用矩陣觀點看「商式定理」的應用

陳建燁

臺北市立第一女子高級中學

壹、前言

在商式定理[1]一文中，探討了多項式除法的核心情形：將 x^n 除以 $\prod\limits_{1\le i\le m}(x-p_i)$ 所得商式與餘式的係數，完全用 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 來表達，得到並證明所謂的「**多項式除法基本定理**」：

設 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 全相異，且 $n\ge m\ge 2$，則有

$$x^n=\left[\prod_{1\le i\le m}(x-p_i)\right]\cdot\left[\sum_{j=0}^{n-m}h_j(p_1,p_2,\cdots,p_m)\cdot x^{n-m-j}\right]+\sum_{j=1}^{m}p_j{}^n\cdot\frac{\prod\limits_{\substack{1\le i\le m\\ i\ne j}}(x-p_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le m\\ i\ne j}}(p_j-p_i)}\text{。}$$

特別地，就商式的係數而言，可得所謂的「**商式定理**」：

設 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 全相異，且 $n\ge m\ge 2$，則 x^n 除以 $\prod\limits_{1\le i\le m}(x-p_i)$ 所得的商式的係數，恰為 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 構成的「完全齊次對稱多項式」$h_j(p_1,p_2,\cdots,p_m)$，其中次數 j 由 0 到 $n-m$。

而在參考資料[2]中，吳波先生處理了多項式除法更為一般的狀況，即被除式為任意的 n 次多項式 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$，除以 $\prod\limits_{1\le i\le m}(x-p_i)$ 之後，所得的商式 $q(x)$ 之中，x^j 項的係數為 $\sum\limits_{s=1}^{m}\dfrac{u_{m+j}(p_s)}{p_s{}^{j+1}\cdot\prod\limits_{1\le k\le m,k\ne s}(p_s-p_k)}$，其中 $u_k(x)=\sum\limits_{i=k}^{n}a_ix^i$ 。

注意到 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$ 是 $1,x,\cdots,x^n$ 的「線性組合」，本篇文章將從參考資料[1]的商式定理出發，把 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$ 除以 $\prod\limits_{1\le i\le m}(x-p_i)$ 所得的商式 $q(x)$，寫成矩陣的形式，即

$$q(x)=\begin{bmatrix}1 & x & \cdots & x^{n-m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m+1} & a_m \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_{m+2} & a_{m+1} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{m+j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & a_n & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_{n-m} \\ h_{n-m-1} \\ \vdots \\ h_{n-m-j} \\ \vdots \\ h_1 \\ h_0 \end{bmatrix}_{(p_1,p_2,\cdots,p_m)}$$

(簡記為「 XAH 矩陣表示法」)，再舉例說明此一「矩陣表示法」相對於「傳統長除法」，在實際計算與表達上所顯現的好處。接著，使用此一矩陣表示法，給出參考資料[2]中，商式係數公式 $\displaystyle\sum_{s=1}^{m}\frac{u_{m+j}(p_s)}{p_s^{\,j+1}\cdot\prod\limits_{1\le k\le m,k\ne s}(p_s-p_k)}$ 的另一個證明。最後，在數種不同的條件設定下，應用商式的矩陣表示法，展示其作用及特性。而文中所用到的記號與已知公式，皆置於文末的附錄，供讀者查閱。

貳、本文

一、商式的「矩陣表示法」：

設被除式 $f(x)=a_nx^n+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ ，除式 $g(x)=(x-p_1)\cdots\cdots(x-p_m)$ ，商式為 $q(x)$ ，餘式為 $r(x)$ 。由除法原理，即有 $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$ 。

由商式定理[1]一文的結論，可知： x^n 除以 $\prod\limits_{1\le i\le m}(x-p_i)$ 所得的商式的係數，恰為 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 構成的「完全齊次對稱多項式」$h_j(p_1,p_2,\cdots,p_m)$，其中次數 j 由 0 到 $n-m$。於是可得以下諸式：

$$\begin{aligned}
x^n &= g(x)\cdot(\ h_0x^{n-m}+h_1x^{n-m-1}+\cdots\cdots+h_{n-m-j}x^j+\cdots\cdots+h_{n-m-1}x+h_{n-m}\ )+r_n(x)\\
x^{n-1} &= g(x)\cdot(\ h_0x^{n-m-1}+\cdots\cdots+h_{n-m-j-1}x^j+\cdots\cdots+h_{n-m-2}x+h_{n-m-1}\ )+r_{n-1}(x)\\
&\ \vdots\\
x^{m+j} &= g(x)\cdot(\ h_0x^j+\cdots\cdots+h_{j-1}x+h_j\ )+r_{m+j}(x)\\
&\ \vdots\\
x^{m+1} &= g(x)\cdot(\ +h_0x+h_1\ )+r_{m+1}(x)\\
x^m &= g(x)\cdot(\ h_0\ )+r_m(x)
\end{aligned}$$

(其中 $r_i(x)$ 為各個除法所得的餘式，$i=m,m+1,\cdots,n$)

分別將以上各式依序乘以 $a_n,a_{n-1},\cdots\cdots,a_{m+j},\cdots\cdots,a_{m+1},a_m$ 再相加(即作線性組合)，即可看出所求之商式

$$q(x)=(a_nh_0)x^{n-m}+(a_nh_1+a_{n-1}h_0)x^{n-m-1}+\cdots\cdots$$

$$+(a_nh_{n-m-j}+a_{n-1}h_{n-m-j-1}+\cdots+a_{m+j+1}h_1+a_{m+j}h_0)x^j+\cdots\cdots$$

$$+(a_nh_{n-m-1}+a_{n-1}h_{n-m-2}+\cdots+a_{m+2}h_1+a_{m+1}h_0)x\quad+(a_nh_{n-m}+a_{n-1}h_{n-m-1}+\cdots+a_{m+1}h_1+a_mh_0)$$

$$=\begin{bmatrix}1 & x & \cdots & x^j & \cdots & x^{n-m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_nh_{n-m}+a_{n-1}h_{n-m-1}+\cdots+a_mh_0\\ a_nh_{n-m-1}+a_{n-1}h_{n-m-2}+\cdots+a_{m+1}h_0\\ \vdots\\ a_nh_{n-m-j}+a_{n-1}h_{n-m-j-1}+\cdots+a_{m+j}h_0\\ \vdots\\ a_nh_1+a_{n-1}h_0\\ a_nh_0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & x & \cdots & x^{n-m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m+1} & a_m\\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_{m+2} & a_{m+1}\\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{m+j}\\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & a_n & a_{n-1}\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_{n-m}\\ h_{n-m-1}\\ \vdots\\ h_{n-m-j}\\ \vdots\\ h_1\\ h_0\end{bmatrix}$$

$=X\cdot A\cdot H$，將此式稱為商式 $q(x)$ 的「XAH 矩陣表示法」。

舉例說明其用法：求 $\sqrt{2}x^4+2020x^3+\pi x^2$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 所得之商式？

矩陣表示法：

注意到商式的 degree 為 $4-2=2$ 次($n=4,m=2\Rightarrow n-m=2$)，先求出：$h_0(1,2)=1$，$h_1(1,2)=1+2=3$，$h_2(1,2)=1^2+2^2+1\cdot 2=7$，則所求商式

$$q(x)=\begin{bmatrix}1 & x & x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 2020 & \pi\\ 0 & \sqrt{2} & 2020\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_2(1,2)\\ h_1(1,2)\\ h_0(1,2)\end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix}1 & x & x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 2020 & \pi \\ 0 & \sqrt{2} & 2020 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 \\ 3 \\ 1\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}1 & x & x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\sqrt{2}+6060+\pi \\ 3\sqrt{2}+2020 \\ \sqrt{2}\end{bmatrix}
$$

$$
=\sqrt{2}x^2+(3\sqrt{2}+2020)x+(7\sqrt{2}+6060+\pi)
$$

傳統長除法：

$$
\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{2} \quad +(2020+3\sqrt{2})+(\pi+6060+7\sqrt{2}) \\
1-3+2 & \sqrt{2} \quad +2020 \quad +\pi \quad +0 \quad +0 \\
 & \underline{\sqrt{2} \quad -3\sqrt{2} \quad +2\sqrt{2} \qquad\qquad\qquad} \\
 & \qquad (2020+3\sqrt{2})+(\pi-2\sqrt{2}) \\
 & \qquad \underline{(2020+3\sqrt{2})-(6060+9\sqrt{2})+(4040+6\sqrt{2})} \\
 & \qquad\qquad (\pi+6060+7\sqrt{2})+\cdots\cdots
\end{array}
$$

比較：相對於傳統長除法需要一項項的計算，才能得知商式的某項係數，在演算過程中 $\sqrt{2}$ 與 π 使得算式看來混亂，而 2020 等數字的重複抄寫顯得效率低落，**最嚴重的問題**在於，**只要其中一個數字抄錯或算錯，之後就全盤皆錯**；相對地，「矩陣表示法」形式直觀簡潔，便於掌握，而最主要的特點是**可以直接計算商式中任何一項的係數**，完全不需依賴其他項的計算結果，自然就不會「一步錯，之後全錯」了。

此外，可以看出，商式的矩陣表示法所要計算的真正「核心」，其實是一系列的「完全齊次對稱多項式」：$h_0,h_1,\cdots,h_{n-m}$。對於固定的除式 $g(x)=(x-p_1)\cdots\cdots(x-p_m)$ 而言，只要先計算出此數列，則無論被除式 $f(x)=a_nx^n+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ 如何變化，所要做的工作，只需將 $f(x)$ 的係數 $a_n,\cdots,a_m$，原封不動的抄寫到矩陣中即可。由此，**在固定除式之下，可輕而易舉地「平行計算」出一大批不同的被除式，作完多項式除法之後所得的商式。**

除了計算的方便與正確性之外，此一矩陣表示法的價值在於告訴了我們：求一個多項

式除法的商式，其真正的核心本質，等價於計算出一個遞迴數列 $h_0, h_1, \cdots, h_{n-m}$ 的值。

至此，我們的目光轉向了本身構成遞迴數列的「完全齊次對稱多項式」的計算方法。以 $h_n(a,b)$ 為例，第一種方法是按照定義，直接計算 $h_n(a,b) = a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n$。第二種方法是利用所謂的「$h-L$ 轉換公式」(參考資料[3])，即 $h_n(a,b) = L_{n+1}(a,b)$ $= \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$，此法的好處是所需計算的項大幅減少。第三種方法是利用所謂的「$e-h$ 恆等式」(參考資料[4])，即運用 $h_n(a,b)$ 本身符合的遞迴關係：$h_n - e_1 h_{n-1} + e_2 h_{n-2} = 0$，此法適於用遞迴計算。例：$h_3(1,2) = 1^3 + 1^2 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + 2^3 = \dfrac{2^4 - 1^4}{2-1} = 3 \cdot h_2 - 2 \cdot h_1 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 3$ $= 15$。讀者可視實際情形(心算、筆算或使用電腦程式)，選擇適當的算法。

例：求 $x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 所得之商式？

解：商式的 degree 為 $6-2=4$ 次，

$h_0(1,2) = 1$，$h_1(1,2) = 1+2 = 3$，$h_2(1,2) = 1^2 + 2^2 + 1 \cdot 2 = 7$，

$h_3(1,2) = 3 \cdot h_2 - 2 \cdot h_1 = 21 - 6 = 15$，$h_4(1,2) = 3 \cdot h_3 - 2 \cdot h_2 = 45 - 14 = 31$

($\because (x-1)(x-2) = e_0 x^2 - e_1 x + e_2 \Rightarrow e_0 = 1$，$e_1 = 3$，$e_2 = 2 \Rightarrow h_4 - 3h_3 + 2h_2 = 0$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31 \\ 15 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 97 \\ 42 \\ 16 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow q(x) = x^4 + 5x^3 + 16x^2 + 42x + 97$$ 。

例：求 $x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7$ 除以 $x(x+1)(x+2)$ 所得之商式？ [2]

解：商式的 degree 為 $6-3=3$ 次($n=6, m=3 \Rightarrow n-m=3$)

$h_0(0,-1,-2) = 1$，$h_1(0,-1,-2) = 0 - 1 - 2 = -3$，

$$h_2(0,-1,-2) = L_4(0,-1,-2) = \frac{0^4}{(0+1)(0+2)} + \frac{(-1)^4}{(-1-0)(-1+2)} + \frac{(-2)^4}{(-2-0)(-2+1)}$$

$= 0 - 1 + 8 = 7$，

$h_3(0,-1,-2) = -3 \cdot h_2 - 2 \cdot h_1 - 0 \cdot h_0 = -21 + 6 - 0 = -15$(註)，

$$\Rightarrow q(x)=\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & x^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-15\\7\\-3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & x^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6\\4\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$=x^3-x^2+4x-6$，所得之結果與參考資料[2]所得之商式完全一致。

註：$\because x(x+1)(x+2)=e_0x^3-e_1x^2+e_2x-e_3 \Rightarrow e_0=1$，$e_1=-3$，$e_2=2$，

$e_3=0 \Rightarrow h_3+3\cdot h_2+2\cdot h_1+0\cdot h_0=0$。

二、用「XAH 矩陣表示法」再證文[2]之商式係數公式：

$\displaystyle\sum_{s=1}^{m}\frac{u_{m+j}(p_s)}{p_s^{\,j+1}\cdot\prod_{1\le k\le m,k\ne s}(p_s-p_k)}$，其中 $u_k(x)=\displaystyle\sum_{i=k}^{n}a_ix^i$　[2]

證明：由商式的矩陣表示法，有

$$q(x)=\begin{bmatrix}1 & x & \cdots & x^{n-m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m+1} & a_m\\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_{m+2} & a_{m+1}\\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{m+j}\\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & a_n & a_{n-1}\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_{n-m}\\h_{n-m-1}\\\vdots\\h_{n-m-j}\\\vdots\\h_1\\h_0\end{bmatrix},$$

注意到由「$h-L$ 轉換公式」，有

$$\left.\begin{bmatrix}h_{n-m}\\h_{n-m-1}\\\vdots\\h_{n-m-j}\\\vdots\\h_1\\h_0\end{bmatrix}\right\|_{(p_1,p_2,\cdots,p_m)}=\left.\begin{bmatrix}L_{n-1}\\L_{n-2}\\\vdots\\L_{n-j-1}\\\vdots\\L_m\\L_{m-1}\end{bmatrix}\right\|_{(p_1,p_2,\cdots,p_m)}=\begin{bmatrix}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{p_i^{\,n-1}}{\prod_{\substack{1\le k\le m\\k\ne i}}(p_i-p_k)}\\\vdots\\\vdots\\\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{p_i^{\,n-j-1}}{\prod_{\substack{1\le k\le m\\k\ne i}}(p_i-p_k)}\\\vdots\\\vdots\\\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{p_i^{\,m-1}}{\prod_{\substack{1\le k\le m\\k\ne i}}(p_i-p_k)}\end{bmatrix}$$

($L_j(p_1,p_2,\cdots,p_m)=\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{p_i^{\,j}}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le m\\ k\ne i}}(p_i-p_k)}$)

其中，

$$\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{p_i^{\,n-1}}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le m\\ k\ne i}}(p_i-p_k)}\\ \vdots\\ \vdots\\ \sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{p_i^{\,n-j-1}}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le m\\ k\ne i}}(p_i-p_k)}\\ \vdots\\ \vdots\\ \sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{p_i^{\,m-1}}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le m\\ k\ne i}}(p_i-p_k)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_1^{\,n-1} & p_2^{\,n-1} & \cdots & p_m^{\,n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_1^{\,n-1-j} & p_2^{\,n-1-j} & \cdots & p_m^{\,n-1-j}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_1^{\,m-1} & p_2^{\,m-1} & \cdots & p_m^{\,m-1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le m\\ k\ne 1}}(p_1-p_k)}\\ \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le m\\ k\ne 2}}(p_2-p_k)}\\ \vdots\\ \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le m\\ k\ne m}}(p_m-p_k)}\end{bmatrix}$$

於是可得

$$q(x)=\begin{bmatrix}1 & x & \cdots & x^{n-m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m+1} & a_m\\ 0 & a_n & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m+2} & a_{m+1}\\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & 0 & a_n & \cdots & \cdots & a_{m+j}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_n & a_{n-1}\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_{n-m}\\ h_{n-m-1}\\ \vdots\\ h_{n-m-j}\\ \vdots\\ h_1\\ h_0\end{bmatrix}\Bigg|_{(p_1,p_2,\cdots,p_m)}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & x & \cdots & x^{n-m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m+1} & a_m\\ 0 & a_n & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m+2} & a_{m+1}\\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & 0 & a_n & \cdots & \cdots & a_{m+j}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_n & a_{n-1}\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1^{\,n-1} & p_2^{\,n-1} & \cdots & p_m^{\,n-1}\\ p_1^{\,n-2} & p_2^{\,n-2} & \cdots & p_m^{\,n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_1^{\,n-1-j} & p_2^{\,n-1-j} & \cdots & p_m^{\,n-1-j}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_1^{\,m} & p_2^{\,m} & \cdots & p_m^{\,m}\\ p_1^{\,m-1} & p_2^{\,m-1} & \cdots & p_m^{\,m-1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le m\\ k\ne 1}}(p_1-p_k)}\\ \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le m\\ k\ne 2}}(p_2-p_k)}\\ \vdots\\ \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le m\\ k\ne m}}(p_m-p_k)}\end{bmatrix}$$

令 $A=\begin{bmatrix}a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m+1} & a_m\\ 0 & a_n & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m+2} & a_{m+1}\\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & 0 & a_n & \cdots & \cdots & a_{m+j}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_n & a_{n-1}\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_n\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}p_1^{\,n-1} & p_2^{\,n-1} & \cdots & p_m^{\,n-1}\\ p_1^{\,n-2} & p_2^{\,n-2} & \cdots & p_m^{\,n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_1^{\,n-1-j} & p_2^{\,n-1-j} & \cdots & p_m^{\,n-1-j}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_1^{\,m} & p_2^{\,m} & \cdots & p_m^{\,m}\\ p_1^{\,m-1} & p_2^{\,m-1} & \cdots & p_m^{\,m-1}\end{bmatrix}$,

注意到 A 的第 $(j+1)$ 列乘上 P 的第 i 行，

即 $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n & \cdots & \cdots & a_{m+j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i^{\,n-1} & p_i^{\,n-2} & \cdots & p_i^{\,n-1-j} & \cdots & p_i^{\,m} & p_i^{\,m-1} \end{bmatrix}^T$

$= a_n p_i^{\,n-1-j} + a_{n-1} p_i^{\,n-2-j} + \cdots + a_{m+j+1} p_i^{\,m} + a_{m+j} p_i^{\,m-1}$ (其中 T 代表「轉置」，而 a 的下標與 p 的次方之差保持為 $j+1$)

再注意到

$$a_n p_i^{\,n-1-j} + a_{n-1} p_i^{\,n-2-j} + \cdots + a_{m+j+1} p_i^{\,m} + a_{m+j} p_i^{\,m-1} = \frac{a_n p_i^{\,n} + a_{n-1} p_i^{\,n-1} + \cdots + a_{m+j} p_i^{\,m+j}}{p_i^{\,j+1}}$$

$= \dfrac{u_{m+j}(p_i)}{p_i^{\,j+1}}$，於是有 $A \cdot P = \begin{bmatrix} \dfrac{u_m(p_1)}{p_1} & \dfrac{u_m(p_2)}{p_2} & \cdots & \dfrac{u_m(p_m)}{p_m} \\ \dfrac{u_{m+1}(p_1)}{p_1^{\,2}} & \dfrac{u_{m+1}(p_2)}{p_2^{\,2}} & \cdots & \dfrac{u_{m+1}(p_m)}{p_m^{\,2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{u_n(p_1)}{p_1^{\,n-m+1}} & \dfrac{u_n(p_2)}{p_2^{\,n-m+1}} & \cdots & \dfrac{u_n(p_m)}{p_m^{\,n-m+1}} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow q(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & \cdots & x^j & \cdots & x^{n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{u_m(p_1)}{p_1} & \frac{u_m(p_2)}{p_2} & \cdots & \frac{u_m(p_m)}{p_m} \\ \frac{u_{m+1}(p_1)}{p_1^{\,2}} & \frac{u_{m+1}(p_2)}{p_2^{\,2}} & \cdots & \frac{u_{m+1}(p_m)}{p_m^{\,2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{u_{m+j}(p_1)}{p_1^{\,j+1}} & \frac{u_{m+j}(p_2)}{p_2^{\,j+1}} & \cdots & \frac{u_{m+j}(p_m)}{p_m^{\,j+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{u_n(p_1)}{p_1^{\,n-m+1}} & \frac{u_n(p_2)}{p_2^{\,n-m+1}} & \cdots & \frac{u_n(p_m)}{p_m^{\,n-m+1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le m \\ k\ne 1}} (p_1 - p_k)} \\ \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le m \\ k\ne 2}} (p_2 - p_k)} \\ \vdots \\ \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le m \\ k\ne m}} (p_m - p_k)} \end{bmatrix}$$

由此可得商式 $q(x)$ 之中，x^j 的係數是 $\begin{bmatrix} \dfrac{u_{m+j}(p_1)}{p_1^{\,j+1}} & \dfrac{u_{m+j}(p_2)}{p_2^{\,j+1}} & \cdots & \dfrac{u_{m+j}(p_m)}{p_m^{\,j+1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le m \\ k\ne 1}} (p_1 - p_k)} \\ \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le m \\ k\ne 2}} (p_2 - p_k)} \\ \vdots \\ \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le m \\ k\ne m}} (p_m - p_k)} \end{bmatrix}$

$= \displaystyle\sum_{s=1}^{m} \frac{u_{m+j}(p_s)}{p_s^{\,j+1} \cdot \prod\limits_{1\le k\le m, k\ne s} (p_s - p_k)}$，其中 $u_k(x) = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} a_i x^i$，此即為所欲證之公式。

三、其他情形與應用

(一) 被除式為高次方

設 $ax^{17}+bx^{16}+1$ 除以 x^2-x-1 所得的商式為 $q(x)$，試求 $q(x)$ 之中，x^2 與 x^{10} 的係數各為何？(參考資料[5])

解：商式的 degree 為 $17-2=15$ 次

$$\Rightarrow q(x)=\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & \cdots & x^{10} & \cdots & x^{15}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & a & b & 0\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a & b\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_{15}\\ h_{14}\\ h_{13}\\ \vdots\\ h_2\\ h_1\\ h_0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x^2$ 的係數為 $a\cdot h_{13}+b\cdot h_{12}$，$x^{10}$ 的係數為 $a\cdot h_5+b\cdot h_4$

設 $x^2-x-1=0$ 的兩根為 α 與 $\beta \Rightarrow x^2-x-1=(x-\alpha)(x-\beta)$

$$\Rightarrow h_n(\alpha,\beta)=L_{n+1}(\alpha,\beta)=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=F_{n+1}$$

(由 $h-L$ 轉換公式與費氏數的 Binet 公式)

$\Rightarrow x^2$ 的係數為 $a\cdot h_{13}+b\cdot h_{12}=a\cdot F_{14}+b\cdot F_{13}=377a+233b$

x^{10} 的係數為 $a\cdot h_5+b\cdot h_4=a\cdot F_6+b\cdot F_5=8a+5b$

註：若用傳統長除法，則過程冗長易錯。原題的背景是一道徵答題，可參閱[5]。

(二) 除式有重根

例：試求 $x^5-2x^4+3x^3$ 除以 $(x-1)^2(x-2)$ 所得之商式。

解：商式的 degree 為 $5-3=2$ 次

$h_0(1,1,2)=1$，$h_1(1,1,2)=1+1+2=4$，$h_2(1,1,2)=1^2+1^2+2^2+1\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 2=11$

$$\Rightarrow q(x)=\begin{bmatrix}1 & x & x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11\\ 4\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x & x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=x^2+2x+6$$

註：由商式定理，可知

$$x^3=(x-a)(x-b)(x-c)\left[h_0(a,b,c)x^{n-3}+\cdots+h_{n-3}(a,b,c)\right]+r(x)$$

對於等式兩端，取 $\lim\limits_{c\to b}$ ，可得：

$$\lim_{c\to b}x^3=\lim_{c\to b}\ (x-a)(x-b)(x-c)\left[h_0(a,b,c)x^{n-3}+\cdots+h_{n-3}(a,b,c)\right]+\lim_{c\to b}r(x)$$

$$\Rightarrow x^3=(x-a)(x-b)^2\left[h_0(a,b,b)x^{n-3}+\cdots+h_{n-3}(a,b,b)\right]+\lim_{c\to b}r(x)$$

說明：$(x-a)(x-b)(x-c)\left[h_0(a,b,c)x^{n-3}+\cdots+h_{n-3}(a,b,c)\right]$可視為變數為 x,a,b,c 的多元多項式函數，此函數為連續函數，於是有 $\lim\limits_{c\to b}h_j(a,b,c)=h_j(a,b,b)$，因此「商式定理」對於除式有重因式的情形也依然成立。

(三) 多元多項式的除法

在張海潮教授的「父親幫我分解因式」(參考資料[6]) 一文中，談到 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的因式分解，張教授的父親將 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 除以 $x+y+z$，誠如文中所述，「用的是不厭其煩的長除法，一步一步，克竟其功」。

這道題目，讓筆者留下了深刻的印象。現在試用商式的矩陣表示法處理：將 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 與 $x+y+z$ 視為變數 x 的一元多項式，可將原題改寫為「用 $x^3+0x^2+(-3yz)x+(y^3+z^3)$ 除以 $x-(-y-z)$ 」，商式 $q(x)$ 為 3－1=2 次，$h_0(-y-z)=1$，$h_1(-y-z)=-y-z$，$h_2(-y-z)=(-y-z)^2=(y+z)^2$，且

$$q(x)=\begin{bmatrix}1 & x & x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -3yz\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_2\\ h_1\\ h_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x & x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -3yz\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(y+z)^2\\ -y-z\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & x & x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y^2-yz+z^2\\ -y-z\\ 1\end{bmatrix}=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$$

註：餘式的部份可用餘式定理：將 $x=-y-z$ 代入 $x^3+0x^2+(-3yz)x+(y^3+z^3)$ ，得 $(-y-z)^3+0+(-3yz)(-y-z)+(y^3+z^3)=0$ ，即餘式為 0，於是有 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\ (x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ 。

(四) 除式未因式分解或不易分解

例：試求 $x^6 - 2x^5$ 除以 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 的商式。

解：商式的 degree 為 $6-3=3$ 次，可設

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = e_0x^3 - e_1x^2 + e_2x - e_3$。

問題在於，h_0, h_1, h_2, h_3 之值如何計算？

相對地，基本對稱多項式 e_0, e_1, e_2, e_3 的值可從被除式的係數直接得到：

$e_0 = 1$，$e_1 = 6$，$e_2 = 11$，$e_3 = 6$。

在參考資料[7]中，有公式可將 $h_m(p_1, p_2, \cdots, p_m)$ 用 $e_1, e_2, \cdots, e_m$ 的行列式表示：

$$h_m(p_1, p_2, \cdots, p_m) = \left.\begin{vmatrix} e_1 & e_0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ e_2 & e_1 & e_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ e_3 & e_2 & e_1 & e_0 & \ddots & \cdots & 0 & 0 \\ e_4 & e_3 & e_2 & e_1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & e_1 & e_0 & 0 \\ e_{m-1} & e_{m-2} & e_{m-3} & \cdots & \ddots & e_2 & e_1 & e_0 \\ e_m & e_{m-1} & e_{m-2} & \cdots & \cdots & e_3 & e_2 & e_1 \end{vmatrix}\right|_{(p_1, p_2, \cdots, p_m)}$$

於是可得

$h_1 = e_1 = 6$，$h_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_0 \\ e_2 & e_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 11 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 11 = 25$，$h_3 = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 11 & 6 & 1 \\ 6 & 11 & 6 \end{bmatrix} = 90$，至此，

可得 $q(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 90 \\ 25 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 13 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= x^3 + 4x^2 + 13x + 40$

說明：本例的方法具有一般性，即在

$$q(x)=\begin{bmatrix}1 & x & \cdots & x^{n-m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m+1} & a_m \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_{m+2} & a_{m+1} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{m+j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & a_n & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_{n-m} \\ h_{n-m-1} \\ \vdots \\ h_{n-m-j} \\ \vdots \\ h_1 \\ h_0 \end{bmatrix}$$ 之中，代入

$$h_m(p_1,p_2,\cdots,p_m)=\begin{vmatrix} e_1 & e_0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ e_2 & e_1 & e_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ e_3 & e_2 & e_1 & e_0 & \ddots & \cdots & 0 & 0 \\ e_4 & e_3 & e_2 & e_1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & e_1 & e_0 & 0 \\ e_{m-1} & e_{m-2} & e_{m-3} & \cdots & \ddots & e_2 & e_1 & e_0 \\ e_m & e_{m-1} & e_{m-2} & \cdots & \cdots & e_3 & e_2 & e_1 \end{vmatrix}$$

，由於 $e_0,e_1,\cdots,e_m$ 之值可從除式直接得到，而 $a_m,a_{m+1},\cdots,a_n$ 之值可從被除式直接得到，換句話說，此時所得的商式，已**可用被除式與除式的係數直接表達**，以此角度而言，已得到了多項式除法的商式的「**真正公式解**」。

註：在上例中，分解除式後，可得 $\alpha=1$，$\beta=2$，$\gamma=3$。若要求 $h_5(1,2,3)$，則可用

擴充變數的方式：$h_5(1,2,3)=h_5(1,2,3,0,0)=\begin{vmatrix} e_1 & e_0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & e_1 & e_0 & 0 & 0 \\ e_3 & e_2 & e_1 & e_0 & 0 \\ e_4 & e_3 & e_2 & e_1 & e_0 \\ e_5 & e_4 & e_3 & e_2 & e_1 \end{vmatrix}_{(1,2,3,0,0)}$，其中

$e_0(1,2,3,0,0)=1$，$e_1(1,2,3,0,0)=1+2+3+0+0=6$，

$e_2(1,2,3,0,0)=e_2(1,2,3)=1\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot 3=11$，

$e_3(1,2,3,0,0)=e_3(1,2,3)=1\cdot 2\cdot 3=6$，

$e_4(1,2,3,0,0)=1\cdot 2\cdot 3\cdot 0+\cdots+2\cdot 3\cdot 0\cdot 0=0$，$e_5(1,2,3,0,0)=1\cdot 2\cdot 3\cdot 0\cdot 0=0$，所以

有 $h_5(1,2,3)=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 11 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 11 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 11 & 6 \end{vmatrix}=966$。

參、結語

本篇文章的念頭非常簡單：注意到 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ 是 $1,x,\cdots,x^n$ 的「線性組合」，於是從「核心情形」的商式定理出發，把 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ 除以 $(x-p_1)\cdots\cdots(x-p_m)$ 所得的商式 $q(x)$，寫成矩陣的形式：

$$q(x)=\begin{bmatrix}1 & x & \cdots & x^{n-m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m+1} & a_m \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_{m+2} & a_{m+1} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{m+j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & a_n & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix}\left.\begin{bmatrix} h_{n-m} \\ h_{n-m-1} \\ \vdots \\ h_{n-m-j} \\ \vdots \\ h_1 \\ h_0 \end{bmatrix}\right|_{(p_1,p_2,\cdots,p_m)}$$

此一表達式，使得人們可以直接地求得多項式除法所得商式的任意一項係數，無論被除式的次方多高，係數有多複雜，只要先計算出作為核心數列的「完全齊次對稱多項式」：$h_0,h_1,\cdots,h_{n-m}$，就可以對於同一個固定的除式 $g(x)=\prod_{1\le i\le m}(x-p_i)$，同時平行處理大量不同的被除式，這是矩陣表示法的實用價值所在。另一方面，矩陣表示法中的「完全齊次對稱多項式」：$h_0,h_1,\cdots,h_{n-m}$，也呈現了隱藏在多項式除法之內的一種對稱性。

最後要說明的是，本文在呈現矩陣表示法的同時，或許也過度貶抑了傳統的長除法；而在「算法」的比較上，也不盡完備，只能說，本文提出的只是直接得到商式某項係數的一種作法。其實各種數學觀點，應該都有某種價值或存在的意義，尚請各位賢明的讀者與教學先進，就本文予以指正或給予建議，那將會是在下最大的榮幸！

參考資料

陳建燁。商式定理。**數學傳播季刊，41**(4)，78-88，2017。

吳波。多項式除法的商式與餘式。**數學傳播季刊，43**(3)，69-74，2019。

陳建燁。**推廣的 Vandermonde 行列式(最右行升次型)**。高中數學學科中心電子報第 114 期，2016。

陳建燁。**對稱多項式的 $e-h$ 恆等式(上)**。高中數學學科中心電子報第 124 期，2017。

陳建燁。**由一道多項式整除問題看費氏數列的一般式**。高中數學學科中心電子報第 106 期，2016。

張海潮。**父親幫我分解因式**。高中數學學科中心電子報第 44 期，2010。

陳建燁。**對稱多項式的 $e-h$ 恆等式(下)**。高中數學學科中心電子報第 124 期，2017。

附錄

1. 完全齊次對稱多項式 **(Complete Homogeneous Symmetric Polynomial)** (參考資料[3])

定義：$h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k\\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\geq 0}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n})$，稱為「變數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 k 次完全齊次對稱多項式」。特別地，$h_0(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$， 且 $h_k(a)=a^k$ 。

例：$h_2(a_1,a_2,a_3)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2\\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geq 0}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}a_3^{\lambda_3})=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$ 。

例：$h_2(a,b,c)=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$ 。　例：$h_3(a,b)=a^3+b^3+a^2b+ab^2$ 。

2. 基本對稱多項式　(參考資料[4])

定義：$e_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k\\ 0\leq\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\leq 1}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n})$，稱為「變數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 k 次基本對稱多項式」。

例：$e_2(a_1,a_2,a_3)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2\\ 0\leq\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\leq 1}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}a_3^{\lambda_3})=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$ 。

例：$e_0(a,b,c)=1$，$e_1(a,b,c)=a+b+c$，$e_2(a,b,c)=ab+bc+ca$，$e_3(a,b,c)=abc$。

例：$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-e_1(a,b,c)x^2+e_2(a,b,c)x-e_3(a,b,c)$ 。

3. 拉格朗日插值型式　(參考資料[3])

定義：$L_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^k}{\prod\limits_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}(a_i-a_j)}$，稱為「變數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 k 次拉格朗日插值型式」。

註：以分子的次方來定義 L 的下標。

例：$L_2(a_1,a_2,a_3)=\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{a_i^2}{\prod\limits_{\substack{1\leq j\leq 3\\ j\neq i}}(a_i-a_j)}$

$$=\frac{a_1^2}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{a_2^2}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{a_3^2}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

例：$L_2(a,b,c)=\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

4. $h-L$ 轉換公式：$h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=L_{k+n-1}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$　(其中 $n\geq 2$，$k\geq 0$）參考資料[3])

說明：此一公式，可將「完全齊次對稱多項式」與「拉格朗日插值型式」互相轉換。以下舉例說明公式的精神與用法，而詳細證明請見參考資料[3]。

例：$L_{k+1}(a,b)=\dfrac{a^{k+1}}{a-b}+\dfrac{b^{k+1}}{b-a}=\dfrac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}=a^k+a^{k-1}b+\cdots+ab^{k-1}+b^k=h_k(a,b)$，此為 $n=2$ 的情形。

例：$L_6(a,b,c)=\dfrac{a^6}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^6}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^6}{(c-a)(c-b)}$，有 3 個變數 a,b,c，先看出 $n=3$。再由 $k+(n-1)=6$，得 $k=4$。於是有 $L_6(a,b,c)=h_4(a,b,c)$。也可以這樣看，$\dfrac{a^6}{(a-b)(a-c)}$ 的分母的次方之所以是 2，是因為變數個數為 3，用 a 分別去減 b,c 所產生。而整個分式化簡之後所得齊次式的次數為 4，可看成用分子的 6 次方，減去分母的 2 次方而得。

5. **對稱多項式的「$e-h$ 恆等式」** (參考資料[4])

$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k e_k\cdot h_{n-k}=0$，其中 $n\geq m$，

亦即 $h_n-e_1h_{n-1}+\cdots+(-1)^t e_t h_{n-t}+\cdots+(-1)^m e_m h_{n-m}=0$。

(其中 $e_k=e_k(a_1,a_2,\cdots,a_m)$， $h_k=h_k(a_1,a_2,\cdots,a_m)$)

說明：此式刻劃了基本對稱多項式與完全齊次對稱多項式的關聯性，也說明了 $h_k(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 是 m 階遞迴數列。特別地，當 $m=3$ 時，有 $\sum_{k=0}^{3}(-1)^k e_k\cdot h_{n-k}=0$，即

$$h_n(a_1,a_2,a_3)-e_1(a_1,a_2,a_3)h_{n-1}(a_1,a_2,a_3)+e_2(a_1,a_2,a_3)h_{n-2}(a_1,a_2,a_3)-e_3(a_1,a_2,a_3)h_{n-3}(a_1,a_2,a_3)=0$$

，簡記為 $h_n-e_1\cdot h_{n-1}+e_2\cdot h_{n-2}-e_3\cdot h_{n-3}=0$。