八年級生使用敘事說明學習數學概念之研究
— 屏東縣某國中為例

詹勳國[1*] 李政和[2]

[1]國立屏東大學 應用數學系

[2]屏東縣立東港高級中學國中部

摘　要

本研究對屏東縣某國中 254 名八年級學生進行「0.9...= 1」與「負負得正」二種數學概念測驗，探索學生分別閱讀敘事說明後，學習數學概念的認知與效果，並檢驗是否可以應用抽象學習五類型（「自明」、「衝突自清」、「衝突它清」、「衝突未清」、「未明未清」）分類。結論如下：「負負得正」數學概念測驗工具是有效的、有意義的，雖然受測學生「負負得正」口訣琅琅上口，但是大部分不懂負數乘法原始關係，學生學習時並不理解教科書說明意義，純粹會計算算式，受測時無法直接連結教科書敘事說明與最簡負數乘法算式(-2)X(-3)=6。「0.9... =1」數學概念測驗工具是有效的、有意義的，三成受測學生經過閱讀敘事說明可以學會這概念，結果類似其他研究。這二個數學概念測驗結果支持抽象數學學習理論，檢驗單一數學抽象概念，所有受測學生都可以被歸類到抽象學習五類型的某一類型，沒有類型不能描述的學生。榮格心理學基本理論模式可以清楚描述敘事說明與學習關係，它視閱讀敘事說明為一種體驗，若是進入意識則為「懂」，若非則進入潛意識，以後再遇到相關議題，可能啟動，可能不啟動心理功能，由不同心理功能啟動，可能成功解題，也可能失敗。另外，研究結果佐證可以利用心理學測驗的信效度分析在「數學敘事說明」上，專家效度幾乎可以推理與應用，信度分析的基本架構可以移植至分析數學敘事說明，這是初探，細節當然還需要更深入與嚴謹的探討。

關鍵詞：抽象數學概念學習類型、敘事說明，國中生

壹、緒論

村上春樹（2009）小說《1Q84》反覆提到「不說明就不會懂的事，是怎麼說明都不會懂的事」，這句話在網路上引起共鳴，打動好多人的心，一個小說家委婉說出「怎麼教都教不會」的困境，提供一個反省教學與學習的機會，配合數學教室常聽到的口語，例如：「本來就會」、「一看就知道」、「學過又做錯」、「我知道啦，但又忘記了」、「明明有教過，卻想

* 為本文通訊作者

不起來」、「好像有教過」等，有必要探究「數學說明」與「數學概念學習」的關係。數學說明可以是文字、證明、算式與圖形，本研究統稱敘事說明。

「怎麼說明都不會懂」的懂是短暫的，過後又不懂，可以用「迷思」的「頑固性」（鍾聖校、1994）解釋。學習數學一開始會從直觀的角度切入，形成固定模式，這時若不正確，雖然經過改正，但假以時日後，不經意的面對相同問題時，仍會直觀的重複犯這個錯，屬於直觀迷思（邱美虹、1993），需要從學習心理學面相切入探究。

「怎麼說明都不會懂」的懂是短暫的，可能使用「口訣」學習，雖然經過「口訣解題」可以成功計算大量「例行性」的問題，並做到熟能生巧，屬於行為主義「透過反覆的練習，連老鼠都學會，何況人類」的想法，但是遇到需要理解內涵才能解題時卻又不會解題，本研究嘗試選擇國中「負負得正」口訣，先請受測學生閱讀「操作型數學說明」，再要求列出數學算式，利用回答算式的內容與正確性，檢驗「數學敘事說明」與「口訣解題」間的學習狀況，本研究計畫從心理結構與功能角度分析。

比較早的數學口訣是九九乘法，有一些心急的家長會要求幼兒園的小孩背誦，真實的例子是在已經熟背九九乘法表的幼兒前，擺放三堆六顆豆子並問總共有多少個豆子？幼兒雖然熟背九九乘法，卻仍然一顆一顆「從頭數」來回答總數，會被九九乘法表但無法應用在真實的問題，本研究想出一個異曲同工的例子，對於所有國中生都能琅琅上口的「負負得正」，提出一個生活情境說明並要求學生列出適當的算式，檢查是否國中生能否能連結(-2)x(-3)=6。

同時，本研究檢驗八年級學生閱讀另一段數學敘事說明，再探討從其中學習抽象數學概念的情況，先要求國中生回答「0.9…與 1」誰大，再閱讀簡單國小程度數學說明（教育部。2020）「1=3x(1/3)=3x(0.3…)=0.9…」後回答，敘事的 3x(0.3…)利用連加直式呈現，無須進位得到 0.9…，一個月後，再回答一次，利用 3 次回答，8 個組合分類、分析學生如何利用數學敘事說明學習無窮的概念。

學生閱讀數學敘事說明後的學習反應是多元的、複雜的，如何分析抽象數學概念學習的結果？一般心理學都採用分類的方式，例如：榮格是首先分類「內傾型與外傾型」（Jung，1921）的作者之一，本研究將使用榮格心理學派對心智結構的理論分析與探討甚麼是「懂」。又本研究應用詹勳國與顏翠琳（2019）提出的「數學抽象學習五類型」理論：每一個學生學習單一個數學抽象概念，可分成：「自明」（self-evidence）、「衝突自清」（conflicted self-clearing）、「衝突它清」（conflicted clearing by others）、「衝突未清」（Conflicted non-clearing）、「未明未清」（Unknown ever）類型。

「怎麼說明都不會懂」的「敘事說明」可能是不可靠的、無法持久、沒有信用的。因為當下說明後學習者似乎懂了，但是過

了一段時間之後，再問學生相同的問題，學生仍又無法理解，仍再以原本概念回答。一段完整數學敘事說明對學習者「有沒有意義」？「有沒有用」？剛好符合心理學測驗理論，「有沒有意義」？安排適不適當？能達到教學設計目的？屬於學習效度（Validity）。有沒有用？可不可靠？屬於信度（Reliability）問題。因此，本研究將從這個面向討論。

綜合以上討論，本研究目的如下：

一、建立與施測國中生「負負得正」數學概念測驗工具，並分析比較結果。

二、建立與施測國中生「$0.9\ldots = 1$」數學概念測驗工具，並分析比較結果。

三、使用數學抽象學習五類型理論，與榮格心理學基本理論分析探討敘事說明與數學抽象概念學習關係。

四、模仿心理學理論關於測驗信度與效度建立教學的「說明信度」與「說明效度」理論。

貳、文獻探討

實數在加法與乘法運算下是一個體（Field），帶有加與乘法封閉性，加法反元素，乘法反元素、交換律、結合律、分配律與等量公理。(-1)是1 的加法反元素，所以$0 = 1 + (-1)$，又0 的乘法原則$0 = (-1) \cdot 0$，則$0 = (-1) \cdot \big(1 + (-1)\big)$，分配律得$0 = (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)$，再使用等量公理得$1 = (-1) \cdot (-1)$。這是「負負得正」嚴謹的數學證明。

12年國教數學領域課程手冊（教育部。2020）安排國中7年級學習負數與運算，指標N-7-3 負數與數的四則混合運算(含分數、小數)：使用「正、負」表徵生活中的量；相反數；數的四則混合運算。基本說明強調，負數來表徵生活中性質相反的量，以及能理解無論a是正數或是負數，$-a$ 與 a 互為相反數。可知$-(-a)$與a 皆為$-a$ 的相反數，所以$-(-a) = a$。

國中課本解釋「負負得正」說明之一為水庫水位，例如水庫水位每天下降2公分以-2 表示，過了一天少2公分以$(-2) \times 1 = -2$ 來表示，如果將時間回溯三天前以-3 代表，則三天前水位高度會比現在還要多出6公分，解釋$(-2) \times (-3) = +6$。另外，溫度也常常用來解釋正負數變化關係的情境，例如早上溫度是-6 度，到了下午變成-2，算式求溫度變化量寫成$-2 - (-6)$，這個時候學生用減掉某數等於加上某數的相反數解題，因此$-2 - (-6) = -2 + 6 = 4$，其中的減$-(-6)$ 變成$+6$的過程，也是負負得正的一種概念。數線原點右邊為正左邊為負，向右為正，向左為負，$(-2) \times (-3)$ 算式-2 可以代表向左2個單位，-3 代表向相反方向3次，面向左一次兩個單位，執行相反方向3次就會到達$+2$ 位置。

課堂另一種簡單說法將負號視為翻面（相反）動作，一個兩面物體遇到負號就翻轉一次，當再遇到第二個負號之時，便再翻轉一次，此時這個物體又會回到原本的那一面，這樣可以解釋「負負得正」概念。

「操作型數學說明」延續小學加減法的「操作型」定義說明，盒子裡裝有黑色與白色的圍棋，白色的圍棋表示$+1$，黑色的圍棋表示-1，一黑一白剛好抵消為0，而放入盒子內的動作為加法，從盒子內取出則為減法。乘法有交換性，不失一般性下，$(-2)\times(-3)$可以表示連續拿走3個黑棋2次；但在盒子中沒有圍棋的情況下，我們先放入了三組的黑白棋於其中來表示$0\times 3=0$，此時拿走三個黑棋之後，再放入三組的黑白棋且再依次取走三個黑棋，因為兩次拿走了三個黑棋之後，此時的盒中會剩下六個白棋，就可以用來解釋$(-2)\times(-3)=+6$。

綜合以上例子任何具有方向性的數字或量（棋子、水庫、數線、溫度…），都可以設計成用來解釋說明「負負得正」概念，教學者按照這個原則可以設計更多的說明，屬於具體運思的例子。黃湘武（1987）研究發現：台灣國中生大多仍處於具體運思期，形式運思的能力尚未發展完全。所以國中階段學習負數概念並不是件容易的事，符號運算對應和結果與他們之前既有的認知不符。蔡德吉（2002）與林保平（2005）認為國中生對於負數與加減法的概念學習上呈現多元表徵，以數線類型概念最多，至於乘除法敘述的理解則有說明困難，無法與生活例子連結，大多數選擇簡單的背誦口訣來面對負數乘法。

12年國教數學領域課程手冊（教育部。2020）安排高中10年級學習無窮循環0.9…，指標N-10-1 實數：數線，十進制小數的意義，三一律，有理數的十進制小數特徵，無理數之十進制小數的估算等。釋例提到：三一律的應用機會之一，是討論$0.9\cdots$ 與1 的關係。若先承認$0.9\cdots$個實數（從它的小數形式來看），則若$0.9\cdots$ 不等於1 就必定較大或較小。從這裡切入，或許可以帶領學生在概念上理解$0.9\cdots$ 與1 的相等關係。

之後安排 12 年級（教育部。2020）學習指標 N-12 甲-2 無窮等比級數：循環小數，Σ 符號。教學斟酌提到：學生對於「無窮」的概念，需要引導與時間消化，大部分學生認為$0.9\cdots<1$，但以無窮等比級數求和時又等於 1 而感到困惑，建議：從小學的經驗，學生能接受 $0.9\cdots=0.3\cdots\times 3=\frac{1}{3}\times 3=1$，如果$0.9\cdots<1$，它們相差多少？如果兩個數之間沒有距離，是不是就是相等的數？無窮就是一直一直一直寫下去，當我們在寫 9 的循環時，就越來越接近 1，而這個動作不會停止（因為是無窮），所以最後這個值就是 1。

榮格心理學派（Jung，1921）認為「自我」是意識、個人潛意識與集體潛意識所組成「人格結構」的核心，「自我」負責篩檢（允許，選擇、淘汰）日常體驗與經驗變成意識，「自我」會依照重要性、需求性、個性、獨立性、同一性、壓抑性、忽視性等，不平均使用「感覺、思維、情感、直覺」心理功能，讓大量與豐富的體驗與經驗，只有極少內容到達與存留「意識」。當學生閱讀數學敘事說明、寫數學作業，或進行數學相關活動，屬於體驗與經驗，最

後只有極少部分會進入或留存「意識」，這可以視為是「懂」的事，其餘的存入個人潛意識，之後遇到相關問題，全憑「不自覺」啟動四種「心理功能」之一，可能是「直覺」或是「思維」。「自我」不一定會連結存入潛意識的這段「體驗」，可以視為忘記。

詹勳國與顏翠琳（2019）研究利用 0.9… 與 1 大小問題，檢驗受測大學數學系學生的想法，提出分類學習抽象數學概念理論，資優生學習有「自問、自答、自明」的特徵，所以每個學生學習單一個數學概念，若直接學會就是「自明」，若是學不會就產生認知「衝突」，這符合「皮亞傑」的理論（張春興、1991），達到認知歷程平衡的學習者接收的訊息與其既有的基模不協調，會導致認知衝突「失衡」，例如：「0.9… 與 1」誰大的直覺與敘事說明衝突，接著會自發驅策自己藉由同化來重建平衡，研究者相信自我澄清「認知衝突」是學習抽象概念的重要方式，所以有「衝突自清」類型，接著透過評量檢驗發現衝突存在，藉由「解惑」明白的概念，稱為「衝突它清」類型，教學未必教的懂歸為「衝突未清」，最後是「未明未清」。該研究受測大學數學系學生可以分成「抽象學習五類型」：「自明」（self-evidence）、「衝突自清」（conflicted self-clearing）、「衝突它清」（conflicted clearing by others）、「衝突未清」（Conflicted non-clearing）、「未明未清」（Unknown ever）。所有受測學生都可以被歸類到抽象學習五類型的某一類型，而這五類型也可以分類所有的學生，約略看出成常態分配。

信度（reliability）指測驗結果的一致性（Anastasi & Urbina 1997），假設學生能力不變，重複做一項測驗，分數都應該一樣，通常以 0 到 1 的數字代表，越大信度越高。效度（validity）指測驗的評量是否適合與達到原本的目的（Anastasi & Urbina 1997），通常分成內容效度、預測效度、構念效度。構念效度（construct validity）指測驗內容是否正確達到結構理論性的想法，或做到該原先想要做到的東西（構念）（Cohen &Swerdlik, 1999）。一般而言，都是由專家所決定的，例如數學課程的制定，教科書的編著與審查都是由一群專家認為大部分學生都應該可以學會的。

參、研究方法

本研究一開始採用行動研究，反省國中數學教室「為什麼教不會」、「為什麼學不會」，到「教學說明有用嗎？」，理解這觸及「學習心理學」，需要發展適當的「說明」與「測驗」探究，符合 Reason(1994) 指出的「行動研究目的主要是解決研究者自身所面臨的問題，過程中研究者經歷實踐、反省及自我批判的歷程，並不斷調整修正培養出比較客觀的想法，並能兼顧自己行動與理論的發展」。接下來利用二個測驗進行質量並重研究，檢驗測驗合理性、得分標準，這段符合 Mckerman 的看法，認為的行動研究是一種反省的過程，是該領域從業者對已知問題的瞭解、探討並尋

求解決方法，行動研究的基本理念為「經歷真實情境的人，是最好研究與探索的人」(Mckerman，1991)。研究者之一是國中數學老師，每天置身於數學教室的真實情境中，既是專業教學者，亦是專業探究者，達到研究應有所行動，行動應有所研究的合理性，過程中注重 Torbert（1991）的要求:「行動研究要發展出涵有豐富訊息的行動科學，而不是要發展出一種有關行動的反思（reflective）科學」。

研究者認為延續小學加減法的「操作型」定義，「$(-3)\times(-2)$ 操作型數學說明」非常適合檢驗「數學說明」、「口訣解題」與抽象概念學習間的學習狀況，先經過 2 所高雄市市區小學，與原高雄縣一所小學進行預試，結果多元且豐富，依據皮亞傑的認知發展理論與教材先後安排順序（負數乘法＞乘法＞減法＞加法＞形式運思＞具體運思），再與學院數學老師與 3 預試學校老師討論得到評分標準（表 1）。

接下來 A4 問卷第一面下半部，問「0.9…與 1」比大小，並請翻面作答和不要再更改答案，第二面先閱讀 $0.9\cdots = 0.3\cdots \times 3 = \frac{1}{3}\times 3 = 1$ 說明，再問「0.9…與 1」比大小，一個月後再進行沒說明重測，問三次比大小答案分對 A 與錯 B，共有 8 個組合，「0.9…= 1 數學敘事說明」測驗的評分準則為以下；「本來就會 AAA」5 分，「真正學會 BAA」4 分，「之後學會 BBA」3 分，「假性學會 BAB」2 分，「完全答錯 BBB」與「亂猜一通 AAB、ABA、ABB」1 分。經過同樣 3 所高雄市市區小學進行預試，結果可行。

表 1、負負得正測驗評分表

- 數學算式
  - 有意義
    - 用乘法
      - 用負數乘法
        - 正確　5 分
        - 不正確　4 分
      - 正乘法
        - 正確　4 分
        - 不正確　3 分
    - 沒乘法
      - 正確　3 分
      - 不正確　2 分
  - 無意義　1 分
- 無算式
  - 有意義
    - 正確　3 分
    - 不正確　2 分
  - 無意義　1 分

肆、結果與討論

一、「0.9⋯＝1 數學敘事說明」測驗

262 受測學生參加前測，8 位同學因故無法參與後測，有效樣本為 254，結果如表 2，A 表示答對，B 表示答錯。

表 2、「0.9⋯＝1 數學敘事說明測驗」前測結果

作答情形	AA	BA	BB	AB
作答人數	13	121	123	5
作答比率	4.96％	46.18％	46.95％	1.91％

121 受測學生佔 46%看完「數學敘事說明」從答錯到正確回答，似乎「數學敘事說明」是可靠的、有用的，模仿心理學測驗的「信度」，這一個固定的「0.9… = 1 數學敘事說明」，針對一群認知能力接近的受測群體可以學會的信度為 046。但是，真的學會了嗎？一個月後，沒有任何提示下問 0.9…= 1 哪個大得到表 3，第三個字母則是後測的結果。

11 個受測學生屬於「本來就會」，數學抽象概念學習類型可以歸於「自明」類型。43 個學生 BAA 佔 17%從「數學敘事說明」學會，一個月後再測又答對是「真正學會」，認知衝突後閱讀「數學敘事說明」釐清，屬於「衝突它清」類型，這個「它」可已是文字、影音、搜尋、他/她人說明等。模仿心理學測驗的「重測信度」，這一個固定的「0.9⋯＝1 數學敘事說明」，經過閱讀後，對同一群受測群體仍然學會的重測信度為 0.0433+0.1693+0.1063=0.32。扣除一開始就已經明白題目的受測學生，本研究比較想要瞭解的是關於「說明」這樣的教學方式能否給學生實質上的幫助，甚至是「真正」的藉此學會了數學。從結果中不難發現，閱讀說明之後，學生答對的比率明顯提高了許多，大多數的受測學生都能立即從「說明」的提示裡找出正確的答案，但是一個月的後測中，整體答對的比例降低了，如果我們只看在原先寫錯，但在閱讀完「說明」後答對，且後測也答對，也就是我們認定為「已經學會」的受測學生來看，答對的學生接近三成，這個推論「這一段數學說明對於國中 8 年級生的說明信度為 0.3」是有意義的與合理的。

表 3、0.9… = 1「數學敘事說明測驗」前後測結果

作答情形	AAA	AAB	ABA	ABB
作答人數	11	2	1	4
作答比率	4.33％	0.79％	0.39％	1.57％
作答情形	BAA	BAB	BBA	BBB
作答人數	43	75	27	91
作答比率	16.93％	29.53％	10.63％	35.82％

其中一位受測學生的訪談紀錄：

訪談者：「在$0.\overline{9}$與 1 關係這個題目中，一開始你選擇了$0.\overline{9}$是小於 1 的，什麼情況下你在第二次作答時修改為$0.\overline{9}$等於 1 這個答案呢？」

受訪生：「打從一開始我是覺得$0.\overline{9}$是小於 1 的，因為就字面上來看 0.999999...一直下去好像永遠都只差一點點才會和 1 一樣大，但是看了說明之後，3 個$\frac{1}{3}$等於 1，又等於三個$0.\overline{3} = 0.\overline{9}$，所以我覺得$0.\overline{9}$和 1 是一樣大的。」

訪談者：「這樣的觀念和你之前的了解似乎有所衝突，你在看完說明之後，會不會覺得怪怪的呢？」

受訪生：「不會耶，我覺得我看的懂說明裡的東西，也算有學到新的東西，感覺還不錯呀。」

75 個受測學生 BAB 佔 30%從看完說明答對後一個月又答錯了，代表一個月前是「假性學會」，屬於「衝突未清」。這回答了村上春樹（2009）提到「不說明就不會懂的事，是怎麼說明都不會懂的事」，指的是這一類的學生學習方式。91 個受測學生 BBB 佔 36%三次的作答中皆回答錯誤，歸類在「衝突未清」甚至是「未明未清」的類型，這類學生佔了全部受測學生中的 35.83%，超過三分之一的比例。剩餘的類型（AAB、ABA、ABB、BBA）34 位學生佔 14%一併討論，大部分答案形式錯誤與看不出原因，訪談學生表示都以猜測回答，先前寫對並不是真的理解，單純是以直觀或猜測的方式回答問題，其中 AAB、ABA、ABB 都歸類在「衝突未清」甚至是「未明未清」類型，這些和 BBB 事實是同一類。

本研究沒有深入探討占 10.6%的「之後學會 BBA」，只訪談一位 BBA 受測學生，該生前測與閱讀說明後都答錯，數日後因為與同學討論釐清 0.9...與 1 關係，討論過程留下了印象，所以在後測裡正確回答，歸類於「衝突它清」類型，從這個角度，教育與學習仍有它必要與重要存在的理由。

因為算術錯誤導致「衝突未清」訪談案例：

訪談者：「在問卷裡在$0.\overline{9}$與 1 關係這個題目裡，你的第一次作答是$0.\overline{9}$是小於 1 的，你的依據是什麼呢？」

受訪生：「$0.\overline{9}$等於 0.9999...，應該沒有大於 1 才對吧？」

訪談者：「那你在看完了題目所給的說明之後，你在第二題的回答仍是$0.\overline{9}$小於 1 的，是不是這個說明傳遞給你什麼概念呢？」

受訪生：「那個說明裡有提到$\frac{1}{3}$等於 0.33333...，三個$\frac{1}{3}$是 0.9999...＝$0.\overline{9}$，因為三個$\frac{1}{3}$加起來是$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{9}$小於 1 是正常的，所以我覺得第二題仍然是小於沒錯吧？」

這個學生在兩次的作答中都選擇了錯誤的答案，即使說明中已經有相關的提示，但他仍因為「3 個 1/3 為 1/9」錯誤認知而無法從說明中學到正確的概念。又一位「衝突未清」訪談案例：

訪談者：「同學你在問卷裡的第一題寫到 $0.\overline{9}$是小於 1 的，這是基於什麼樣的理由呢？」

受訪生：「問卷一開始有說$0.\overline{9}$等於 0.999...，我覺得 0.999...並沒有比 1 還大，所以我寫了小於。」

訪談者：「那第二題中你的答案改成大於了，是你從說明的敘述中看出了什麼嗎？」

受訪生：「嗯……說明的部分我不太想看也看不太懂啦，那個大於有一半是猜的，反正他又另外提出來講，我就猜是它是要推翻原先的假設吧。如果說原先的答案是小於，那我就改填大於囉。」

訪談者：「那你有考慮過等於這個答案嗎？」

受訪生：「哈！白癡才會選那個答案呀，空格兩邊的東西怎麼看都不一樣，怎麼會是等於呢。」

訪談者：「那你會不會想去瞭解一下真正的答案是什麼呢？」

不管結果為何，都突顯受測學生對自己的觀念並非確實了解，單單以直覺反應來面對題目，顯示共有 44%的學生無法透過這段「數學敘事說明」學會$0.9\cdots=1$。這結果並不訝異，詹勳國與顏翠琳（2019）針對「大學數學系學生」的研究指出雖然高中都學過$0.9\cdots=1$代數證明，但是仍有一半 50%的受測學生直觀上卻認為$0.9\cdots$差「非常小一點點」到 1。該研究另外一個結論是他們理解$0.3\cdots=1/3$ 式二邊乘 3 就是$0.9\cdots=1$事實，部分受測者仍認為這之間存在許多有理數。這又呼應了針對 0.9...= 1 問題，無論國中、高中、大學，「不說明就不會懂的事，是怎麼說明都不會懂的事」類型的學生其實佔一半左右，換句話說，經過高中數學的學習，以及大一大二數學系的學習仍然有一半的學生認為 0.9...不等於 1。而美國的大學數學相關系所的學生同樣有一半的學生有這種迷思。約略可以說對於這類抽象數學概念大約有一半的人無法學會。

榮格心理學派認為，學生進行數學相關活動，例如：上課，閱讀、作業等，都屬於體驗與經驗，最後只有少部分會進入或留存「意識」，這可以視為是「懂」的事，大部分其餘的會存入個人潛意識，之後遇到相關問題，例如評量、考試或問卷，若已有「意識」，則直接回答，若無則「自我」全憑「不自覺」啟動四種心理功能「感覺、思維、情感、直覺」或不啟動，本研究結果與其他研究支持，幾乎一半的學生沒有「懂」（沒有這概念的意識），然後他們一則不啟動心理功能，一則啟動非「思維」功能，大多數的人啟動「直覺」功能，因此，造成大約有一半的人無法學會抽象數學概念。

二、「（－3）×（－2）數學敘事說明」測驗

受測學生看到問題時先認定是不曾做過的題目，屬於「非例行性」題目，於是開始連結所學過的知識與經驗，關鍵字可能有 0、+1、-1、做了 2 次（乘 2 或-2）、數學算式等，接著以直覺連結上訊息，嘗試拼湊解題，因此解法多元（或多元組合）。問卷測驗 262 個樣本有 81 位學生寫出正確答案，答對率約 31%，正確答案中沒有任何一位同學回答$(-3)\times(-2)=6$ 算式，大部分以加減法的型態來呈現。

「負負得正」是一個抽象概念，轉化為易於理解的形式或表徵不是一件容易的事。七年級學生大多可以用反射的方式回答出答案等於 6，現在學生面對一個情境，雖然口訣朗朗上口卻無法連結算式，反而回到最初所學習的加法與減法解題，這與本研究一開始提到的小孩可以背誦九九乘法卻無法應用$3\times6=18$的例子不謀而合。

雖然 31%的受測學生回答正確，但大部分答案都是建立加減法，並沒有真正的實際應用「負負得正」，即使是能算出$(-3)\times(-2)=6$，並不能代表學生真正的學會。回答方式多元，值得深入研究，分類如下：

A1. 答案使用超過 2 的乘法與「負負得正」

答：$0+2\{3[1+(-1)]-3(-1)\}=6$

分析：這一位同學在列算式的時候相當謹慎，連一開始盒子裡面為 0 的狀況都表示出來，表示他對於整個題目的細節是有考量進去的，然後用 3〔1+（−1）〕來表示三組的黑白棋，接著用−3（−1）來表示取走三個黑棋，再於大括號外乘以 2 倍，其解答的層次明顯更高於前兩個範例將相同動作重複寫兩次的作法。

其他範例：

答：$2(0+3)$

答：$(-3+3)+3+(-3+3)+3=2[(-3+3)+3]=6$

答：$2[3(1-1)-3\times(-1)]$
$=2[3]$
$=6$

答：$2[0-(-3)]$

答：$3(-1+1)-3(-1)+3(-1+1)-3(-1)=+6$

答：$3(1-1)-3(-1)+3(1-1)-3(-1)$

A2. 使用「負負得正」

答：① $0-(-3)=3$. ② $0-(-3)=3$ 所以 $3+3=6$.

分析：這個同學的答案很清楚的列出在三黑加三白總合為 0 的情況下拿走三個黑棋可表示為 0 −（−3）=3，然後

把兩次的總和加起來為 6 得解，算是離我們預定的（–3）×（–2）較為接近的答案，雖然仍未用到負負得正的概念，但是從作答中可以看出學生對題目的理解是非常清楚的，若是將答案寫為〔0 –（–3）〕×2，應該是更棒的表示方式。

其他範例：

答：3-3-(-3)+3-3-(-3)=6

其中一位訪談紀錄：

訪談者:「關於這個問卷中第一題所提到的黑棋與白棋的問題，你一開始的想法是什麼？」

受訪生:「因為一開始盒子裡並沒有棋子，即使放入了三組的黑白棋，三個黑–3 和三個白 3 放一起相互抵消也是等於零而已。」

訪談者 :「那你要如何寫出算式呢？」

受訪生:「我會把三個黑棋當作–3，三個白棋就是＋3，用–3＋3 來表示三個黑的和三個白的。」

訪談者 :「那麼關於取走三個黑棋，你會如何表示呢？」

受訪生 :「拿走三個黑色嘛，我就在–3＋3 的後面再 –（–3）。」

訪談者:「觀念很清楚唷，你最後寫的答案是 6，是根據甚麼判斷而來的呢？」

受訪生:「很簡單呀！如果拿走三個黑的，那盒子裡不就只剩三個白的，也就是 3，如果這樣做兩次，就是剩下三個白色乘以二，就是 6 個白色囉。」

訪談者:「那你要如何用數學算式來表達你的結果？」

受訪生:「我就在–3＋3 的後面再 –(–3)，如果這樣同樣的動作做兩次，我就將算式再作一次就好了嘛。」

訪談者 :「再做一次的意思是？」

受訪生:「就是–3＋3–（–3）再加上–3＋3–（–3），算出來就是 6 囉。」

A3. 單單使用加減法

答：3×0+3+3×0+3

分析：這位同學將一正一負的和用 0 表示，且用 3×0 表示這樣的一正一負有三組，再將拿掉三個黑棋的 –（–3）直接變號改為+3，在運算的層次上表現出比範例一的同學更高的數字整合與變號技巧，但仍無法將負負得正的概念應用在這個問題當中。

另一位使用加減法的範例，近乎圖像認知將 1 視為白棋與將-1 視為黑棋。

答：1+1+1-1-1-1-(-1)-(-1)-(-1)+1+1+1-1-1-1-(-1)-(-1)-(-1)=6

分析：這位作答的同學將三組白棋與黑棋用算式 1+1+1–1–1–1 列出，並且清

楚的以−（−3）來表示拿走三個黑棋，並且將這個動作重複了兩次，得到最後結果等於 6，雖然不是我們期待的（−3）×（−2）這種答案，但至少該生能清楚將這個題目用正確的算式列出，只是他仍無法將負負得正的概念實際應用在這個問題中。可從此作答方式中得知該生雖然用的是數字呈現，但其思考方式仍是「具體運思期」（concrete operation period）的形式，必須將條件（模擬黑棋與白棋的實際狀況）以數字一一清楚列出方能作答。

其他範例：

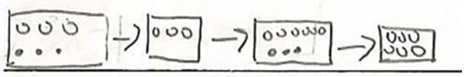
答：0+0+3+3=6

答：6-3+6-3

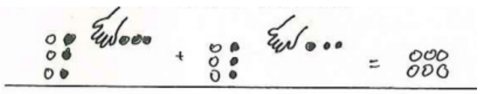
答：(0+3)+(0+3)=6

答：3+3=6

A4. 使用圖像

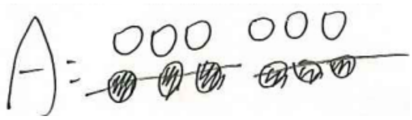
答：

分析：這位學生的作法雖然與前兩個範例的類型相似都是以圖像的方式來呈現，但前兩者都單純地將相同的動作做了兩次來求得結果，而這個同學呈現出來的是一種連續性的「累進性和成運思」與「向上數」的概念，而非單調的重複動作，在思考層次上是有不同的。

答：

分析：這兩位學生的作答方式都是將三個黑棋與三個白棋直接畫出，並且以劃掉三個黑棋表示題意所示的取走這個動作，雖然很清楚的呈現出過程與最後的結果，但也表示該生的學習狀態仍停留在皮亞傑學習發展理論中的「具體運思期」（concrete operation period），而未進入「形式運思期」（formal operation period），也就是我們常說的眼見為憑，學生尚未建立起抽象思考能力，所以必須借助實物或圖像來幫助他們建立連結。

其他範例



接下來列出錯誤答案範例，一般來說只能概略看懂題目或是忽略其中部份說明，勉強用題目裡所提到的數字來呈現，但表達方式有所缺漏或式對於運算的規則有所誤解，導致答案不正確或是碰巧寫出答案，其算式過程本身是有瑕疵的。

1.　答：-3+3-3=-3

分析：這位學生直接用−3+3 來呈現三個黑棋與三個白棋，看似有注意到黑棋與白棋的差別，但卻又直接以−3

來表示拿走了三個棋子這個動作而忽略了棋子顏色代表的含意，顯示這位學生並不是完全真正理解棋子顏色的重要性，整個算式也未確實完成。

2. 答：$0-3+3-3=-3$

分析：這位學生的答案中明顯可以看出也是用$-3+3$ 來呈現三個黑棋與三個白棋，但拿走三個黑棋的部分他只用了-3 來表示而忽略了他拿走的是黑棋，所以應該用$-(-3)$ 表示才對，而且最後題目提到相同的動作做了兩次他完全沒有注意到，所以導致錯誤的結果。

3. 答：$(-3+3-3)\times 2$

分析：這位學生的寫法算是很接近正確答案但是疏忽了細節，與範例一一樣是忽略了拿走黑棋的動作應該用$-$（-3）表示才對，且他與大多數的同學一樣，都會把三個黑棋與三個白棋明確的用$-3+3$ 來呈現，常理來說合併起來為 0 的數字應該可略過不寫才對，但幾乎大多數的學生都有寫出來，其中推估兩種的可能性：一種是個人的習慣使然，另一種應該是學生尚未完全脫離「具體運思期」（concrete operation period），所以在計算的過程中必須靠明確的數字來提醒自己黑棋與白棋的存在。

4. 答：$3+3-3+3+3-3=6$

分析：這個學生的思維模式只停留在「量」的統計而忽略了不同顏色之間的意涵，三個黑棋與三個黑棋他以 $3+3$ 來呈現，然後拿走三個黑棋就用-3 來表示，所以他所回答的 6 並非是「六個白棋」的 6，而是盒子中剩下「六個棋子」的 6，雖然是相同的答案，但其中的意義是全然不同的。

5. 答：$0+6-3+6-3$

分析：這個學生的回答方式與前一個範例相同，學生都是只有注意到「量」的變化，也等同他的數學學習仍停留在單純計算數量的階段，他很有順序性的從原本的空盒 0 個棋子中先放入 6 個，然後取走 3 個，接著再放入 6 個，再取走 3 個，用$0+6-3+6-3$ 忠實呈現了盒子中棋子數量的變化，最後所得的答案，也只能呈現出剩下六個棋子而非六個白棋。

6. 答：$3-3-3+3-3-3=-12$

分析：這一位同學的答案雖然不對，但其所列出的算式比答案本身更值得研究，他所犯的錯誤剛好與前一個範例四的概念相反，這位學生只注意到顏色的含意（白色的圍棋表示＋1，黑色的圍棋表示－1），但是忽略了棋子之間的運算規則（放入盒子

內的動作為加法，從盒子內取出則為減法)，所以他很單純的呈現出三白、三黑、三黑、三白、三黑、三黑這樣的順序；但除了算式的呈現有問題，其後的計算結果也與算式不相符，表示學生在加減法運算上本身也是有問題的。

7. 答：$+1^3-1^3-1-1-1 \quad +1^3-1^3 \quad -1-1-1$

分析：這位學生最大的錯誤在於將連續加法等同乘法和連續乘法等於次方的觀念混淆，將三個白棋直接寫成＋1 的 3 次方，三個黑棋寫成－1 的 3 次方，由於次方的概念是國中七年級時期才教，在時近效應 Regency Effect（程炳林，2000）的影響下，學生當下或許只記得這個概念，再加上學生自己的學習歷程中對於累加可以用乘法來表示的概念也尚未完整建立，所以在不甚了解題目與方法的情況下就直覺式的使用他所學到的最新概念來處理問題，所以才有了這樣的答案。

「衝突自清」類型受測學生訪談紀錄：

研究人員：「在問卷的第一題裡，你回答了 6 這個答案，而你在作答的過程中似乎有修正過的痕跡，可以告訴我你當初修正的是那些地方嗎？」

受訪學生：「一開始我把拿走三個黑棋這個動作想成是−3，如果依照題目的說法，−3 可能比較像是拿走三個白棋而不是拿走三個黑棋。」

研究人員：「所以你原來的算式是寫成什麼呢？」

受訪學生：「0−3＋0−3＝−6」

研究人員：「那你是在什麼情況下發現你寫錯了呢？」

受訪學生：「在我看到−6 這個答案時，似乎這代表了六個黑棋，明明我在兩次當中已經拿走六個黑棋了，答案還是六個黑棋，好像怪怪的…。」

研究人員：「所以你有重頭確認過自己的想法嗎？」

受訪學生：「有的，後來我發現拿走三個黑棋的動作應該是−(−3)才對，把算式換成 0−(−3)＋0−(−3)＝6，盒子裡如果剩下六個白棋，感覺就合理了。」

學生計算過程與答案裡都發現了不合理的地方，透過省思找到問題的癥結點，在於拿走本身是減法，黑棋本身是負數，因此用−(−3)來表示就能得到正確的結果，雖然其中有小波折，但還是可以憑自己的方式來解決問題。這段文字題目不是以說明形式而是問題形式呈現，不適合討論數學敘事說明信度。

所有學生都知道「負負得正」口訣，並且幾乎所有學生都能正確計算（−3）×

（−2），從榮格心理學派理論分析，大多數的數學練習與活動都會存入「個人潛意識」，經過每個學生心智「自我」篩選後，非常少的體驗到達、或存留於「意識」，即使留住也非常微弱，所以倒過來給一個操作型情境問題，包含所有預試與正式施測生都沒有回答最適當的數學算式，可以推論受測學生並不存在「（−3）×（−2）= 6」意識，受試時多數學生使用「直覺」心理功能，連結他們最自然直接的反應，例如：連加、連減、圖像，及乘法等多元而豐富的反應，只有少數案例自然意識「負負得正」（−（−3）=3、（−（−1）=3），或從潛意識拉出過去負負得正體驗與相關經驗。

Margaret Wu（2009）與張立民（2011）的研究結果可以說明這個現象，他們比較八年級學生的數學表現，發現西方國家在 PISA 的表現大致上比在 TIMSS 的表現為佳，TIMSS 評比題目屬於「純粹的數學」題（即未以真實生活情境作為背景的數學題），接著檢視六個國家在這兩組題目表現上的差異，反映西方與亞洲國家的相對強項與弱點，證據顯示，亞洲國家純粹算術題目表現優於真實生活題目，本研究支持這論點，受測八年級生雖然會計算，但是面對真實生活情境作為背景的數學題，卻無法連接適當的算式，是一台具有簡單數字加減乘除的「計算機」，而不具「智慧」。

三、「二數比大小」與「負負得正」得分相關性

「二數比大小」與「負負得正」數學概念測驗，因為不是升學考試相關概念，所以沒有過度練習產生的表現偏差，能精準的測出真實數學概念學習的一面，10個班共254個樣本，比較「二數比大小」與「負負得正」的得分表現有無班級差異，H_0虛無假設：班級成績無差異(平均成績相等)。結果如表4。

表 4、ANOVA

		平方和	自由度	平均平方和	F	顯著性
比大小	組間	20.927	9	2.325	1.373	.201
	組內	413.184	244	1.693		
	總和	434.110	253			
負負得正	組間	16.453	9	1.828	1.116	.352
	組內	399.516	244	1.637		
	總和	415.969	253			
TOTAL	組間	51.595	9	5.733	1.403	.187
	組內	997.161	244	4.087		
	總和	1048.756	253			

結果顯著性 p-value（0.201, 0.352, 0.187）> 0.01 接受H_0，無差異， 雖然10個班共有4位數學老師，教學風格都不一樣，從比大小與負負得正問題來看，學生的表現呈現常態分配，並不會因為班級的不同而不同，也就是說，不會因為每班的老師或教學的不同而不同。因此，受測學校使用相同教科書下，老師如何教並不影響學生的表現。

接著研究想要了解受測學生對於二問題的得分相關性，結果如表5。

表 5、二數比大小與負負得正得分相關

		二數比大小	負負得正
二數比大小	Pearson 相關	1	.234**
	顯著性 (雙尾)		.000
	個數	254	254
負負得正	Pearson 相關	.234**	1
	顯著性 (雙尾)	.000	
	個數	254	254

**. 在顯著水準為 0.01 時 (雙尾)，相關顯著。

254 個樣本對於「二數比大小」與「負負得正」得分表現的相關 p-value <0.001< 0.01 α值，拒絕H_0虛無假設（r=0 無相關），所以有相關，相關係數 0.234 屬於低度正相關，解這 2 題抽象數學概念題目都需要數學基本理解力，可以解釋低度正相關，學生多元與題目差異是無法達到高度正相關原因。經過仔細比對「二數比大小」得 5 分的受測學生，「負負得正」表現分散，反之亦然，因此，單一數學抽象概念下，「抽象數學學習理論可以清楚的分類學生學習狀況。

四、模仿心理學測驗信度效度至「數學敘事說明」信度效度

「數學敘事說明」的效度可以採用「專家效度」，經由專家認定正確且有意義的敘事，考慮兩個層面，第一個是敘事說明的「正確性」，這個知識是否符合邏輯與具有意義，第二個是依據經驗來判斷對學習者是否有「意義性」，因此專家必須具備認知心理學、教育心理學、學習心理學、教材教法等相關知識，再依據大多數的學習者適合度來定義這個說明是否能達到效果，類似統計學上的效度，整體來說，舉凡課程綱要、教科書之編輯者、教科書的審查者，以及選用者都算是專家，依據專家自己的認知來判斷認為有內容有效度才通過和使用。

專家效度缺點是「菁英決策模式」（黃昆輝，呂木琳。2019）與「同溫層互相讚賞」，少數菁英決策者決定課程與教科書文字說明，同質性高，也反映了菁英分子的喜好，有時菁英分子本身觀念和意見是一致的，有時，菁英分子之間意見不一致，如同「建構數學」爭議，有一派專家提出數學教育改革，提出與推行 9 年一貫數學領域暫行綱要課程鼓吹使用計算機，3 年

後，又有一派專家反對，修正並定稿成 9 年一貫數學領域課程禁用計算機，最近實施的 12 年國教數學領域課程手冊文字中，再一次看到擺盪，不但最新數學課程建議使用計算機，將來國中會考與高中學力測驗都可以使用特定計算機。

另外一個值得討論的是「倖存者偏差」，由「本來就會」的菁英訂定課程與教科書說明，犯了類似不應「強化空戰後倖存飛機破損部位」，而應該「強化被擊落飛機的主要破損部位」迷思，也就是不應「強化數學好的菁英認為學不好部位」，而應該「強化數學不好學習不好部位」，又如同許多趣味數學、益智玩具，已經學會的人認為巧妙、很棒、深得我思，但是對初學者來說，卻是一頭霧水。

無論如何，目前數學教育對於教科書數學說明仍然使用專家效度決定，研究者認為 1=3x(1/3)=3x(0.3…)=0.9…是一個很清楚的「數學敘事說明」，有很好的「專家效度」，但是即使是大學數學系的學生看到這敘述仍不相信 0.9…=1，研究施測期間，甚至有國中專任老師都懷疑這證明存在某種「詭辯」，「直覺」認為 0.9…小一點。不管如何，心理學測驗理論的專家效度全然的可以應用到「數學說明」。

至於信度應用在「數學敘事說明」仍需要更深入的研究，一個信度好的心理學測驗，是針對一個固定學生在沒有任何變因下得分差別不大。而一個信度好的「數學敘事說明」，可以解釋針對一個固定「數學敘事說明」對於一群認知能力接近的學生學會的比例，在沒有其他變因下學會百分比應該差別不大。若有多個相同類似的說明可以探討折半信度，假如「水庫水位」說明已經知道具有非常好的「信度」，則可以參照「水庫水位」說明信度作為其他負數乘法概念說明的校標效度，以此檢驗。確定數學說明是否有表達相同的數學論述，當同質性越高時，說明的一致性亦會更高，這個概念類似庫李信度。在檢視教科書時，應該可以精進的利用這些觀點，改善數學敘事說明，讓更多的學生在說明信度高的敘事下學會數學，而不是菁英專家使用「想當然爾」的經驗與心態設定普羅大眾的「數學敘事說明」。

伍、結論

「負負得正」數學概念測驗工具是有效的、有意義的，這段操作型數學說明是國小操作型的延伸，受測學生回答多元且豐富，提供皮亞傑認知理論精彩的佐證，反射學生抽象學習的狀況，雖然受測學生「負負得正」口訣琅琅上口，但是沒有一個學生直接連結負數乘法，「口訣解題」是必然的與必要的，早期以行為主義為核心的教育理念，面對資源不足的大班教學，「口訣」提供一個快速完成練習的方式，但是大部分不懂負數乘法原始關係，學生學習時並不理解說明意義，純粹會計算算式，受測時無法成功連結教科書敘事說明與數學算式間關係。

近年來國際數學教育趨勢傾向於生活情境與生活應用，新的課綱已經推廣使用

計算機學習，並計畫在重要考試可以使用計算機，我們必須重新思考「新」的數學學習。過去的快速準確計算導致很多人誤會甚麼是好的數學能力，影響生涯學習規劃，讓不少人產生害怕數學的焦慮，更甚者行為遺傳至下一代(Maloney&Beilock，2012)。新的科技與數學觀念下，紙筆計算正確答案應該不再是優先目標，學者 Reuf（2016）認為初級的算術應該從意義發展出來，跳過意義說明步驟，除了降低理解力，還會花費過多的認知能源，遺憾的目前國中生浪費更多的時間在熟練計算上，反而不懂原始關係，本研究「負負得正」數學概念測驗結果支持這個結論。

「0.9... =1」數學概念測驗工具是有效的、有意義的，12 年國教數學領域指出它的敘事說明只需要國小數學認知，它不是升學考試題目，無關過度練習，可以純粹的檢驗數學抽象概念，再加上本研究利用一個月後的重測，更能精密的檢驗與分類學生數學抽象概念，並驗證抽象數學概念學習類型。本研究受測學生經過閱讀三成學生已經可以學會這概念，結果顯示跟國內大學數學系與美國修習過大學微積分大學生的數據類似，可以佐證抽象數學學習理論。以上二個數學概念測驗皆可驗證抽象數學學習理論，對於學習單一數學抽象概念，所有受測學生都可以被歸類到抽象學習五類型的某一類型，沒有類型不能描述的學生。

榮格心理學派的「人格結構」、「自我」、「心理功能」等基礎理論，可以細膩的解釋「數學敘事說明」與學習「抽象數學概念」間的關係，它視閱讀敘事說明為一種體驗，若是進入意識則為「懂」，若非則進入潛意識，以後再遇到相關議題，可能啟動，可能不啟動心理功能，由不同心理功能啟動，可能成功解題，也可能失敗。研究結果佐證確實可以利用心理學測驗的信效度分析在「數學敘事說明」上，專家效度可以直接推理與應用，信度分析的基本架構可以移植分析至數學敘事說明，這是初探，細節當然還需要更深入與嚴謹的探討。

參考文獻

村上春樹（2011）。**1Q84 Book 1**（賴明珠譯）。台北：時報文化。(2009)

邱美虹(1993)。科學教科書與概念改變。**科學教育月刊，163**，2-8。

林保平(2005)。正負數的概念與其加減運算。**科學教育月刊，277**，10-22。

教育部(2008)。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。台北市：教育部。

莊仲黎(2017)。**榮格論心理類型**。商周出版。台北市。翻譯自 C. G. Jung（1921）.PsychologieTypen.。

鍾聖校(1994)。對科學教育錯誤概念研究之省思。**科學研究資訊，2**(3)，89110。

教育部(2020)。**十二年國教課程綱要國民中小學暨普通型高中數學領域課程手冊**。教育部，台北市。

張立民(2011)。透過 PISA 與 TIMSS 評比研究檢視西方與亞洲學生數學的相對強項。**教育科學研究期刊，56**（1），67-89。

蔡德吉(2002)。**國一學生負數概念之研究**(未出版之碩士論文)。國立高雄師範大學數學系研究所。高雄市。

黃湘武(1987)。**皮亞傑理論與科學教育基**

礎研究。『教學研究』專題研討會，國立台灣師範大學教育學系主辦。

黃昆輝、呂木琳(2000 年 12 月) 。**菁英理論模式 Elite Theory Model。教育大辭書**，國家教育研究院。http://terms.naer.edu.tw/detail/1307463/?index=3

詹勳國，顏翠琳（2019）。數學系學生無窮小概念研究。**科學教育月刊，42**3，17-34。台北市。

Anastasi, A, & Urbina, S. （1997）. *Psychological testing* (*7th ed*.). Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.

Cohen, R.J., &Swerdlik, M.E.（1999）. *Psychological testing and assessment* (*4th ed*.). Mountain View, CA: Mayfield.

Mckernan. J. (1991).*Curriculum action research:A handbook of methods and resources for the reflective practitioner*. NY:St.Martin´s Press Inc

Maloney, E. A., Beilock, S. L. (2012). Math anxiety: Who has it, why it develops, and how to guard against it. *Trends in Cognitive Sciences, 16*, 404-406.

Reason, P.(1994). *Three approaches to Participatory Inquiry*. In N. K. Denzin & Y.

Ruef, J. (2016). The power of being wrong: Inviting students into mathematical apprenticeships. *New England Mathematics Journal, 43*, 6-16.

Torbert, W. R.(1991).*The power of balance : Transforming self*, society , and scientific inquiry. Newbury Park, CA: Sage.

Wu, M. (2009). A comparison of PISA and TIMSS 2003 achievement results in mathematics. *Prospects, 39*(1), 33-46.

投稿日期：109 年 8 月 1 日

接受日期：109 年 12 月 1 日

A Study on Learning Mathematics Concept by the Narrative Explanation for 8th Graders at Pingtung County

Hsungrow Chan[1]* and Chenghe Li[2]

[1] Department of Applied Mathematics National Pingtung University

[2] Pingtung Dong Gang Senior High School.

Abstract

In this study, 262 8th graders at a junior high school in Pingtung County were tested using text narrative explanation questionnaire of mathematical concepts on "two negatives multiple makes a positive" and "0.9… = 1" to explore students' perception on learning mathematics concept. And test whether classification for 5 patterns of learning abstract mathematics concept ("self-evidence", "conflicted self-clearing", "conflicted clearing by others", "Conflicted non-clearing", "Unknown ever") was applied to junior high school students. There are the following conclusions:

The mathematical concept test of "Multiplying Negatives Makes A Positive" is effective and meaningful. Although the tested students known the formula, most of them do not understand the primitive relationship of negative multiplication, and students do not understand the textbook explanations when they studied. They can calculate multiplication of negatives, but cannot be successfully connected the relationship between textbook narrative explanations and mathematical formulas when tested. The "0.9... =1" mathematical concept test tool is effective and meaningful. 30% of the tested students can learn this concept after reading the narrative. The results are similar to other studies. These two math concept tests support abstract mathematics learning theory. Under any single mathematical concept, all students can be classified into 5 patterns of learning abstract concept and there is no student who 5 patterns cannot describe. The basic theoretical model of Jungian psychology can clearly describe the relationship between narrative explanation and learning. It regards reading narrative explanation as an experience, and if it enters consciousness, it means "understanding." If not, then the experience enters the subconscious. If the person encounters related issues later, the one may activate or not the psychological functions. If activated one of the psychological functions, one may succeed in solving the problem, or fail. In additional, the research results can be used to support the reliability and validity analysis of psychological tests. In the "Mathematical Narrative Explanation", expert validity can almost be reasoned and applied. The basic framework of reliability analysis can be transplanted to the analysis of mathematical narrative explanation, of course, this is first study the detail needs more in-depth analysis and rigorous discussion.

Keywords: patterns of learning abstract mathematics concept, narrative explanation, junior high school students

* corresponding author