一九九九年第十一屆亞太數學奧林匹亞競賽試題及參考解答

陳昭地　張幼賢　朱亮儒
國立臺灣師範大學　數學系

一、亞太數學奧林匹亞競賽試題

一九九九年第十一屆亞太數學奧林匹亞競賽

Taipei, Taiwan, R.O.C.-March 8, 1999

每題 7 分

考試時間 4 小時　　Chinese version

問題 1：試確定滿足下列性質的最小正整數 n 之值：

"不存在一個共有 1999 項的等差數列，它的每一項都是實數，且其中恰有 n 項爲整數。"

問題 2：設 $a_1, a_2, \cdots$ 是一實數列且滿足 $a_{i+j} \le a_i + a_j, \forall i, j = 1,2,\cdots$。試證：對每一正整數 n，恆有

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} \ge a_n 。$$

問題 3：設兩圓 Γ_1 與 Γ_2 相交於點 P 與 Q。兩圓較靠近 P 點的外公線在圓 Γ_1 及 Γ_2 上的切點分別爲 A 與 B；圓 Γ_1 過 P 點的切線與圓 Γ_2 交於另一點 C，而 AP 的延長線交 BC 於點 R。試證：直線 BP 及 BR 都與 ΔPQR 的外接圓相切。

問題 4：試確定所有滿足下列條件的整數序對(a,b)：

"兩數 a^2+4b 與 b^2+4a 都是完全平方數。"

問題 5：給定平面上 2n+1 個點所成的集合 S，其中任三點都不共線，且任四點都不共圓。若一個圓的圓周上恰含有 S 的 3 個點，其內部恰含有 S 的 n-1 個點，而外部也恰含有 S 的 n-1 個點，則稱此圓是一個"好圓"。試證：好圓的個數與 n 有相同的奇偶性。

二、參考解答及評分標準

問題 1 參考解答

首先，我們知道等差數列 $\langle a_k \rangle$ 的任何整數項與下一個整數項之間含有相同的項數，這

是因為，若 a_i 和 a_{i+j} 項都是整數，則

$$a_{i+2j}=a_{i+j}+\left(a_{i+j}-a_i\right)$$

也是整數。

(知道這件事實可獨立得 1 分)

經由簡單的平移及重新標號，我們可設這 n 個整數項為 1,2,3,……,n, 且我們僅需考慮下列型式的等差數列：

$$1,1+\frac{1}{k},1+\frac{2}{k},\cdots,1+\frac{k-1}{k},2,2+\frac{1}{k},2+\frac{2}{k},\cdots,n-1,\cdots,n-1+\frac{k-1}{k},n\text{。}$$

上面數列共有 kn-k+1 項，且恰有 n 個整數項。然而，我們也可在上面數列的兩邊各加上 k-1 項（例如，左邊：$\frac{1}{k},\frac{2}{k},\cdots,\frac{k-1}{k}$，右邊：$n+\frac{1}{k},n+\frac{2}{k},\cdots,n+\frac{k-1}{k}$），而到一更長的等差數列，其中也恰有 n 個整數項。

(指出上面的事實可累積得 2 分)

因此，一個恰含 n 個整數項的等差數列，其項數必為區間[kn-k+1, kn+k-1]內的整數，其中 k 可為任意的正整數。由此可知，欲求最小的正整數 n 使得：

若 k 是滿足 $kn+k-1\le 1998$ 的最大正整數，則 $(k+1)n-(k+1)+1\ge 2000$。

(導出上面的事實可累積得 4 分)

即，令 $k=\left[\frac{1999}{n+1}\right]$，我們欲求最小的正整數 n 使得：$\left[\frac{1999}{n+1}\right](n-1)+n\ge 2000$。

顯然，當 $\left[\frac{1999}{n+1}\right]\cdot(n-1)+n<2000$ 時，上面不等式不成立。

(列出上面的不等式可獨立得 2 分)

經化簡得 $n\le 63$。因此，滿足條件的 $n\ge 64$。現在，從 n=64 開始檢驗：

(1) $n=64\Rightarrow\left[\frac{1999}{n+1}\right](n-1)+n=1954<2000$。

(2) $n=65\Rightarrow\left[\frac{1999}{n+1}\right](n-1)+n=1985<2000$。

(3) $n=66\Rightarrow\left[\frac{1999}{n+1}\right](n-1)+n=1951<2000$。

(4) $n=67\Rightarrow\left[\frac{1999}{n+1}\right](n-1)+n=1981<2000$。

(5) $n=68\Rightarrow\left[\frac{1999}{n+1}\right](n-1)+n=1944<2000$。

(6) $n=69\Rightarrow\left[\frac{1999}{n+1}\right](n-1)+n=1973<2000$。

(7) $n=70\Rightarrow\left[\frac{1999}{n+1}\right](n-1)+n=2002>2000$。(合)

因此，欲求的最小正整數 n=70。

(檢驗出 n=70 可獨立得 1 分)

問題 2 參考解答

令 $b_k=\dfrac{a_k}{k}, k=1,2,3,\cdots$。以下我們用數學歸納法證明：

$$b_1+b_2+\cdots+b_n\ge a_n, \forall n=1,2,\cdots 。$$

當 n=1 時，$b_1=a_1\ge a_1$，顯然成立。假設對所有的 $k=1,2,3,\cdots,n-1$，不等式

$$b_1+b_2+\cdots+b_k\ge a_k$$

皆成立。欲證 $b_1+b_2+\cdots+b_n\ge a_n$，即等價於證明

$$nb_1+nb_2+\cdots+nb_{n-1}\ge (n-1)a_n 。$$

(將 a_n 與 $b_1,b_2,\cdots,b_{n-1}$ 分開化成此等價的不等式可得 3 分)

上面的不等式可由下列的過程得證：

$$\begin{aligned}
&nb_1+nb_2+\cdots+nb_{n-1}\\
&=(n-1)b_1+(n-2)b_2+\cdots+b_{n-1}+(b_1+2b_2+\cdots+(n-1)b_{n-1})\\
&=b_1+(b_1+b_2)+\cdots+(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1})+(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})\\
&\ge a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})=2(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})
\end{aligned}$$

(得出此不等式或其等價式可得 3 分)

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(a_k+a_{n-k})\ge (n-1)a_n 。$$

(導出最後的結果可再得 1 分)

問題 3 參考解答

設 $\angle 1=\angle PAB$，$\angle 2=\angle ABP$，$\angle 3=\angle QAP$。因為 PC 為 Γ_1 的切線，所以 $\angle QPC=\angle QBC=\angle 3$。因此，A,B,R,Q 四點共圓。

(證出 A,B,R,Q 四點共圓可得 3 分)

因為 AB 為 Γ_1 與 Γ_2 的公切線，所以 $\angle AQP=\angle 1$，且 $\angle PQB=\angle PCB=\angle 2$。由於 A,B,R,Q 四點共圓，故

$$\angle ARB=\angle AQB=\angle AQP+\angle PQB=\angle 1+\angle 2，$$

且 $\angle BQR=\angle 1$。因此，

$$\angle PQR=\angle PQB=\angle BQR=\angle 1+\angle 2 。$$

(證出 $\angle PQR=\angle PRB=\angle 1+\angle 2$ 可獨立得 2 分)

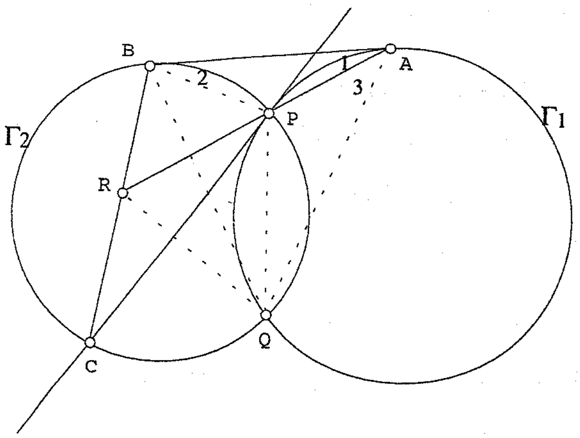
因為 $\angle BPR$ 為 ΔABP 的外角，故 $\angle BPR=\angle 1+\angle 2$。

(證出此結果可獨立得 1 分)

於是可得 $\angle PQR=\angle BRP=\angle BPR$ 。因此，直線 BP 及 BR 都與 ΔPQR 的外接圓相切。

(證出此結論可再得 1 分)

註明：僅證出 $\angle BRP=\angle BPR$ 可得 2 分。當試圖去證 $\angle PQR=\angle BRP=\angle BPR$ ，雖未成功仍可再給 1 分。



問題 4 參考解答

[解法一]不妨先設 $|b|\le|a|$ 。當 b=0，則顯然 $a=k^2,k\in Z$ ，得 $(a,b)=(k^2,0),k\in Z$ 。當 $|b|\ge1$ ，則因 a^2+4b 是一完全平方數，可得

$x^2+ax-b=0$ 有非零的整數解 $x_1,x_2\left(|x_1|\le|x_2|\right)$　　(*)

(導出此結果可獨立得 2 分)

因爲 $x_1+x_2=-a,x_1x_2=-b$ ，故

$$\frac{2}{|x_1|}\ge\frac{1}{|x_1|}+\frac{1}{|x_2|}\ge\left|\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right|=\left|\frac{a}{b}\right|\ge1 。$$

於是可得 $|x_1|\le2$ 。

(導出此結果可再得 3 分)

(1) 當 $x_1=2$ 時，由(*)式知 b=2a+4。得 $(2a+5)^2-9=b^2+4a$ 是一完全平方數。於是可得 (a,b)=(-4,-4)或(-1,2)。

(2) 當 $x_1=-2$ 時，由(*)式知 b=4-2a。得 $(2a-3)^2+7=b^2+4a$ 是一完全平方數。於是可得 (a,b)=(3,-2)。

(3) 當 $x_1=1$ 時，由(*)式知 b=a+1。得 $(a+3)^2-8=b^2+4a$ 是一完全平方數。於是可得 (a,b)=(-6,-5)。

(4) 當 $x_1=-1$ 時，由(*)式知 b=1-a。得 $(a+1)^2=b^2+4a$ 顯然是完全平方數。於是可得 $(a,b)=(k,1-k),k\in Z$ 。

(導出此結果可獨立得 1 分)

綜合上面的假設$|b|\le|a|$及結果，由對稱性可推得$(a,b)=(0,k^2)$，$(k^2,0)$，$(-4,-4)$，$(-5,-6)$，$(k,1-k)$，$k\in Z$。

(得到此正確的結果可獨立得 1 分)

[解法二]不妨先設$|b|\le|a|$。則　$a^2+4b\le a^2+4|a|<(|a|+2)^2$。

因爲a^2+4b是一完全平方數，且$a^2+4b\equiv a^2 \pmod 2$，可得$a^2+4b\ne(|a|+1)^2$。故

$$a^2+4b\le a^2\text{。} \tag{*}$$

(導出此結果可獨立得 2 分)

(1) 當$a^2+4b=a^2$時，b=0。於是$(a,b)=(k^2,0)$，$k\in Z$。

(2) 當$a^2+4b=(|a|-2)^2$時，$b=1-|a|$。

①若 a>0，則$b^2+4a=(a+1)^2$，得$(a,b)=(k,1-k)$，$k\in Z$。

②若 a=0，則 b=1，與(*)不合（因$b\le 0$）。

③若 a<0，則$b^2+4a=a^2+6a+1$，可得$(a,b)=(-6,-5)$。

(導出上面結果可得 2 分)

(3) 當$a^2+4b\le(|a|-4)^2$時，由$-|a|\le b$可得　$a^2-4|a|\le a^2+4b\le(|a|-4)^2$。

於是，$|a|\le 4$。

(導出此結果可得 1 分)

①若$|a|=4$，則$a^2+4b=0$，得(a,b)＝(-4,-4)。

②若$|a|=3$，則$0\le a^2+4b=9+4b\le 1$，得(a,b)＝(3,-2)。

③若$|a|=2$，則$0\le a^2+4b=4+4b\le 4$，得(a,b)＝(2,-1)。

④若$|a|=1$，則$0\le a^2+4b=1+4b\le 9$，得(a,b)＝(1,0)。

⑤若$|a|=0$，則(a,b)=(0,0)。

(導出上面結果可再得 1 分)

綜合上面的假設$|b|\le|a|$及結果，由對稱性可推得$(a,b)=(0,k^2)$，$(k^2,0)$，$(-4,-4)$，$(-5,-6)$，$(-6,-5)$，$(k,1-k)$，$k\in Z$。

(得到此正確的結果可獨立得 1 分)

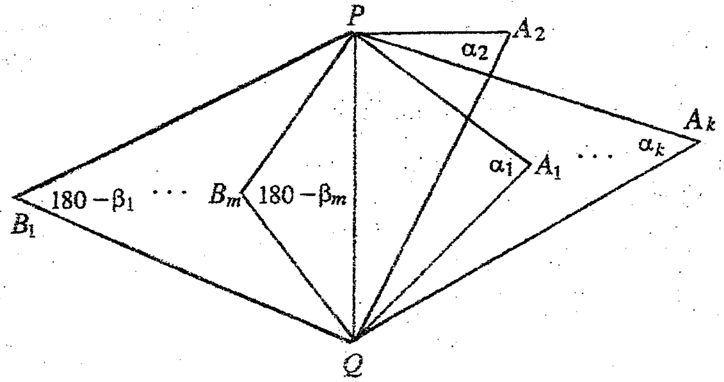
註明：檢驗出$(k,1-k)$是一種解，可得 1 分。

問題 5 參考解答

首先，我們證明以下的引理：

引理：若$P,Q\in S$，則通過點 P 與 Q 的好圓之個數是一奇數。

令 N 表示通過點 P 與 Q 的好圓之個數。將集合 S 分佈在直線 PQ 兩邊的點依序排成點 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 及 $B_1,B_2,\cdots,B_m$，其中 $\angle PA_iQ=\alpha_i$，$\angle PB_jQ=180^\circ-\beta_j$，而 $\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_k$ 且 $\beta_1>\beta_2>\cdots>\beta_m$。



由於集合 S 中任四點都不共圓，故這些角 α_i，β_j都不相等。由觀察可知：當 $\alpha_j>\alpha_i$（亦即 i>j）時，點 A_j 會落在通過點 P，Q，A_i 的圓內；且當 $\alpha_i+180^\circ-\beta_j>180^\circ$（亦即 $\alpha_i>\beta_j$）時，點 B_j 會落在通過點 P，Q，A_i的圓內。同理，在 P，Q，B_j的圓上也有相似的結果。

(描述以上特性可獨立得 1 分)

現在，將所有的 α_i 及 β_j 由大至小排序，若有一 β_j 緊接在一 α_i 之後（即 $\cdots>\alpha_i>\beta_j>$　），則考慮調整點 A_i，B_j 成爲 A_i'，B_j'，而將集合 S 轉換成另一集合 S'，其中 $\angle PA_i'Q=\beta_j=\alpha_i'$，$\angle PB_j'Q=180^\circ-\alpha=180^\circ-\beta_j'$。於是可得 $\beta_j'>\alpha_i'$，

$\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_{i-1}>\alpha_i'>\alpha_{i+1}>\cdots\alpha_k$，　　且　　$\beta_1>\beta_2>\cdots>\beta_{j-1}>\beta_j'>\beta_{j+1}>\cdots\beta_m$。

(描述以上的轉換可獨立得 1 分)

以下分析進行一次以上的調整轉換恰可增加或減少 0 或 2 的好圓。事實上，一個 S 中經過點 P，Q，A_r $(r\neq i)$或經過點 P，Q，B_s $(s\neq j)$的好圓在 S'中也是一個好圓（因爲 A_r 或 B_s 相對於其他的點之次序沒有改變，故在這個圓內或圓外的點之個數不數）。因此，只有以下四種可能的改變：

(a)圓 P，Q，A_i 在 S 中是好圓，但圖 P，Q，A_i' 在 S'中不是好圓。

(b)圓 P，Q，B_j 在 S 中是好圓，但圖 P，Q，B_j' 在 S'中不是好圓。

(c)圓 P，Q，A_i 在 S 中不是好圓，但圖 P，Q，A_i' 在 S'中是好圓。

(d)圓 P，Q，B_j 在 S 中不是好圓，但圖 P，Q，B_j' 在 S'中是好圓。

(描述以上好圓的可能變化可獨立得 1 分)

因爲圓 P，Q， A_i 的內部包含 i+m-j 個點 $A_1,A_2,\cdots,A_{i-1},B_j,B_{j+1},\cdots,B_m$ ，而其他的 k-i+j-1 個點 $A_{i+1},A_{i+2},\cdots,A_k,B_1,B_2,\cdots,B_{j-1}$ 在其外部，故圓 P，Q， A_i 爲一好圓的充要條件 i+m-j=k-i+j-1，亦即 $j-i=\frac{1}{2}(m-k+1)$。另一方面，因爲圓 P，Q， B_j 的內部包含 i+m-j 個點 $A_1,A_2,\cdots,A_i,B_{j+1},B_{j+2},\cdots,B_m$，而其他的 k-i+j-1 個點 $A_{i+1},A_{i+2},\cdots,A_k,B_1,B_2,\cdots,B_{j-1}$ 在其外部，故圓 P，Q， B_j 爲一好圓的充要條件是 i+m-j=k-i+j-1，亦即 $j-i=\frac{1}{2}(m-k+1)$。於是可知：圓 P，Q， A_i 爲一好圓的充要條件是圓 P，Q， B_j 亦爲好圓。同理，圓 P，Q， A_i' 爲一好圓的充要條件是圓 P，Q， B_j' 亦爲好圓。因此，由 S 轉換到 S'，在 S'中恰可增加或減少 0 或 2 個好圓。

(描述以上好圓的改變可獨立得 1 分)

重覆以上的轉換，我們可將集合 S 轉換成一新集合 S_0，使得這些角度 $\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_k',\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_m'$ 滿足

$$\beta_1'>\beta_2'>\cdots>\beta_m'>\alpha_1'>\alpha_2'>\cdots>\alpha_k'\ 。$$

由前面的分析可知：在 S_0 中的好圓之個數與 N 有相同的奇偶性。事實上，在 S_0 中的好圓恰只有一個。因爲 $\alpha_i'+(180^\circ-\beta_j')<180^\circ,\forall i,j$，故圓 P，Q， A_i' 內部不包含任一點 B_j'，而圓 P，Q， B_j' 內部也不包含任一點 A_i'。因此，可能的好圓唯有圓 P，Q， B_{m-n+1}'（當 m-n+1>0）和圓 P，Q， A_n'（當 n<k）。但因 m+k=2n-1，可得 m-n+1=n-k，故圓 P，Q， B_{m-n+1}' 和圓 P，Q， A_n' 中恰有一個是好圓。於是得證 S_0 中的好圓恰只有一個。因此，N 是一奇數。

(證出 S_0 中的好圓恰只有一個可獨立得 2 分)

現在證明原問題。考慮集合 S 中的 $\binom{2n+1}{2}$ 組點對(P,Q)，並令 a_k 表示 S 中恰有 k 個好圓通過的點對之個數。由引理知 $a_2=a_4=a_6=\cdots=0$。因此，

$$a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots=\binom{2n+1}{2}$$

於是可知，S 中好圓的個數等於

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(a_1+2a_2+3a_3+4a_4+\cdots)&\equiv a_1+2a_2+3a_3+4a_4+\cdots\\&\equiv a_1+3a_3+5a_5+7a_7+\cdots\equiv a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots\\&\equiv\binom{2n+1}{2}\equiv(2n+1)\equiv n\ (\mathrm{mod}\ 2)\ 。\end{aligned}$$

(導出上面正確的演算式可獨立得 2 分)

註明：證出對特別的 n>1 之情況，最多得 2 分。