一個兒童戶外攀爬遊樂設施的幾何結構探討

王儷娟 [1]* 柯文長 [2]

[1] 臺南市立仁德文賢國民中學

[2] 崑山科技大學

鄰近國小的操場上新增一個兒童攀爬遊樂設施（如圖 1）。乍看之下，此遊樂設施好似半個巴克球 (buckyballs)結構。巴克球是一個截角二十面體 (truncated icosahedron)，由 12 個正五邊形和 20 個正六邊形所組成 (如圖 2) [1]。巴克球之結構特性是其頂點可共球面(即有外接球)(如圖 3)。從圖 1，仔細觀察，此攀爬遊樂設施的半球結構由橘色、藍色和綠色的鋼棒所構成。其中，橘色鋼棒圍出 6 個正五邊形、5 個正六邊形及 5 個半正六邊形。仔細比較一下，遊樂設施的正五邊形數量是巴克球正五邊形數量的一半。但是，正六邊形明顯不及巴克球正六邊形數量的一半。 顯然，攀爬遊樂設施僅是半個巴克球的一部分，而非半個巴克球(如圖 4)。再觀察攀爬遊樂設施的結構，橘色鋼棒圍出正五邊形及正六邊形，並且藉由綠色鋼棒及藍色鋼棒形成了五角錐及六角錐。然而，這些角錐的頂點(橘色)是否皆為巴克球之外接球球面上的點呢？如果是，利用國中所學的幾何知識，就可以設計各種不同結構的攀爬遊樂設施，例如:以正八面體取代巴克球。懂了這個道理與作法，學生在學習幾何形體時將更能理解幾何在生活中的實際應用，享受數學之美！

圖 1、兒童攀爬遊樂設施

圖 2、巴克球

*為本文通訊作者

圖 3、巴克球與外接球

圖 4、兒童攀爬遊樂設施於巴克球的相對位置圖

本文以空間直角坐標系解析巴克球的邊長與外接球半徑的關係，接著利用尺規作圖繪製巴克球的外接球半徑，並進一步驗證圖 1 中的兒童攀爬遊樂設施之角錐頂點是否為巴克球之外接球球面上的一點。最後，利用餘弦定理確認上述分析的可靠性。

首先，將一個正二十面體的幾何中心設為原點(0, 0, 0)，假設邊長為 2，其頂點坐標分別為(0, ±1, ±φ)、(±1, ±φ, 0)及(±φ, 0, ±1)　，其中$\varphi = (\sqrt{5}+1)/2$。圖 5 顯示此正二十面體及其三個內接的黃金矩形與其中的 A、B、C、D 四個頂點坐標。其次，取正二十面體各邊的三等分處，截去正二十面體的十二個頂點，即可獲得各邊等長且長度為 2/3 的截角二十面體(如圖 6)。在圖 6 中，A’與 D’為圖 5 $\overline{AD}$ 的三等分點；B’與 C’為圖 5 $\overline{BC}$ 的三等分點。

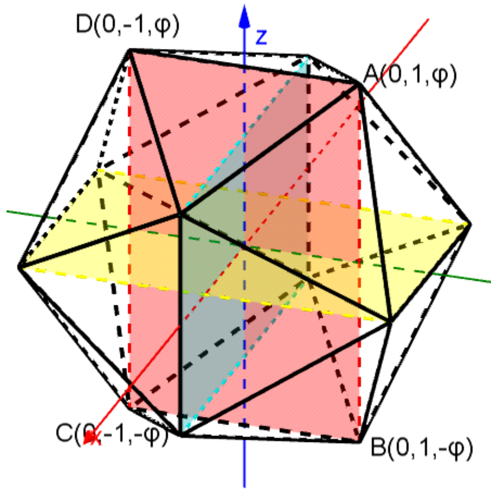

圖 5、正二十面體

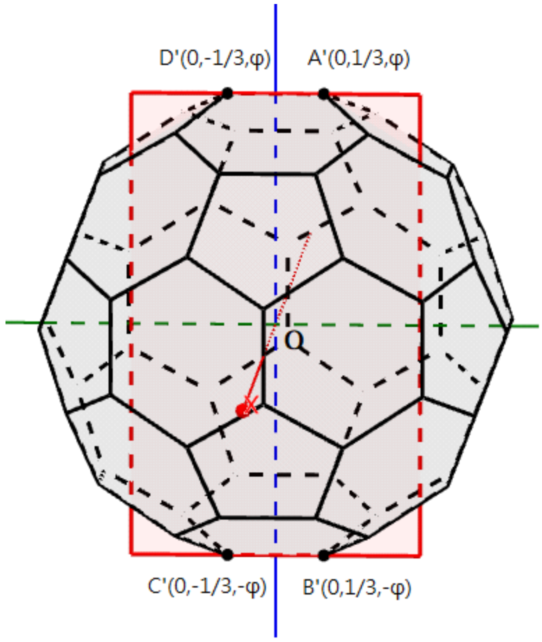

圖 6、截角正二十面體

利用兩點距離公式，原點到A'的距離

即為$\sqrt{\varphi^2+1/9}$。因此，巴克球的邊長與外接球半徑比為：$2/3:\sqrt{\varphi^2+1/9}=2:\sqrt{1+9\varphi^2}=2:\sqrt{10+9\varphi}$。圖 7 與圖 8 呈現如何利用尺規作圖獲得線段長度分別為φ及$\sqrt{10+9\varphi}$的具體作法，其繪製步驟詳述如下，因實際作圖尺寸太大，圖 7 與圖 8 採用單位長度作圖：

1. 在圖 7 中，畫一直線 L 並在 L 上取$\overline{O_1A_1}$=$\overline{O_1B_1}=1$ (單位長度)，
2. 過O_1點作直線$L_1\perp$L，並在直線L_1取$\overline{O_1C_1}=2$，
3. 連接$\overline{B_1C_1}$，則$\overline{B_1C_1}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，
4. 在直線 L 上取一點D_1,使得$\overline{B_1D_1}=\sqrt{5}$,則$\overline{O_1D_1}=\left(1+\sqrt{5}\right)$ ，
5. 作$\overline{O_1D_1}$的中點E_1，則$\overline{O_1E_1}=\overline{D_1E_1}=(1+\sqrt{5})/2=\varphi$ 。
6. 在圖 8 中，畫一直線 M，並取$\overline{O_2A_2}=1$、$\overline{O_2B_2}=10$、$\overline{B_2C_2}=9\varphi$，
7. 作$\overline{A_2C_2}$的中點D_2，
8. 以D_2點為圓心，$\overline{A_2D_2}$為半徑畫半圓，
9. 過O_2點作直線$M_1\perp$M，且直線M_1交半圓於點E_2，則$\overline{O_2E_2}=\sqrt{10+9\varphi}$ 。

至此，已完成利用尺規作圖獲得巴克球之外接球半徑。

回到戶外攀爬遊樂設施的幾何結構，觀察圖 1,假設橘色點位於外接球球面上，接著，利用尺規作圖獲得此結構中藍色與綠色鋼棒的長度(見六角錐與五角錐)。一旦獲得這些長度數據，即可與實際測量的長度數據進行比較，以進一步驗證此攀爬遊樂設施的橘色點是否為巴克球之外接球球面上的點。

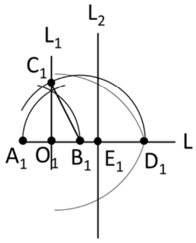

圖 7、線段長度φ的尺規作圖

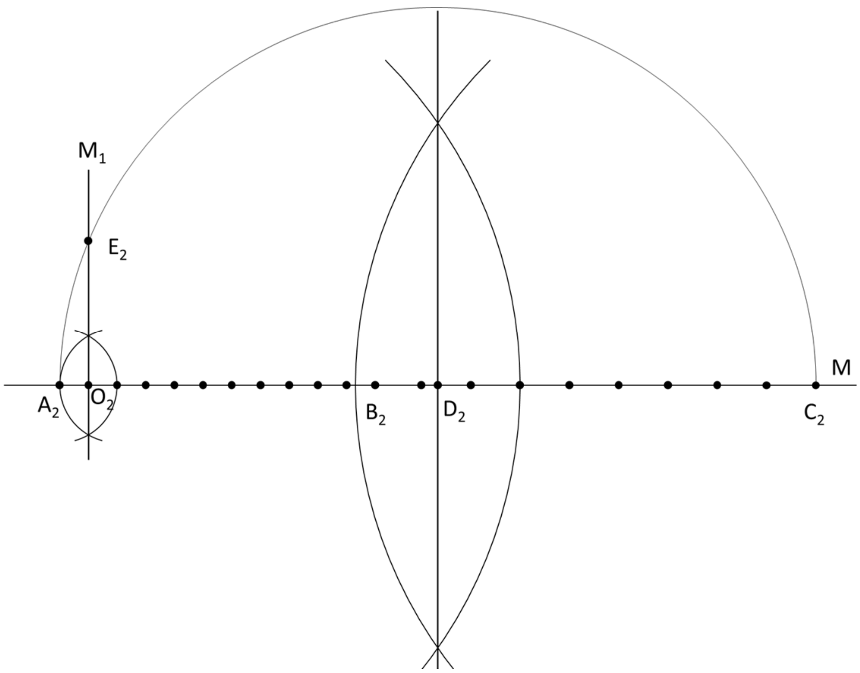

圖 8、線段長度$\sqrt{10+9\varphi}$的尺規作圖

為了求出圖 1 中藍色鋼棒的尺規作圖長度，圖 9 呈現圖 1 之六角錐的幾何結構。在圖 9 中，連接截角二十面體的幾何中心原點 O 與正六邊形 ABCDEF 的中心 P 點，並進一步延長到外接球球面上的P' 點，則$\overline{AP'}$即為藍色鋼棒。假設截角二十面體的邊長為 2 (即橘色鋼棒的長度)，則外接球半徑為$\sqrt{10+9\varphi}$。 接著，取一個邊長為 2 cm 的正六邊形 ABCDEF，其中心點為 P，同樣利用尺規作圖，即可獲得正六邊形的對角線長度(如圖 9 之 AD)，尺規作圖步驟詳述如下：

1. 以 P 點為圓心，$\overline{PA}=2$ cm 為半徑畫圓，
2. 以 A 點為圓心，$\overline{PA}$為半徑畫弧交圓 P 於 B 點，
3. 以 B 點為圓心，$\overline{PA}$為半徑畫弧交圓 P 於 C 點，
4. 重複步驟 3，依序可獲得 D 點、E 點及 F 點，
5. 連接 A、B、C、D、E 和 F 六點得一正六邊形，如圖 10。

考慮圖 9 之扇形 OAD，利用尺規作圖，以 O 為圓心，$\overline{OD}=\sqrt{10+9\varphi}$ cm 為半徑畫一弧，在圓弧上取一弦$\overline{AD}$ (= 4 cm)，作$\overrightarrow{OP}\perp\overline{AD}$，且交圓弧 AD 於$P'$點(詳如圖 11 所示)，連接$\overline{AP'}$，經測量$\overline{AP'}$ (即藍色鋼棒)長約為 2.05 cm (如圖 12)。

接著，以相同的方法決定圖 1 中綠色鋼棒的長度。圖 13 顯示圖 1 之五角錐的幾何結構。在圖 13 中，連接截角二十面體的幾何中心原點 O 與正五邊形 BCGHI 的中心 Q 點，$\overrightarrow{OQ}$交外接球面於Q'點，$\overline{BQ'}$即為綠色鋼棒。同樣取邊長為 2 cm，利用尺規作圖繪製正五邊形 BCGHI，其詳細步驟如下所述：

1. 畫一直線 L’，並在 L’ 上取$\overline{HG}=2$ cm。
2. 分別以 H 點及 G 點為圓心，2φ cm 長為半徑，在 L’ 上方畫弧，設兩弧交於 B 點，連接$\overline{BH}$及$\overline{BG}$。

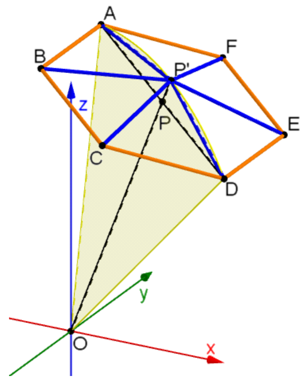

圖 9、六角錐的幾何結構

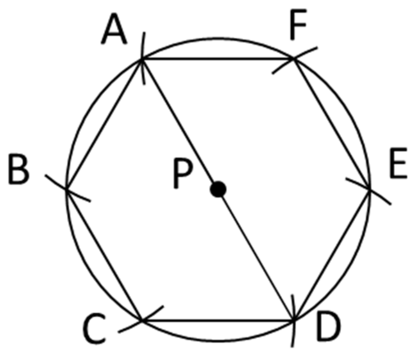

圖 10、正六邊形作圖

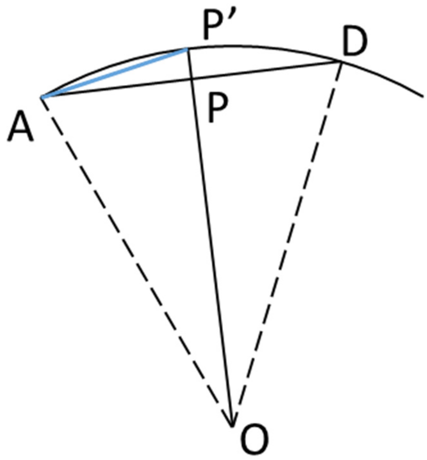

圖 11、繪圖求藍色鋼棒長度

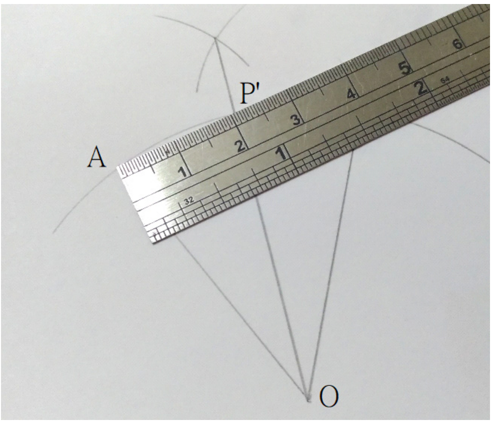

圖 12、測量藍色鋼棒之作圖結果

3. 分別以 B 點及 H 點為圓心，2 cm 長為半徑在$\overline{BH}$的左側畫弧，設兩弧交於 I 點，連接$\overline{IB}$及$\overline{IH}$。
4. 分別以 B 點及 G 點為圓心，2 cm 長為半徑在$\overline{BG}$的左側畫弧，設兩弧交於 C 點，連接$\overline{CB}$及$\overline{CG}$，則完成正五邊形 BIHGC。
5. 分別作$\overline{HG}$及$\overline{CG}$的中點 N 與 R
6. 連接$\overline{BN}$及$\overline{IR}$，其交點即為正五邊形 BIHGC 的中心點 Q 點。(如圖 14)。

進一步，利用尺規作圖繪製扇形 OHG (如圖 15)，以 O 為圓心，$\overline{OG}=\sqrt{10+9\varphi}\ cm$ 為半徑畫一弧，在圓弧上取一弦$\overline{HG}$ (= 2 cm)，N 為$\overline{HG}$中點，N'為$\overrightarrow{ON}$ 與弧 HG 的交點。再觀察扇形 OBN'，繼續利用尺規作圖，作出$\overline{BN}$，接著利用圖 14 取得$\overline{BQ}$ 的長度，於圖 15 找出$\overline{BN}$上的 Q 點，$\overrightarrow{OQ}$ 與弧 BG 交於 Q' 點，連接$\overline{BQ'}$，經測量$\overline{BQ'}$ (即綠色鋼棒)長約為 1.8 cm(如圖 16)。

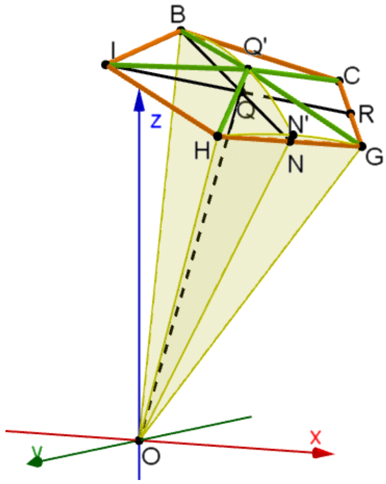

圖 13、五角錐的幾何結構

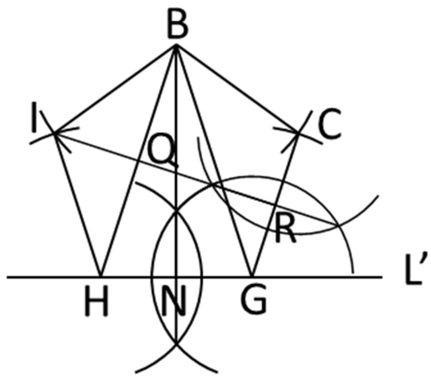

圖 14、正五邊形作圖

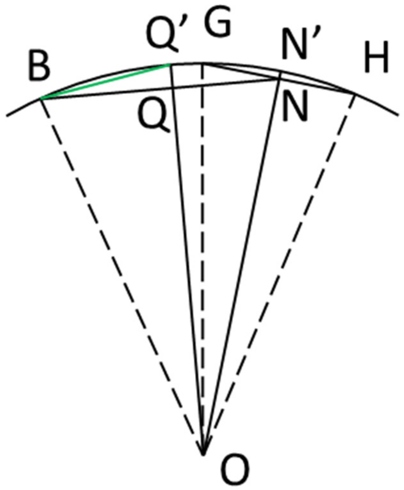

圖 15、繪圖求綠色鋼棒長度

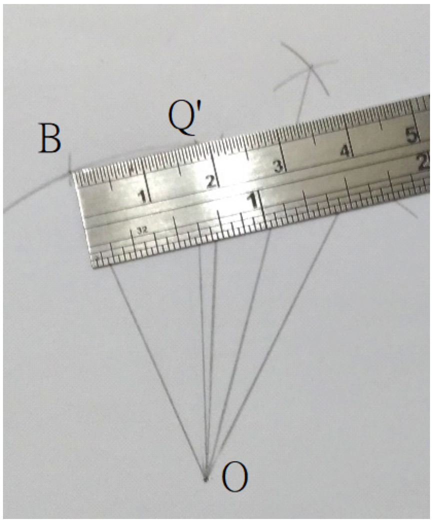

圖 16、測量綠色鋼棒之作圖結果

經尺規作圖法，得到橘、藍及綠色鋼棒的長度比為 2：2.05：1.8。經實測，戶外攀爬遊樂設施的橘、藍及綠色鋼棒的長度分別為 93.5 *cm*、95.3 *cm* 及 81 *cm*，其長度比約為 2：2.04：1.73。實體測量之長度比與尺規作圖的結果相當接近。此外，利用餘弦定理，亦可獲得藍色鋼棒和綠色鋼棒的長度。其數學運算式簡述如下：

1. 如欲求得藍色鋼棒的長度，從圖 11 的直角△OAP，∵$\overline{OA}$=$\sqrt{10+9\varphi}$ *cm*，$\overline{AP}$=2 *cm*，

   ∴∠AOP’=∠AOP=$\sin^{-1}\left(2/\sqrt{10+9\varphi}\right)$，依據餘弦定理，

   $\overline{AP'}$=$\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OP'}^2-2\overline{OA}*\overline{OP'}*\cos(\angle AOP')}$

   =$\sqrt{20+18\varphi-2(10+9\varphi)\cos\left(\sin^{-1}\left(2/\sqrt{10+9\varphi}\right)\right)}$ (*cm*)

   上式經由計算機算出近似值為 2.04 *cm*。

2. 如欲求得綠色鋼棒的長度，由圖 14 已知 Q 點為正五邊形 BIHGC 的中心，

   ∠BQI=2π/5，又$\overline{BQ}=\overline{IQ}$且$\overline{BI}=2\,cm$，∴$\overline{BQ}=\csc\left(\frac{\pi}{5}\right)$，再從圖 15 的直角△OQB，∵$\overline{OB}=\sqrt{10+9\varphi}$ *cm*，∴∠BOQ’=∠BOQ=$\sin^{-1}\left(\frac{\overline{BQ}}{\overline{OB}}\right)=\sin^{-1}(\sqrt{10+9\varphi}/\csc(\frac{\pi}{5}))$，

   依據餘弦定理，

   $\overline{BQ'}$=$\sqrt{\overline{OB}^2+\overline{OQ'}^2-2\overline{OB}*\overline{OQ'}*\cos\left(\angle BOQ'\right)}$

   $=\sqrt{20+18\varphi-2(10+9\varphi)\cos(\sin^{-1}(\csc(\frac{\pi}{5})/\sqrt{10+9\varphi}))}$ (*cm*)

   上式經由計算機算出近似值為 1.73*cm*。

由餘弦定理所求得的橘、藍及綠色鋼棒的長度比與實測值一致。據此，可以得知利用國中所學的尺規作圖法就可以驗證圖 1 之半球型遊樂設施的正六邊形和正五邊形的中央橘色點的位置幾乎位於巴克球之外接球球面上。是不是很實用也很有趣呢！？

想一想，如果利用正八面體結構(如圖 17)，如何設計出另一種不同創意的攀爬遊樂器材(如圖 18)？動手試試看！

[提示 1] 正八面體頂點坐標分別為 $(\pm 1, 0, 0)$、$(0, \pm 1, 0)$、$(0, 0, \pm 1)$。

[提示 2] 以 8 支等長的藍色鋼棒構成一個四角錐(即半正八面體)。

[提示 3] 圖 13 的紅色點位於正八面體之外接球的球面上。

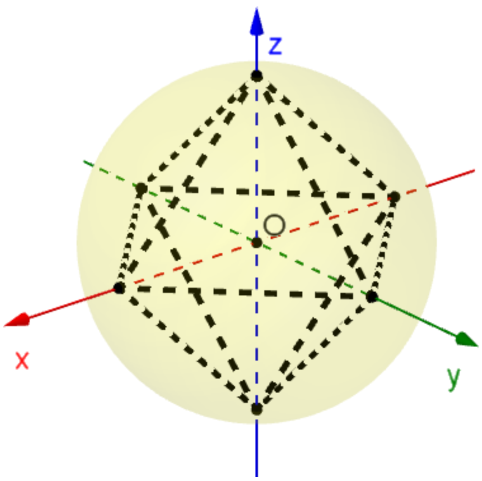

圖 17、正八面體的結構

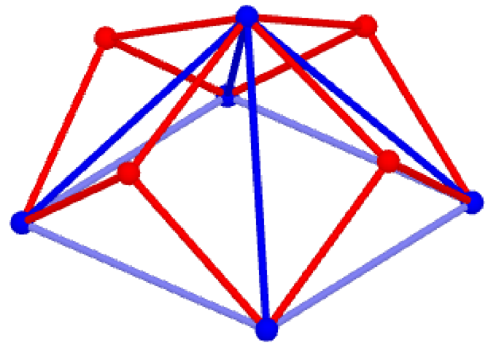

圖 18、攀爬遊樂器材示意圖

致謝

本文的完成特別感謝藝術家吳寬瀛老師的分享，及新北市林口國中李政憲老師、台中市居仁國中游曉琦老師及台中二中吳惠美老師協助修正。此外，對於匿名審稿委員的寶貴意見，特別是提高本文之嚴謹與閱讀性的評論致予衷心的感謝。

參考資料

Truncated icosahedron. Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Truncated_icosahedron