}a_3^2-\frac{2}{3}a_2a_3\cos(\alpha_1-60^{\circ})。$$

兩式相減，即得

$$\begin{aligned}\overline{Q_2Q_3}^2-\overline{Q_2'Q_3'}^2&=\frac{2}{3}a_2a_3\,[\cos(\alpha_1-60^{\circ})-\cos(\alpha_1+60^{\circ})]\\&=\frac{4}{3}a_2a_3\sin\alpha_1\sin60^{\circ}\\&=\frac{4}{\sqrt{3}}\times(\triangle A_1A_2A_3\text{ 的面積})。\end{aligned}$$

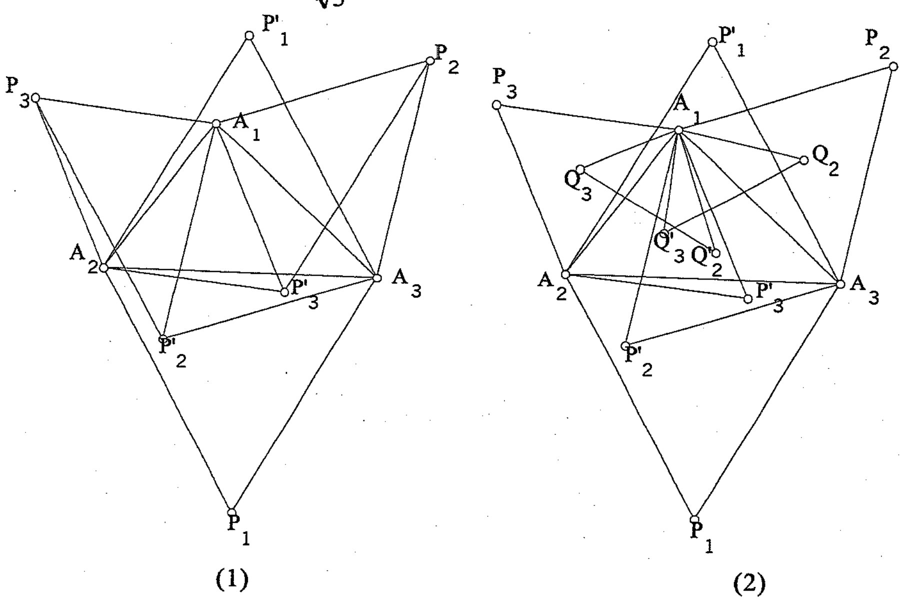


圖 7

同理，可得 $\overline{Q_3Q_1}^2-\overline{Q_3'Q_1'}^2=\overline{Q_1Q_2}^2-\overline{Q_1'Q_2'}^2=(4/\sqrt{3})\times(\triangle A_1A_2A_3$ 的面積)。因爲 $\overline{Q_2Q_3}=\overline{Q_3Q_1}=\overline{Q_1Q_2}$，所以，$\overline{Q_2'Q_3'}=\overline{Q_3'Q_1'}=\overline{Q_1'Q_2'}$，亦即：$\triangle Q_1'Q_2'Q_3'$ 是正三角形。 ∥

定理 10 中的$\triangle Q_1'Q_2'Q_3'$稱爲$\triangle A_1A_2A_3$的內 Napoleon 三角形，直線A_1Q_1'、A_2Q_2'與A_3Q_3'的交點稱爲$\triangle A_1A_2A_3$的內 Napoleon 點。定理 10(1)的證明，附帶得出下面的結果。

系理 11：若$\triangle A_1A_2A_3$爲非等邊的任意三角形，則其內、外 Napoleon 三角形的面積之差等於$\triangle A_1A_2A_3$的面積。

證：因爲$\triangle Q_1Q_2Q_3$與$\triangle Q_1'Q_2'Q_3'$都是正三角形，所以，依定理 10(1)的證明，得

$$\begin{aligned}(\triangle Q_1Q_2Q_3\text{的面積})-(\triangle Q_1'Q_2'Q_3'\text{的面積}) &= \frac{\sqrt{3}}{4}\times\ \overline{Q_2Q_3}^{\,2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times\ \overline{Q_2'Q_3'}^{\,2}\\ &=\triangle A_1A_2A_3\text{的面積。}\quad \|\end{aligned}$$

定理 12：設$\triangle A_1A_2A_3$爲非等邊的任意三角形。若$\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$與$\triangle A_1A_2P_3$是向外作出的正三角形，$\triangle A_2A_3P_1'$、$\triangle A_3A_1P_2'$與$\triangle A_1A_2P_3'$是向內作出的正三角形，$\triangle Q_1Q_2Q_3$與$\triangle Q_1'Q_2'Q_3'$分別爲$\triangle A_1A_2A_3$的外 Napoleon 三角形與內 Napoleon 三角形，則下述性質成立：

(1) $\triangle A_1P_3P_2'$、$\triangle A_1P_3'P_2$、$\triangle P_3A_2P_1'$、$\triangle P_3'A_2P_1$、$\triangle P_2P_1'A_3$、$\triangle P_2'P_1A_3$都與$\triangle A_1A_2A_3$全等。

(2) $\triangle A_1Q_3Q_2'$、$\triangle A_1Q_3'Q_2$、$\triangle Q_3A_2Q_1'$、$\triangle Q_3'A_2Q_1$、$\triangle Q_2Q_1'A_3$、$\triangle Q_2'Q_1A_3$都全等，而且它們都與$\triangle A_1A_2A_3$相似，前者與後者的對應邊長比值爲 $1/\sqrt{3}$。

(3) $\overline{A_1P_1}^{\,2}=(1/2)\,(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+2\sqrt{3}\times$ ($\triangle A_1A_2A_3$的面積)，
$\overline{A_1P_1'}^{\,2}=(1/2)\,(a_1^2+a_2^2+a_3^2)-2\sqrt{3}\times$ ($\triangle A_1A_2A_3$的面積)。

證：關於(1)與(2)的證明，只需利用 SAS 全等定理與 SAS 相似定理立即可得。至於(3)，根據餘弦定律，可得

$$\overline{A_1P_1}^{\,2}=a_3^2+a_1^2-2\,a_3a_1\cos(\alpha_2+60^{\circ}),$$
$$\overline{A_1P_1'}^{\,2}=a_3^2+a_1^2-2\,a_3a_1\cos(\alpha_2-60^{\circ})。$$

將上述兩式相加、減，即得

$$\overline{A_1P_1}^{\,2}+\overline{A_1P_1'}^{\,2}=a_1^2+a_2^2+a_3^2,$$
$$\overline{A_1P_1}^{\,2}-\overline{A_1P_1'}^{\,2}=4\sqrt{3}\times(\triangle A_1A_2A_3\text{的面積})。\quad \|$$

定理 13：設$\triangle A_1A_2A_3$爲非等邊的任意三角形。若$\triangle Q_1Q_2Q_3$與$\triangle Q_1'Q_2'Q_3'$分別爲$\triangle A_1A_2A_3$的外 Napoleon 三角形與內 Napoleon 三角形，點 R 與點 R′ 分別爲$\triangle A_1A_2A_3$的第一與第二等角中心，則下述性質成立：

(1) $\triangle Q_1Q_2Q_3$與$\triangle Q_1'Q_2'Q_3'$的中心都是$\triangle A_1A_2A_3$的重心。

(2) 點 R 在$\triangle Q_1'Q_2'Q_3'$的外接圓上，而點 R′ 在$\triangle Q_1Q_2Q_3$的外接圓上。

證：參看圖 8(1)與圖 8(1)。

(1) 因爲$\triangle A_1Q_3Q_2' \cong \triangle Q_3'A_2Q_1$且$\triangle Q_3A_2Q_1' \cong \triangle Q_2'Q_1A_3$，所以，$\overline{A_2Q_1} = \overline{Q_3Q_2'}$且$\overline{A_2Q_3} = \overline{Q_1Q_2'}$。於是，□$A_2Q_1Q_2'Q_3$是平行四邊形。其次，設$\overline{Q_2Q_3}$的中點爲$X_1$、$\overline{Q_2Q_2'}$的中點爲$O_2$。在$\triangle Q_2Q_3Q_2'$中，可知$\overline{X_1O_2}$與$\overline{Q_3Q_2'}$平行而且$\overline{Q_3Q_2'} = 2\overline{X_1O_2}$。因爲$\overline{Q_3Q_2'}$與$\overline{A_2Q_1}$平行而且$\overline{Q_3Q_2'} = \overline{A_2Q_1}$，所以，$\overline{X_1O_2}$與$\overline{A_2Q_1}$平行而且$\overline{A_2Q_1} = 2\overline{X_1O_2}$。設$\overline{Q_1X_1}$與$\overline{A_2O_2}$交於點 G，則$\triangle A_2Q_1G$與$\triangle O_2X_1G$相似。於是，$\overline{A_2G} : \overline{O_2G} = \overline{Q_1G} : \overline{X_1G} = \overline{A_2Q_1} : \overline{X_1O_2} = 2$，即$\overline{A_2G} = 2\overline{O_2G}$且$\overline{Q_1G} = 2\overline{X_1G}$。因爲$\overline{Q_2Q_2'}$與$\overline{A_3A_1}$互相垂直平分，所以，點$O_2$是$\overline{A_3A_1}$的中點，$\overline{A_2O_2}$是$\triangle A_1A_2A_3$的一中線，點 G 是$\triangle A_1A_2A_3$的重心。另一方面，$\overline{Q_1X_1}$是正三角形$\triangle Q_1Q_2Q_3$的一中線，點 G 是$\triangle Q_1Q_2Q_3$的重心，即中心，所以，$\triangle Q_1Q_2Q_3$的中心是$\triangle A_1A_2A_3$的重心。

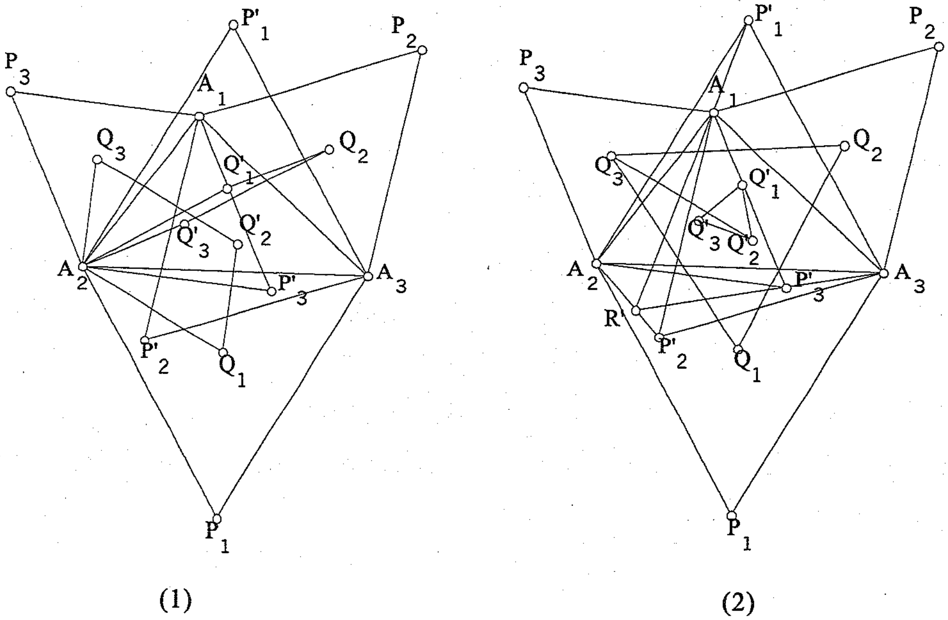


圖 8

同理，考慮四邊形□$A_2Q_1'Q_2'Q_3'$及$\overline{Q_2'Q_3'}$的中點X_1'、$\overline{Q_2Q_2'}$的中點爲O_2，也可證得$\triangle Q_1'Q_2'Q_3'$的中心是點 G。

(2) 設只有α_1大於60°或只有α_1小於60°而α_2與α_3都不等於60°。因爲$\triangle A_3A_1P_2$與$\triangle A_1A_2P_3$是正三角形，而點Q_2與Q_3分別爲其中心，所以，$\angle A_3Q_2A_1 = \angle A_1Q_3A_2 = 120^\circ$。另一方面，依定理 7，$\angle A_3R'A_1 = \angle A_1R'A_2 = 60^\circ$。於是，點$A_1$、$Q_2$、$A_3$與$R'$共圓；點$A_1$、$Q_3$、$A_2$與$R'$共圓。由此得$\angle A_3R'Q_2 = \angle A_3A_1Q_2 = 30^\circ$，$\angle A_1R'Q_3 = \angle A_1A_2Q_3 = 30^\circ$。進一步得

$$\angle Q_2R'Q_3 = \angle A_3R'A_1 - \angle A_3R'Q_2 + \angle A_1R'Q_3 = 60^\circ = \angle Q_2Q_1Q_3。$$

因此，點 R'、Q_1、Q_2 與 Q_3 共圓，亦即：點 R' 在 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 的外接圓上。若 $\alpha_3=60^o$，則 $R'=A_3$，而且點 A_1、Q_3、A_2 與 R' 共圓。於是，$\angle A_1R'Q_3=\angle A_1A_2Q_3=30^o$，$\angle Q_2R'A_1=\angle Q_2A_3A_1=30^o$。由此得 $\angle Q_2R'Q_3=60^o$，點 R'、Q_1、Q_2 與 Q_3 共圓，即：點 R' 在 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 的外接圓上。同理，點 R 在 $\triangle Q_1'Q_2'Q_3'$ 的外接圓上。 ‖

對於三角形的等角中心，我們還可以提出下面的性質。

定理 14：設 $\triangle A_1A_2A_3$ 爲非等邊的任意三角形。若 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 與 $\triangle Q_1'Q_2'Q_3'$ 分別爲 $\triangle A_1A_2A_3$ 的外 Napoleon 三角形與內 Napoleon 三角形，點 R 與點 R' 分別爲 $\triangle A_1A_2A_3$ 的第一與第二等角中心；對每個 $k=1, 2, 3$，令 X_k 表示點 R 對點 Q_k 的對稱點，且 X_k' 表示點 R' 對點 Q_k' 的對稱點，則下述性質成立：

(1) $\triangle X_1X_2X_3$ 與 $\triangle X_1'X_2'X_3'$ 都是正三角形。

(2) $\triangle X_1X_2X_3$ 的三邊分別通過 $\triangle A_1A_2A_3$ 的三個頂點，而且在具有此性質的所有正三角形中，以 $\triangle X_1X_2X_3$ 的面積最大。

(3) 對每個 $k=1, 2, 3$，當點 R 不是 $\triangle A_1A_2A_3$ 的頂點 A_k 時，$\overline{A_kR}$ 與 $\triangle X_1X_2X_3$ 的一邊垂直(於 A_k)。

(4) $\triangle X_1'X_2'X_3'$ 的三條邊線（即：含邊的直線）分別通過 $\triangle A_1A_2A_3$ 的三個頂點。

(5) 對每個 $k=1, 2, 3$，當點 R' 不是 $\triangle A_1A_2A_3$ 的頂點 A_k 時，$\overline{A_kR'}$ 與 $\triangle X_1'X_2'X_3'$ 的一邊線垂直(於 A_k)。

證：讀者自證之。因爲 $\triangle X_1X_2X_3$ 是正三角形，所以，在其平面上的每個點到三邊線之距離的代數和爲定數。定理 4 的極小值問題也可利用此性質來證明。 ‖

（待續）

~~~~~~

（上接 54 頁）

(3)2.5 分	(3-1)測出 L_{A+B} 值。若未附誤差，扣 0.1 分。	0.5 分
	(3-2a)測出 V_A 和 V_B 值。若未附誤差，扣 0.2 分。	1.0 分
	(3-2b)計算 V_A/V_B 值。若未附誤差，扣 0.1 分。	0.5 分
	(3-2c)導出正確的公式。	0.5 分
(4)1.0 分	計算 L_A/N_A^2，及 L_B/N_B^2。 計算 L_{A+B}/N_{A+B}^2。	0.5 分 0.5 分
(5)1.0 分	證明 $R_A=2.4\Omega \ll (\omega L_A)_{min}\cdot\left(1-k^2\right)\approx 100\Omega$。若耦合因數未考慮在內，扣 0.5 分。	1.0 分
(6)2.0 分	(a)推導出正確的公式。配分如下： 寫出 $(B/\mu)2L=IN$，得 0.3 分； 寫出 $B\propto V$，得 0.4 分； 寫出正確的公式，得 0.3 分。	1.0 分
	(b)計算得 μ_r。	1.0 分
~~~~~~