平面凸六邊形對角線長度連乘積方程式

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

壹、前言

主題的對角線長度連乘積是指在多邊形圖形中先選取一頂點，通過這頂點的所有對角線長與此頂點位置處的頂角兩端點相連結的對角線長的連乘積。例如：圖 1.中對一個平面凸六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 先選取頂點 A_1，通過這頂點的所有對角線長有 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$，$\overline{A_1A_4}=d_{14}$，$\overline{A_1A_5}=d_{15}$，頂點 A_1 處頂角 $\angle A_6A_1A_2$ 兩端點相連結的對角線長為 $\overline{A_2A_6}=d_{26}$，則此六邊形對角線長度連乘積是 $d_{26}d_{13}d_{14}d_{15}$，本題主旨是要探討如何以凸六邊形的各邊長長度、各頂角角度等幾何量正確的來組合成 $d_{26}d_{13}d_{14}d_{15}$ 此項連乘積值的有效關係表示式。

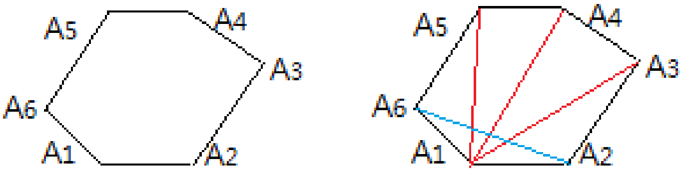

圖 1

接下來的敘述撰文過程中，所有多邊形圖形裡皆習慣性地選取頂點 A_1 作為標示的定點，以統一完整描寫出各多邊形的對角線長度連乘積方程式內涵型態。

對角線段長連乘積方程式首見於托勒密定理(Ptolemy's theorem)等式方程式中，其文意敘述如下：任意給定一個圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，下圖 2.，令邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_1}=V_4$，兩條對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$，$\overline{A_2A_4}=d_{24}$，

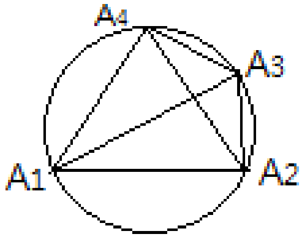

圖 2

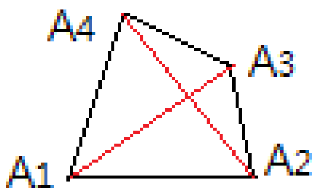

圖 3

則此托勒密定理的方程式等式內容依圖 2.結構完整表示成下式；

$$d_{13}d_{24}=V_1V_3+V_2V_4 \tag{1}$$

此等式方程式(1)式就是圓內接四邊形托勒密定理的對角線長度連乘積方程式。

平面凸四邊形如圖 3.也有對角線連乘積方程式；現在來證明，請看下圖 4.，

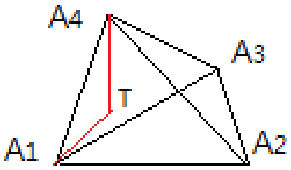

圖 4

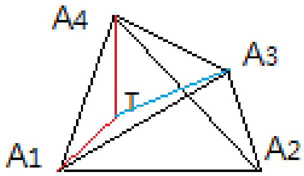

圖 5

(1) 對於四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，在頂點 A_4 處向圖形內側作一射線 A_4T，使 $\angle A_1A_4T=\angle A_2A_4A_3$，又在頂點 A_1 處對圖形內側作另一射線 A_1T ，使 $\angle A_4A_1T=\angle A_4A_2A_3$，此兩射線交在 T 點；則 $\Delta A_1A_4T\approx\Delta A_2A_4A_3$(互為相似形)且 $\angle A_4TA_1=\angle A_4A_3A_2$。並繼續連接 T 與 A_3 兩點，使形成線段 TA_3 。請看上圖 5.作輔助線完成圖。

(2) 由兩相似三角形對應邊長必成正比例關係，得 $V_4:d_{24}=\overline{A_1T}:V_2=\overline{A_4T}:V_3$ $\Rightarrow$可得 $V_4:\overline{A_4T}=d_{24}:V_3$，再由 $\angle A_1A_4A_2=\angle TA_4A_3$ 及兩對應邊長成正比例與其夾角相等的相似形性質，可得知另兩相似形關係 $\Delta A_1A_4A_2\approx\Delta TA_4A_3$，因此可得 $\angle A_4A_1A_2=\angle A_4TA_3$，且有另一組正比例關係式為 $V_4:\overline{A_4T}=d_{24}:V_3=V_1:\overline{A_3T}$ 。

(3) 對作圖 5.中的 ΔTA_1A_3 言，由三角形的餘弦定理知 $d_{13}{}^2=(\overline{A_1T})^2+(\overline{A_3T})^2-2\cdot(\overline{A_1T})\cdot(\overline{A_3T})\cdot\cos(\angle A_1TA_3)$ ，而在上述(2).的兩組正比例平關係式中可求得 $\overline{A_1T}=(V_2V_4)/d_{24}$ 及 $\overline{A_3T}=(V_1V_3)/d_{24}$，將此兩者代入餘弦定理公式內並化簡、整理，可得下列新方程式(2-a)；

$$(d_{13}d_{24})^2=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos(\angle A_1TA_3) \tag{2-a}$$

(4) 在頂點 T 處四周圍角度關係可知

$\angle A_1TA_3$ = $2\pi-\angle A_4TA_3-\angle A_1TA_4=2\pi-\angle A_4A_1A_2-\angle A_4A_3A_2=A_2$(頂角)+ A_4(頂角) ，此處對四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 言，其四個頂角總和為 2π ，所以將 $\angle A_1TA_3=$ A_2+A_4 代入方程式(2-a)，即得證出平面凸四邊形兩交叉對角線長度連乘積一般化方程式為下列方程式(2)式；

$$(d_{13}d_{24})^2=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4) \tag{2}$$

比較(1)式與(2)式知悉只要平面凸四邊形內接於一圓，則由對角互補性質得；$A_2+A_4=\pi \quad \Rightarrow \quad \cos(A_2+A_4)=-1$ ⇒發現(2)式內容完全統一涵蓋了(1)式。所以，無論是圓內接四邊形或平面凸四邊形都可證出對角線長度連乘積方程式。

(1)式的型態結構相當精簡規律，(2)式稍為複雜且方程式呈現出對角線長度連乘積的二次方表示式。後續證出的平面凸五邊形及平面凸六邊形顯示的方程式情況內涵亦是如此。現在先來看看圓內接五邊形及圓內接六邊形方程式的型態；

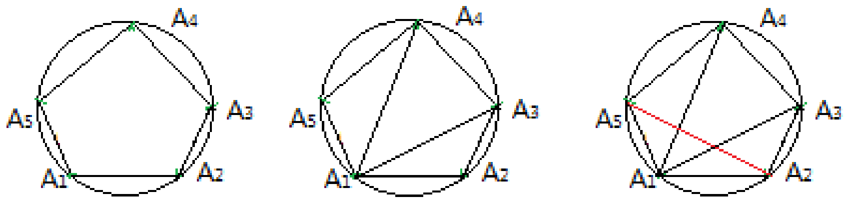

圖 6

$$d_{25}d_{13}d_{14}=V_2V_5d_{14}+V_3V_5V_1+V_4V_1d_{13} \tag{3}$$

方程式(3)式即稱為圓內接五邊形對角線長度連乘積方程式。

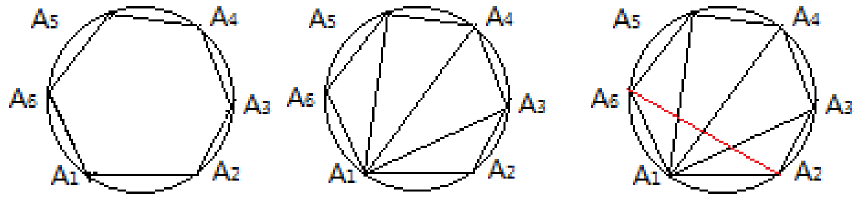

圖 7

$$d_{26}d_{13}d_{14}d_{15} = V_2V_6d_{14}d_{15}+V_3V_6V_1d_{15}+V_4V_6V_1d_{13}+V_5V_1d_{13}d_{14} \tag{4}$$

方程式(4)式為圓內接六邊形對角線長度連乘積方程式。(3)式、(4)式具規律性。此方程式(3)式、(4)式將於下述主文內容中清晰地分別描述出兩者的推理證明。

貳、本文

從平面凸四邊形圖形起，要應用(2)式的型態逐步來推導驗證平面凸五邊形及平面凸六邊形的對角線長度連乘積方程式；在演繹運算期間，發現無法以跳躍方式直接就凸六邊形圖形作推演證明，不像圓內接多邊形可以逕由任何邊數多邊形逐次地調降邊數加以分析、演算、聯結由多邊數降低到少邊數而完成證明。接下來的文章裡，對每一個多邊形會

依序先導證出其一般形的方程式，再依據圓內接多邊形內角特質詳細抽絲剝繭而推論出其相對應的圓內接多邊形對角線長度連乘積方程式。演繹運算流程中更頻繁的需要應用到下列 5 個基本性質----引理；

一、數學基本性質----引理

引理 1. 三角函數角度的和差轉換公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

證明：略。

引理 2. 平面凸 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的所有頂角總和為：

$$A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_{n-2} + A_{n-1} + A_n = (n-2)\pi$$

證明：略。

引理 3. 任給一個圓內接偶數邊數 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4....A_{n-1}A_n$，$n = 2k+2$，$k$ 為自然數，則此多邊形的頂角組合；

$$A_1 + A_3 + A_5 + A_7 + ... + A_{n-3} + A_{n-1}$$

$$= A_2 + A_4 + A_6 + A_8 + ... + A_{n-2} + A_n = \frac{1}{2}(n-2)\pi$$

證明：略。

引理 4. 三角形餘弦定理：在平面上給定一個三角形 $A_1A_2A_3$，下圖 8.

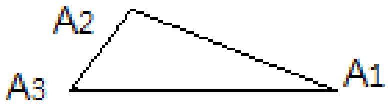

圖 8

令邊長線段 $\overline{A_1A_2} = V_1$，$\overline{A_2A_3} = V_2$，$\overline{A_3A_1} = V_3$，則此三角形餘弦定理公式為；

$$V_3^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos A_2 \qquad (L1)$$

引理 5. 平面四邊形餘弦定理 ： 在平面上給定一個凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，圖 9.

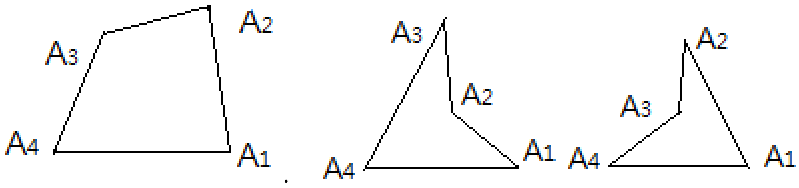

圖 9

令其邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$， $\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_1}=V_4$，

則此凸四邊形的面積型餘弦公式為；

$$V_4^2=V_1^2+V_2^2+V_3^2-2V_1V_2\cos A_2-2V_2V_3\cos A_3+2V_1V_3\cos(A_2+A_3) \quad \text{(L2)}$$

因上列公式中各項的基本量量綱都是邊長的平方，故稱為面積型餘弦公式。

證明：略。

事實上，方程式(L2)不僅適用於圖 9.凸四邊形，也適用於如圖右的凹四邊形。

二、平面凸五邊形對角線長度連乘積方程式

A. 圓內接五邊形對角線長度連乘積方程式

[證明]：任給一個圓內接五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，圖 6.，令邊長線段 $\overline{A_iA_{i+1}}=V_i$， $1\le i\le 5$，$i\in N$，$A_6=A_1$，另其 4 條對角線段長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$，$\overline{A_1A_4}=d_{14}$，$\overline{A_2A_5}=d_{25}$，$\overline{A_2A_4}=d_{24}$，見圖 6.中間圖形內的部份圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，得 $d_{13}d_{24}=V_1V_3+V_2d_{14} \Rightarrow d_{24}=\dfrac{V_1V_3+V_2d_{14}}{d_{13}}$，再看圖 6.右側圖形內的部份圓內接四邊形 $A_1A_2A_4A_5$，得 $d_{25}d_{14}=V_1V_4+V_5d_{24} \Rightarrow d_{25}d_{14}=V_1V_4+V_5\cdot\dfrac{V_1V_3+V_2d_{14}}{d_{13}}$

$$\Rightarrow d_{25}d_{13}d_{14}=V_2V_5d_{14}+V_3V_5V_1+V_4V_1d_{13} \quad (3^*)$$

比對(3)式與(3*)式，兩者完全相等相同，證明完成。

B. 平面凸五邊形對角線長度連乘積方程式

[證明]：平面凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，下圖 10.，其所有線段長皆如 **A.**節的標示。

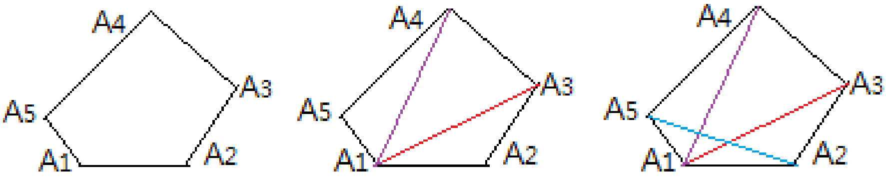

圖 10

[1] 應用方程式(2)式對於下圖 11.的的部份四邊形 $A_1A_2A_3A_5$，可得對應關係式；

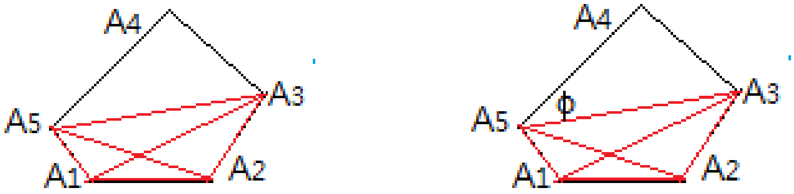

圖 11

$$(d_{25}d_{13})^2 = (V_1d_{35})^2 + (V_2V_5)^2 - 2V_1V_2V_5d_{35}\cos(A_2 + \angle A_3A_5A_1)$$

$$= (V_1d_{35})^2 + (V_2V_5)^2 - 2V_1V_2V_5d_{35}\cos(A_2 + A_5 - \phi) \qquad (2.1)$$

再對於下圖 12.的部份四邊形 $A_1A_3A_4A_5$ 言，應用(2)式可得下列對應關係式；

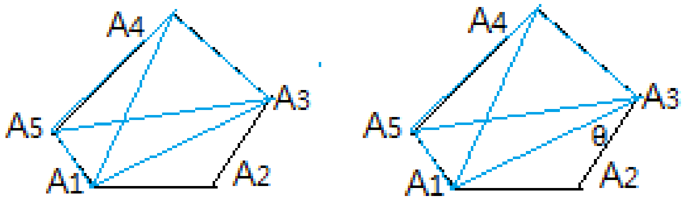

圖 12

$$(d_{14}d_{35})^2 = (V_4d_{13})^2 + (V_3V_5)^2 - 2V_3V_4V_5d_{13}\cos(A_5 + \angle A_4A_3A_1)$$

$$\Rightarrow \quad (d_{35})^2 = \frac{1}{(d_{14})^2}[(V_4d_{13})^2 + (V_3V_5)^2 - 2V_3V_4V_5d_{13}\cos(A_5 + \angle A_4A_3A_1)]$$

$$= \frac{1}{(d_{14})^2}[(V_4d_{13})^2 + (V_3V_5)^2 - 2V_3V_4V_5d_{13}\cos(A_5 + A_3 - \theta)] \qquad (2.2)$$

[2] 將(2.2)式代入 (2.1)式，得到下列型式 (2.3)式；

$$(d_{25}d_{13})^2 = V_1^2 \cdot \frac{1}{(d_{14})^2}[(V_4d_{13})^2 + (V_3V_5)^2 - 2V_3V_4V_5d_{13}\cos(A_5 + A_3 - \theta)]$$

$$+ (V_2V_5)^2 - 2V_1V_2V_5d_{35}\cos(A_2 + A_5 - \phi) \qquad (2.3)$$

(2.3)式裡有 2 個未知量尚待處理； $d_{13}\cos(A_5+A_3-\theta)$ 和 $d_{35}\cos(A_2+A_5-\phi)$ ，

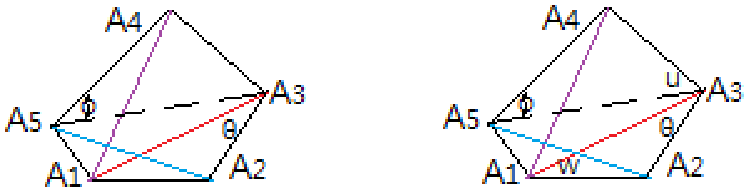

圖 13

(i) 由 $d_{13}\cos(A_5+A_3-\theta)$ = $d_{13}\cos(A_5+A_3)\cos\theta$ + $d_{13}\sin(A_5+A_3)\sin\theta$，見圖 13，

對 $\Delta A_1A_2A_3$ 言，$d_{13}\cos\theta = V_2+V_1\cos(\pi-A_2) = V_2-V_1\cos A_2$，$d_{13}\sin\theta = V_1\sin A_2$ ，

$\Rightarrow$ $d_{13}\cos(A_5+A_3-\theta)$ = $V_2\cos(A_3+A_5)-V_1\cos A_2\cdot\cos(A_3+A_5)$ + $V_1\sin A_2$

$\sin(A_3+A_5)$ = $V_2\cos(A_3+A_5)-V_1\cos(A_2+A_3+A_5)$

(ii) 由 $d_{35}\cos(A_2+A_5-\phi)$ = $d_{35}\cos(A_2+A_5)\cos\phi$ + $d_{35}\sin(A_2+A_5)\sin\phi$ ，見圖

13. ， 又 對 $\Delta A_5A_4A_3$ 言 ， $d_{35}\cos\phi$ = $V_4+V_3\cos(\pi-A_4)$ = $V_4-V_3\cos A_4$ ，

$d_{35}\sin\phi = V_3\sin A_4$ $\Rightarrow$ $d_{35}\cos(A_2+A_5-\phi)$ = $V_4\cos(A_2+A_5)-V_3\cos A_4\cdot$

$\cos(A_2+A_5)+V_3\sin A_4\sin(A_2+A_5)$ = $V_4\cos(A_2+A_5)-V_3\cos(A_2+A_4+A_5)$

(iii) 將求出的 $d_{13}\cos(A_5+A_3-\theta)$ 和 $d_{35}\cos(A_2+A_5-\phi)$ 代入(2.3)式中，得

$$(d_{25}d_{13})^2 = {V_1}^2\cdot\frac{1}{(d_{14})^2}\{\ (V_4d_{13})^2+(V_3V_5)^2-2V_3V_4V_5\cdot$$

$$[V_2\cos(A_3+A_5)-V_1\cdot\cos(A_2+A_3+A_5)]\ \}+(V_2V_5)^2-2V_1V_2V_5\cdot$$

$$[V_4\cos(A_2+A_5)-V_3\cos(A_2+A_4+A_5)]$$ ，

再將上式同步乘上分母的 d_{14} 平方，展開後移項，整理，排列成下式；

$(d_{25}d_{13}d_{14})^2 = (V_2V_5d_{14})^2$ + $(V_3V_5V_1)^2$ + $(V_4V_1d_{13})^2-2\cdot{V_1}^2V_3V_4V_5\cdot[\ V_2\cos(A_3+A_5)-V_1$

$\cos(A_2+A_3+A_5)]-2\cdot V_1V_2V_5d_{14}{}^2\cdot[V_4\cos(A_2+A_5)-V_3\cos(A_2+A_4+A_5)]$

$\Rightarrow(d_{25}d_{13}d_{14})^2=(V_2V_5d_{14})^2+(V_3V_5V_1)^2+(V_4V_1d_{13})^2-2\cdot V_1{}^2V_3V_4V_5\cdot[V_2\cos(A_3+A_5)+$

$V_1\cos(A_1+A_4)]-2\cdot V_1V_2V_5d_{14}{}^2\cdot[V_4\cos(A_2+A_5)+V_3\cos(A_1+A_3)]$ (*5.1)

接著要應用引理 4.與引理 5.的(L1)式與(L2)式，使 d_{14} 平方、 d_{13} 平方轉換如下；

$\Rightarrow\quad(d_{25}d_{13}d_{14})^2=(V_2V_5)^2\cdot[V_4{}^2+V_5{}^2-2V_4V_5\cos A_5]+(V_3V_5V_1)^2+$

$(V_4V_1)^2\cdot[V_1^2+V_2{}^2-2V_1V_2\cos A_2]-2\cdot V_1{}^2V_3V_4V_5\cdot[V_2\cos(A_3+A_5)+V_1\cos(A_1+A_4)]$

$-2\cdot V_1V_2V_5\cdot[V_4{}^2+V_5{}^2-2V_4V_5\cos A_5]\cdot[V_4\cos(A_2+A_5)+V_3\cos(A_1+A_3)]$ (5)

$\Rightarrow\quad(d_{25}d_{13}d_{14})^2=(V_2V_5d_{14})^2+(V_3V_5V_1)^2+(V_4V_1d_{13})^2-2\cdot[V_1{}^2V_2V_3V_4V_5\cos(A_3+A_5)$

$+V_1{}^3V_3V_4V_5\cos(A_1+A_4)+V_1V_2V_4V_5d_{14}{}^2\cos(A_2+A_5)+V_1V_2V_3V_5d_{14}{}^2\cos(A_1+A_3)]$ (6)

方程式(5)式、(6)式就是被證明出的平面凸五邊形對角線長度連乘積方程式。仔細檢視(5)式、(6)式各項，都是由長度基本量的六次方組成，(3)式與(5)式、(6)式相比較；後者多出了後面的 4 個 cosine 項數。(5)式、(6)式比(2)式複雜得多！

[3] [檢驗]：若將下圖 14.的頂點 A_4 平移挪至頂點 A_5，使點 A_4 疊置於點 A_5 上，則此平面凸五邊形縮減蛻變成平面凸四邊形，變化成圖 15.

此時 $\overline{A_4A_5}=V_4=0$，代入平面凸五邊形的(5)式、(6)式中，那方程式(5)式、(6)式即蛻變成下式；

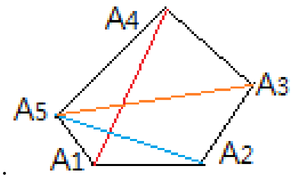

圖 14

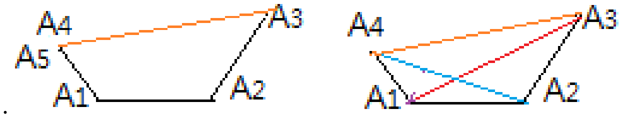

圖 15

$(d_{25}d_{13}d_{14})^2=(V_2V_5)^2\cdot V_5{}^2+(V_3V_5V_1)^2-2\cdot V_1V_2V_5\cdot V_5{}^2\cdot V_3\cos(A_1+A_3)$ (2.4.1)

$(d_{25}d_{13}d_{14})^2=(V_2V_5d_{14})^2+(V_3V_5V_1)^2-2\cdot V_1V_2V_3V_5d_{14}{}^2\cos(A_1+A_3)$ (2.4.2)

又因原本 $\overline{A_1A_4}=d_{14}$ 變化成新的 $\overline{A_4A_1}=V_4$，原 V_5 也變化成新的 V_4，原 $\overline{A_2A_5}=d_{25}$ 變

化成新的 $\overline{A_2A_4} = d_{24}$，代入上述兩式，則這兩式均變化成新的下式(2.5)式；

$$(d_{24}d_{13}V_4)^2 = (V_2V_4V_4)^2 + (V_3V_4V_1)^2 - 2\cdot V_1V_2V_3V_4V_4^{\,2}\cos(A_1 + A_3) \qquad (2.5)$$

$$\Rightarrow \quad (d_{24}d_{13})^2 = (V_2V_4)^2 + (V_3V_1)^2 - 2\cdot V_1V_2V_3V_4\cos(A_1 + A_3)$$

$$\Rightarrow \quad (d_{24}d_{13})^2 = (V_2V_4)^2 + (V_3V_1)^2 - 2\cdot V_1V_2V_3V_4\cos(A_2 + A_4) \qquad (2)$$

所以，平面凸五邊形方程式(5)式、(6)式縮減蛻化成平面凸四邊形的方程式(2)式；即平面凸五邊形方程式(5)式、(6)式統一涵蓋了平面凸四邊形的(2)式！

C. 方程式(5)式、(6)式兩等價式如何涵蓋圓內接五邊形的方程式(3)式？

當平面凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 內接於一圓而形成圓內接五邊形，如下圖 16.，

[1] 圖 17.的兩頂角和 $A_5 + A_3 = A_5 + \angle A_4A_3A_1 + \theta$，對圓內接四邊形 $A_1A_3A_4A_5$ 言，$A_5 + \angle A_4A_3A_1 = \pi \;\Rightarrow\; A_3 + A_5 = \pi + \theta$，同理，另兩頂角和 $A_1 + A_4 = \pi + w$，則

$$V_2\cos(A_3 + A_5) + V_1\cos(A_1 + A_4) = -V_2\cos\theta - V_1\cos w = -d_{13} \qquad \text{(p1)}$$

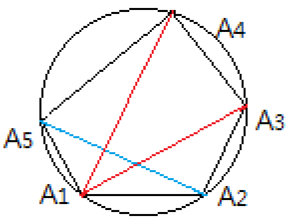

圖 16

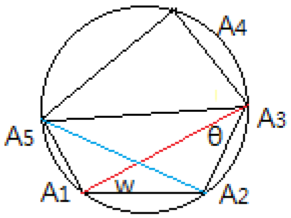

圖 17

[2] 圖 18.，頂角和 $A_2 + A_5 = A_2 + \angle A_3A_5A_1 + \phi$，對圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_5$ 言，$A_2 + \angle A_3A_5A_1 = \pi \;\Rightarrow\; A_2 + A_5 = \pi + \phi$，同理，另兩頂角和 $A_1 + A_3 = \pi + u$，則

$$V_4\cos(A_2 + A_5) + V_3\cos(A_1 + A_3) = -V_4\cos\phi - V_3\cos u = -d_{35} \qquad \text{(p2)}$$

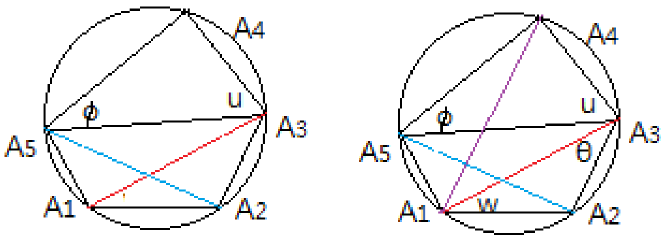

圖 18

[3] 將上述的 (p1)式、(p2)式同時代入方程式(*5.1)式中，必得下列方程式；

$$(d_{25}d_{13}d_{14})^2=(V_2V_5d_{14})^2+(V_3V_5V_1)^2+(V_4V_1d_{13})^2+2\cdot V_1^{\,2}V_3V_4V_5d_{13}$$

$$+2\cdot V_1V_2V_5d_{14}^{\,2}d_{35} \qquad \text{(p3)}$$

再對圓內接四邊形 $A_1A_3A_4A_5$ 言，有托勒密等式方程式； $d_{35}d_{14}=d_{13}V_4+V_3V_5$，將其代入方程式 (p3)式最末一項內，再展開，整理，得到下列方程式；

$$\begin{aligned}(d_{25}d_{13}d_{14})^2&=(V_2V_5d_{14})^2+(V_3V_5V_1)^2+(V_4V_1d_{13})^2+2\cdot V_1^{\,2}V_3V_4V_5d_{13}\\&\quad+2\cdot V_1V_2V_4V_5d_{13}d_{14}+2\cdot V_1V_2V_3V_5^{\,2}d_{14}\\&=(V_2V_5d_{14}+V_3V_5V_1+V_4V_1d_{13})^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad d_{25}d_{13}d_{14}=V_2V_5d_{14}+V_3V_5V_1+V_4V_1d_{13} \qquad (3)$$

所以，平面凸五邊形的(5)式、(6)式完全涵蓋統一了圓內接五邊形方程式(3)式！

三、平面凸六邊形對角線長度連乘積方程式

A. 圓內接六邊形對角線長度連乘積方程式

[證明]： 任給一個圓內接六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，下圖 19.，令邊長線段 $\overline{A_iA_{i+1}}=V_i$ ，$1\le i\le 6$，$i\in N$，$A_7=A_1$，另其 5 條對角線段長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$，$\overline{A_1A_4}=d_{14}$，$\overline{A_1A_5}=d_{15}$，$\overline{A_2A_5}=d_{25}$，$\overline{A_2A_6}=d_{26}$，見圖 19.中間圖形內的部份圓內接五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，現在引用方程式(3)式內涵，可得對應方程式如下；

$$d_{25}d_{13}d_{14}=V_2d_{15}d_{14}+V_3d_{15}V_1+V_4V_1d_{13}$$

$$\Rightarrow\ d_{25}=\frac{1}{d_{13}d_{14}}[V_2d_{15}d_{14}+V_3d_{15}V_1+V_4V_1d_{13}]$$

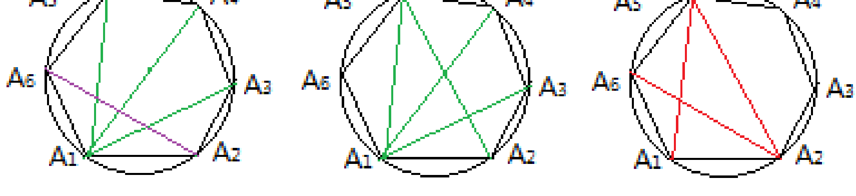

圖 19

，再看圖 19.的右圖圓內接四邊形 $A_1A_2A_5A_6$，可得等式；

$$d_{26}d_{15} = V_1V_5 + V_6d_{25}$$

$$\Rightarrow \quad d_{26}d_{15} = V_1V_5 + V_6 \cdot \frac{1}{d_{13}d_{14}}[V_2d_{15}d_{14} + V_3d_{15}V_1 + V_4V_1d_{13}]$$

$$\Rightarrow \quad d_{26}d_{13}d_{14}d_{15} = V_2V_6d_{14}d_{15} + V_3V_6V_1d_{15} + V_4V_6V_1d_{13} + V_5V_1d_{13}d_{14} \qquad (4^*)$$

比對(4)式與(4*)式，兩者完全相等相同，證明完成。

B. 平面凸六邊形對角線長度連乘積方程式

[證明]：凸六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，下圖 20.，其所有線段長皆如 **A.**節的標示。

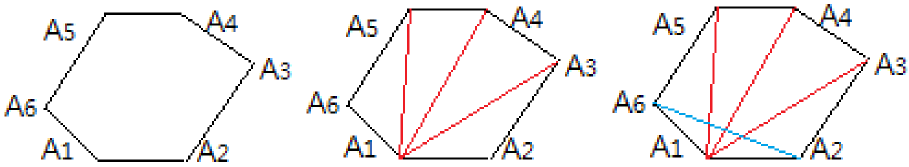

圖 20

[1] 應用方程式(*5.1)式對於下圖 21.的部份五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，得下對應式；

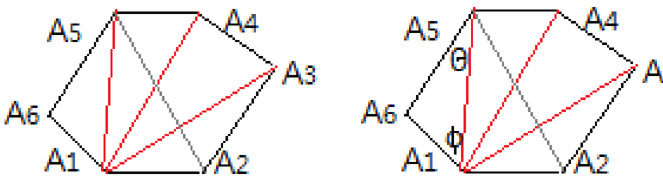

圖 21

$$
\begin{aligned}
(d_{25}d_{13}d_{14})^2 \;=\;& (V_2d_{15}d_{14})^2 + (V_3d_{15}V_1)^2 + (V_4V_1d_{13})^2 \\
& -2\cdot V_1^2V_3V_4d_{15}\cdot[V_2\cos(A_3+\angle A_1A_5A_4) + V_1\cos(\angle A_5A_1A_2 + A_4)] \\
& -2\cdot V_1V_2d_{15}d_{14}^2\cdot[V_4\cos(A_2+\angle A_1A_5A_4) + V_3\cos(\angle A_5A_1A_2 + A_3)] \;\Rightarrow \\
(d_{25}d_{13}d_{14})^2 \;=\;& (V_2d_{15}d_{14})^2 + (V_3d_{15}V_1)^2 + (V_4V_1d_{13})^2 \\
& -2\cdot V_1^2V_3V_4d_{15}\cdot[V_2\cos(A_3+A_5-\theta) + V_1\cos(A_1+A_4-\phi)] \\
& -2\cdot V_1V_2d_{15}d_{14}^2\cdot[V_4\cos(A_2+A_5-\theta) + V_3\cos(A_1+A_3-\phi)] \qquad (^*5.2)
\end{aligned}
$$

仿效前述平面凸五邊形敘述裡[2].之(i)、(ii)節的推演運算過程，可得下列結果；

$$d_{15}V_2\cos(A_3+A_5-\theta)= V_2[V_5\cos(A_3+A_5)-V_6\cos(A_3+A_5+A_6)] \quad (**1)$$

$$d_{15}V_1\cos(A_1+A_4-\phi)= V_1[V_6\cos(A_1+A_4)-V_5\cos(A_1+A_4+A_6)] \quad (**2)$$

$$d_{15}V_4\cos(A_2+A_5-\theta)= V_4[V_5\cos(A_2+A_5)-V_6\cos(A_2+A_5+A_6)] \quad (**3)$$

$$d_{15}V_3\cos(A_1+A_3-\phi)= V_3[V_6\cos(A_1+A_3)-V_5\cos(A_1+A_3+A_6)] \quad (**4)$$

將(**1)、(**2)、(**3)、(**4)四式代入(*5.2)式，再演算移項，整理成下式；

$$\begin{aligned}(d_{25})^2 = \frac{1}{(d_{13}d_{14})^2}\{ & (V_2d_{15}d_{14})^2+(V_3d_{15}V_1)^2+(V_4V_1d_{13})^2 \\ & -2\cdot V_1^{\,2}V_3V_4\{V_2[V_5\cos(A_3+A_5)-V_6\cos(A_3+A_5+A_6)]+ \\ & V_1[V_6\cos(A_1+A_4)-V_5\cos(A_1+A_4+A_6)]\} \\ & -2\cdot V_1V_2d_{14}^{\,2}\{V_4[V_5\cos(A_2+A_5)-V_6\cos(A_2+A_5+A_6)]+ \\ & V_3[V_6\cos(A_1+A_3)-V_5\cos(A_1+A_3+A_6)]\}\ \} \end{aligned} \quad (**5)$$

[2] 再對於下圖 22.的部份四邊形 $A_1A_2A_5A_6$ 言，應用(2)式可得下列對應關係式；

$$\begin{aligned}(d_{26}d_{15})^2 &= (V_5V_1)^2+(V_6d_{25})^2-2V_1V_5V_6d_{25}\cos(A_6+\angle A_5A_2A_1) \\ &= (V_5V_1)^2+(V_6d_{25})^2-2V_1V_5V_6d_{25}\cos(A_6+A_2-w) \end{aligned} \quad (2.6)$$

(i) 下圖 23.是圖 22.的部份四邊形 $A_2A_3A_4A_5$，此部份圖形有下列 2 個關係式；

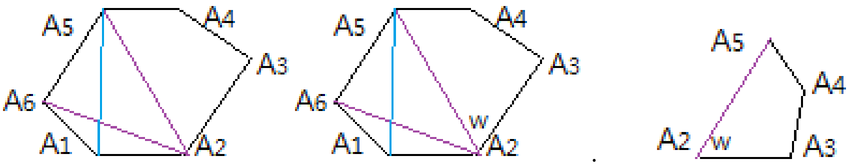

圖 22　　　　圖 23

$$V_2+V_3\cos(\pi-A_3)+V_4\cos(2\pi-A_3-A_4)+d_{25}\cos(3\pi-A_3-A_4-\angle A_4A_5A_2)=0$$

與 $V_3\sin(\pi-A_3)+V_4\sin(2\pi-A_3-A_4)+d_{25}\sin(3\pi-A_3-A_4-\angle A_4A_5A_2)=0$

$$\Rightarrow \quad V_2-V_3\cos A_3+V_4\cos(A_3+A_4)=d_{25}\cos w$$

與 $V_3\sin A_3-V_4\sin(A_3+A_4)=d_{25}\sin w$

(ii) $d_{25}\cos(A_6+A_2-w)=d_{25}\cos(A_2+A_6)\cos w+d_{25}\sin(A_2+A_6)\sin w$

$= V_2\cos(A_2+A_6)-V_3\cos A_3\cos(A_2+A_6)+V_4\cos(A_3+A_4)\cos(A_2+A_6)+$

$V_3\sin A_3\sin(A_2+A_6)-V_4\sin(A_3+A_4)\sin(A_2+A_6)$

$= V_2\cos(A_2+A_6)-V_3\cos(A_2+A_3+A_6)+V_4\cos(A_2+A_3+A_4+A_6)$ (**6)

先將(**6)式代入(2.6)式，先得出下列(2.7)式；

$$(d_{26}d_{15})^2=(V_5V_1)^2+(V_6d_{25})^2-2\cdot V_1V_5V_6\cdot[V_2\cos(A_2+A_6)-V_3\cos(A_2+A_3+A_6)$$
$$+V_4\cos(A_2+A_3+A_4+A_6)] \quad (2.7)$$

(iii) 再將(**5)式的 $(d_{25})^2$ 代入(2.7)式，演算展開後，整理，排列成下式(7)式；

$$(d_{26}d_{13}d_{14}d_{15})^2=(V_2V_6d_{14}d_{15})^2+(V_3V_6V_1d_{15})^2+(V_4V_6V_1d_{13})^2+(V_5V_1d_{13}d_{14})^2$$
$$-2\cdot V_1^2V_3V_4V_6^2\cdot\{V_2[V_5\cos(A_3+A_5)-V_6\cos(A_3+A_5+A_6)]+$$
$$V_1[V_6\cos(A_1+A_4)-V_5\cos(A_1+A_4+A_6)]\}$$
$$-2\cdot V_1V_2V_6^2d_{14}^2\cdot\{V_4[V_5\cos(A_2+A_5)-V_6\cos(A_2+A_5+A_6)]+$$
$$V_3[V_6\cos(A_1+A_3)-V_5\cos(A_1+A_3+A_6)]\}$$
$$-2\cdot V_1V_5V_6(d_{13}d_{14})^2\cdot[V_2\cos(A_2+A_6)-V_3\cos(A_2+A_3+A_6)$$
$$+V_4\cos(A_2+A_3+A_4+A_6)] \quad (7)$$

$$\Rightarrow (d_{26}d_{13}d_{14}d_{15})^2=(V_2V_6d_{14}d_{15})^2+(V_3V_6V_1d_{15})^2+(V_4V_6V_1d_{13})^2+(V_5V_1d_{13}d_{14})^2$$
$$-2\cdot V_1^2V_3V_4V_6^2\cdot\{V_2[V_5\cos(A_3+A_5)-V_6\cos(A_1+A_2+A_4)]$$
$$+V_1[V_6\cos(A_1+A_4)-V_5\cos(A_2+A_3+A_5)]\}$$
$$-2\cdot V_1V_2V_6^2d_{14}^2\cdot\{V_4[V_5\cos(A_2+A_5)-V_6\cos(A_1+A_3+A_4)]+$$
$$V_3[V_6\cos(A_1+A_3)-V_5\cos(A_2+A_4+A_5)]\}$$
$$-2\cdot V_1V_5V_6(d_{13}d_{14})^2\cdot[V_2\cos(A_2+A_6)-V_3\cos(A_1+A_4+A_5)$$
$$+V_4\cos(A_1+A_5)] \quad (7a)$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\ (d_{26}d_{13}d_{14}d_{15})^2 = {} & (V_2V_6)^2\cdot[V_4^{\ 2}+V_5^{\ 2}+V_6^{\ 2}-2V_4V_5\cos A_5-2V_5V_6\cos A_6+ \\
& 2V_4V_6\cos(A_5+A_6)]\cdot[V_5^{\ 2}+V_6^{\ 2}-2V_5V_6\cos A_6]+ \\
& (V_3V_6V_1)^2\cdot[V_5^{\ 2}+V_6^{\ 2}-2V_5V_6\cos A_6]+(V_4V_6V_1)^2\cdot[V_1^{\ 2}+V_2^{\ 2}-2V_1V_2\cos A_2]\ + \\
& (V_5V_1)^2\cdot[V_1^{\ 2}+V_2^{\ 2}-2V_1V_2\cos A_2] \\
& \cdot[V_4^{\ 2}+V_5^{\ 2}+V_6^{\ 2}-2V_4V_5\cos A_5-2V_5V_6\cos A_6+2V_4V_6\cos(A_5+A_6)] \\
& -2\cdot V_1^{\ 2}V_3V_4V_6^{\ 2}\cdot\{\ V_2[V_5\cos(A_3+A_5)-V_6\cos(A_1+A_2+A_4)]\ + \\
& V_1[V_6\cos(A_1+A_4)-V_5\cos(A_2+A_3+A_5)]\ \} \\
& -2\cdot V_1V_2V_6^{\ 2}\cdot[V_4^{\ 2}+V_5^{\ 2}+V_6^{\ 2}-2V_4V_5\cos A_5-2V_5V_6\cos A_6+ \\
& 2V_4V_6\cos(A_5+A_6)]\cdot\{\ V_4[V_5\cos(A_2+A_5)-V_6\cos(A_1+A_3+A_4)]\ + \\
& V_3[V_6\cos(A_1+A_3)-V_5\cdot\cos(A_2+A_4+A_5)]\ \} \\
& -2\cdot V_1V_5V_6\cdot[V_1^{\ 2}+V_2^{\ 2}-2V_1V_2\cos A_2] \\
& \cdot[V_4^{\ 2}+V_5^{\ 2}+V_6^{\ 2}-2V_4V_5\cos A_5-2V_5V_6\cos A_6+2V_4V_6\cos(A_5+A_6)]\cdot \\
& [V_2\cos(A_2+A_6)-V_3\cos(A_1+A_4+A_5)+V_4\cos(A_1+A_5)] \qquad (8)
\end{aligned}
$$

方程式(7)式、(7a)式、(8)式就是被證明出的平面凸六邊形對角線長度連乘積方程式。仔細檢視(7)式、(7a)式、(8)式各項，都是由長度基本量的八次方量綱組成。

[3]. [檢驗]：若將下圖 24.的頂點 A_5 平移挪至頂點 A_6，使點 A_5 疊置於點 A_6 上，則

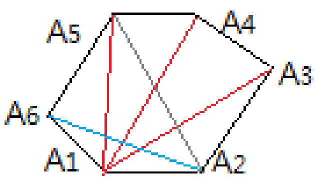

圖 24

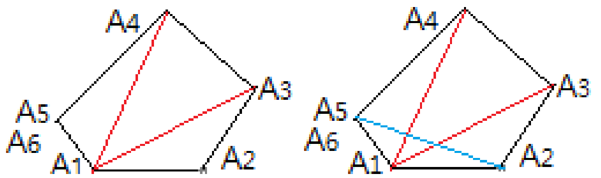

圖 25

此平面凸六邊形縮減蛻變成平面凸五邊形，變化成圖 25.，此時 $\overline{A_5A_6}=V_5=0$，頂角 $A_6=0$ 消失，代入平面凸六邊形的(7a)式中，而(7a)式即蛻變成下式；

$$
\begin{aligned}
(d_{26}d_{13}d_{14}d_{15})^2 = {} & (V_2V_6d_{14}d_{15})^2+(V_3V_6V_1d_{15})^2+(V_4V_6V_1d_{13})^2 \\
& -2\cdot V_1^{\ 2}V_3V_4V_6^{\ 2}\cdot\{\ V_2[-V_6\cos(A_1+A_2+A_4)]\ +\ V_1[V_6\cos(A_1+A_4)]\ \}
\end{aligned}
$$

$$-2\cdot V_1V_2V_6{}^2d_{14}{}^2\cdot\{\ V_4[-V_6\ \cos(A_1+A_3+A_4)]+\ V_3[V_6\cos(A_1+A_3)]\ \}\qquad(8.1)$$

又因原本的 d_{15} 變化成新的 $\overline{A_5A_1}=V_5$，原 V_6 也變化成新的 V_5，原 $\overline{A_2A_6}=d_{26}$ 變化成新的 $\overline{A_2A_5}=d_{25}$，代入上述(8.1)式，則(8.1)式變化成新的下列(8.2)式；

$$(d_{25}d_{13}d_{14}V_5)^2=(V_2V_5d_{14}V_5)^2+(V_3V_5V_1V_5)^2+(V_4V_5V_1d_{13})^2$$
$$-2\cdot V_1{}^2V_3V_4V_5{}^2\cdot\{\ V_2[-V_5\ \cos(A_1+A_2+A_4)\ +\ V_1[V_5\cos(A_1+A_4)]\ \}$$
$$-2\cdot V_1V_2V_5{}^2d_{14}{}^2\cdot\{\ V_4[-V_5\ \cos(A_1+A_3+A_4)]+\ V_3[V_5\cos(A_1+A_3)]\ \}\qquad(8.2)$$

$$\Rightarrow\qquad(d_{25}d_{13}d_{14})^2=(V_2V_5d_{14})^2+(V_3V_5V_1)^2+(V_4V_1d_{13})^2$$
$$-2\cdot V_1{}^2V_3V_4V_5\cdot\{\ -V_2\ \cos(A_1+A_2+A_4)+V_1\ \cos(A_1+A_4)\ \}$$
$$-2\cdot V_1V_2V_5d_{14}{}^2\cdot\{\ -V_4\ \cos(A_1+A_3+A_4)]+V_3\ \cos(A_1+A_3)\ \}\qquad(8.3)$$

(8.3)式已經是變化後的新平面凸五邊形關係式，再轉換其部份項的內角， $\Rightarrow$

$$(d_{25}d_{13}d_{14})^2=(V_2V_5d_{14})^2+(V_3V_5V_1)^2+(V_4V_1d_{13})^2$$
$$-2\cdot V_1{}^2V_3V_4V_5\cdot[V_2\ \cos(A_3+A_5)+V_1\ \cos(A_1+A_4)]$$
$$-2\cdot V_1V_2V_5d_{14}{}^2\cdot[V_4\ \cos(A_2+A_5)+V_3\ \cos(A_1+A_3)]\qquad(8.4)$$

$$\Rightarrow\qquad(d_{25}d_{13}d_{14})^2=(V_2V_5)^2\cdot[V_4{}^2+V_5{}^2-2V_4V_5\cos A_5]\ +\ (V_3V_5V_1)^2\ +\ (V_4V_1)^2$$
$$\cdot[V_1{}^2+V_2{}^2-2V_1V_2\cos A_2]-2\cdot V_1{}^2V_3V_4V_5\cdot\ [\ V_2\ \cos(A_3+A_5)+V_1\ \cos(A_1+A_4)]$$
$$-2\cdot V_1V_2V_5\cdot[V_4{}^2+V_5{}^2-2V_4V_5\cos A_5]\cdot[V_4\ \cos(A_2+A_5)+V_3\ \cos(A_1+A_3)]\qquad(8.5)$$

所以，平面凸六邊形方程式(7a)式縮減蛻化成平面凸五邊形的方程式(8.5)式；現在對照比較方程式(8.5)式與方程式(5)式，兩者完全相等相同。即這組平面凸六邊形方程式(7)式、(7a)式、(8)式完全統一涵蓋了平面凸五邊形的(5)式、(6)式！

C. 方程式(7)式、(8)式兩等價式如何涵蓋圓內接六邊形的方程式(4)式？

當平面凸六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 內接於一圓而形成圓內接六邊形，下圖 26.，

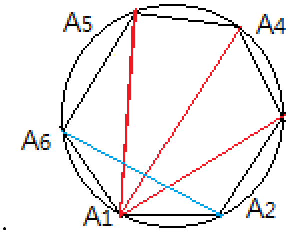

圖 26

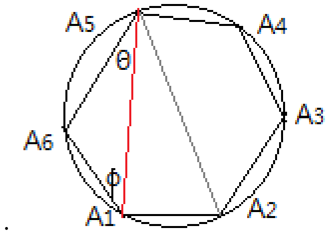

圖 27

[1] 圖 27.，在前述 **B.**平面凸六邊形內的第[1].節裡，有下列 4 個關係式；

$$d_{15}V_2\cos(A_3+A_5-\theta)=V_2[V_5\cos(A_3+A_5)-V_6\cos(A_3+A_5+A_6)] \quad (**1)$$

$$d_{15}V_1\cos(A_1+A_4-\phi)=V_1[V_6\cos(A_1+A_4)-V_5\cos(A_1+A_4+A_6)] \quad (**2)$$

$$d_{15}V_4\cos(A_2+A_5-\theta)=V_4[V_5\cos(A_2+A_5)-V_6\cos(A_2+A_5+A_6)] \quad (**3)$$

$$d_{15}V_3\cos(A_1+A_3-\phi)=V_3[V_6\cos(A_1+A_3)-V_5\cos(A_1+A_3+A_6)] \quad (**4)$$

(i) 將上述 (**1)、(**2)、(**3)、(**4) 四式代入 (7)式中，再整理成下式；

$$\begin{aligned}(d_{26}d_{13}d_{14}d_{15})^2 &= (V_2V_6d_{14}d_{15})^2+(V_3V_6V_1d_{15})^2+(V_4V_6V_1d_{13})^2+(V_5V_1d_{13}d_{14})^2\\ &-2\cdot V_1^2V_3V_4V_6^2\cdot\{\, d_{15}[V_2\cos(A_3+A_5-\theta)+V_1\cos(A_1+A_4-\phi)]\,\}\\ &-2\cdot V_1V_2V_6^2d_{14}^2\cdot\{\, d_{15}[V_4\cos(A_2+A_5-\theta)+V_3\cos(A_1+A_3-\phi)]\,\}\\ &-2\cdot V_1V_5V_6(d_{13}d_{14})^2\cdot[\,V_2\cos(A_2+A_6)-V_3\cos(A_2+A_3+A_6)\\ &+V_4\cos(A_2+A_3+A_4+A_6)] \end{aligned} \quad (7.1)$$

(ii) 此圓內接六邊形在 (7.1)式中的最後一個 [ ]內的 3 個項可以轉換如下；

$$V_2\cos(A_2+A_6)-V_3\cos(A_2+A_3+A_6)+V_4\cos(A_2+A_3+A_4+A_6)$$

$=V_2\cos A_4-V_3\cos(A_3-A_4)+V_4\cos A_3$ $\Rightarrow$ 對於圖 27.的圓內接四邊形 $A_2A_3A_4A_5$ 部份，此四邊形必有下列的邊長與頂角相關聯的餘弦關係式；

$$\begin{aligned}\overline{A_2A_5}=d_{25} &= V_2\cos(\angle A_3A_2A_5)+V_3\cos[(\angle A_3A_2A_5)-(\pi-A_3)]+V_4\cos(\angle A_4A_5A_2)\\ &= V_2\cos(\angle A_3A_2A_5)-V_3\cos[(\angle A_3A_2A_5)+A_3]+V_4\cos(\angle A_4A_5A_2)\\ &= -V_2\cos A_4+V_3\cos(A_3-A_4)-V_4\cos A_3\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad V_2\cos(A_2+A_6)-V_3\cos(A_2+A_3+A_6)+V_4\cos(A_2+A_3+A_4+A_6)$$

$$=V_2\cos A_4-V_3\cos(A_3-A_4)+V_4\cos A_3=-d_{25}\quad\Rightarrow$$

$$(d_{26}d_{13}d_{14}d_{15})^2=(V_2V_6d_{14}d_{15})^2+(V_3V_6V_1d_{15})^2+(V_4V_6V_1d_{13})^2+(V_5V_1d_{13}d_{14})^2$$

$$-2\cdot V_1^{\,2}V_3V_4V_6^{\,2}\cdot\{\ d_{15}[V_2\cos(A_3+A_5-\theta)+V_1\cos(A_1+A_4-\phi)\,]\ \}$$

$$-2\cdot V_1V_2V_6^{\,2}d_{14}^{\,2}\cdot\{\ d_{15}[V_4\cos(A_2+A_5-\theta)+V_3\cos(A_1+A_3-\phi)]\ \}$$

$$-2\cdot V_1V_5V_6(d_{13}d_{14})^2\cdot(-d_{25}) \tag{7.2}$$

[2] 再看圖 28.， $A_3+A_5-\theta=\pi+u$ ， $A_1+A_4-\phi=\pi+t$ ，又看圖 29.，得；
$A_2+A_5-\theta=\pi+m$ ， $A_1+A_3-\phi=\pi+\psi$ ，故 (7.2)式中的關係項有下列 3 項；

(i) $[V_2\cos(A_3+A_5-\theta)+V_1\cos(A_1+A_4-\phi)\,]=[V_2\cos(\pi+u)+V_1\cos(\pi+t)\,]$

$=-[V_2\cos u+V_1\cos t\,]=-d_{13}$ ，

(ii) $[V_4\cos(A_2+A_5-\theta)+V_3\cos(A_1+A_3-\phi)]=[V_4\cos(\pi+m)+V_3\cos(\pi+\psi)\,]$

$=-[V_4\cos m+V_3\cos\psi\,]=-d_{35}=\dfrac{-1}{d_{14}}\cdot[\,V_3d_{15}+V_4d_{13}]$ ，

(iii) 又由圖 27.所顯示圓形裡部份圖形中的圓內接五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，其必有

$d_{25}=\dfrac{1}{d_{13}d_{14}}\cdot[\,V_2d_{15}d_{14}+V_3d_{15}V_1+V_4V_1d_{13}\,]$ 的恆等式關係式，

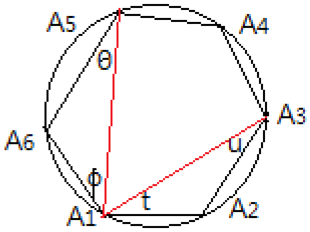

圖 28

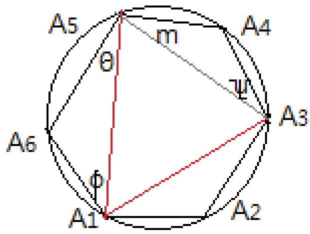

圖 29

將這 3 個關係項式一起同步代入(7.2)式中，再演算，粗略整理成下式(7.3)式；

$$(d_{26}d_{13}d_{14}d_{15})^2=(V_2V_6d_{14}d_{15})^2+(V_3V_6V_1d_{15})^2+(V_4V_6V_1d_{13})^2+(V_5V_1d_{13}d_{14})^2$$

$$+2\cdot V_1^{\,2}V_3V_4V_6^{\,2}\cdot d_{15}d_{13}+2\cdot V_1V_2V_6^{\,2}d_{14}\cdot d_{15}[\,V_3d_{15}+V_4d_{13}]$$

$$+2\cdot V_1V_5V_6d_{13}d_{14}\cdot[\,V_2d_{15}d_{14}+V_3d_{15}V_1+V_4V_1d_{13}\,] \tag{7.3}$$

$$\Rightarrow\ (d_{26}d_{13}d_{14}d_{15})^2=(V_2V_6d_{14}d_{15})^2+(V_3V_6V_1d_{15})^2+(V_4V_6V_1d_{13})^2+(V_5V_1d_{13}d_{14})^2$$

$$+2\cdot V_1^{\,2}V_3V_4V_6^{\,2}\cdot d_{15}d_{13}+2\cdot V_1V_2V_3V_6^{\,2}d_{14}\cdot d_{15}^{\,2}\ +2\cdot V_1V_2V_4V_6^{\,2}d_{14}d_{13}d_{15}$$

$$+2\cdot V_1V_2V_5V_6d_{13}d_{14}^{\,2}d_{15}+2\cdot V_1^{\,2}V_3V_5V_6d_{13}d_{14}d_{15}+2\cdot V_1^{\,2}V_4V_5V_6d_{13}^{\,2}d_{14}$$

$$\Rightarrow \quad (d_{26}d_{13}d_{14}d_{15})^2 = (V_2V_6d_{14}d_{15}+V_3V_6V_1d_{15}+V_4V_6V_1d_{13}+V_5V_1d_{13}d_{14})^2 \qquad (4)$$

所以，(7)式、(8)式全然轉化成(4)式。以上的嚴謹敘述推理過程已經完整證明了：平面凸六邊形的(7)式、(8)式完全涵蓋統一了圓內接六邊形方程式(4)式！

參、結論

[1] 經證明出的(7)、(7a)式、(8)式並非為平面凸六邊形對角線長度連乘積方程式的唯一結果，如若採取下列的不同選取圖形策略，勢將證明出另相異方程式；

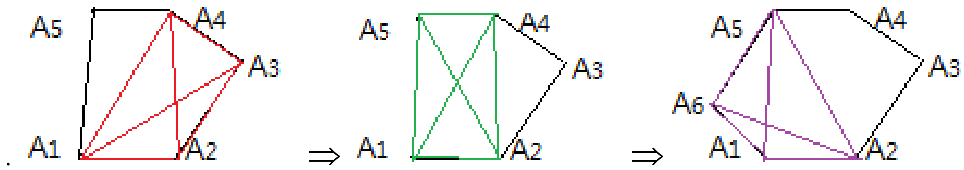

圖 30

見圖 30.，對五邊形先選取第一部份圖形 $A_1A_2A_3A_4$ 並寫出其方程式，再選取第二部份圖形 $A_1A_2A_4A_5$ 並也寫出其方程式，將這 2 方程式聯立解出五邊形對角線長度連乘積方程式，再將這解出的五邊形方程式套進第 3 圖的凸六邊形圖形中，寫出相對應的五邊形方程式，繼續選取第三部份圖形 $A_1A_2A_5A_6$ 並同樣寫出其第三方程式，最後將第三方程式與相對應的五邊形方程式聯立推演運算，得(9)式；

$$\begin{aligned}(d_{26}d_{13}d_{14}d_{15})^2 &= (V_2V_6d_{14}d_{15})^2+(V_3V_6V_1d_{15})^2+(V_4V_6V_1d_{13})^2+(V_5V_1d_{13}d_{14})^2\\ &-2\cdot V_1V_2V_3V_6{}^2d_{15}{}^2\cdot[V_4\cos(A_2+A_4)+V_6\cos(A_1+A_3)-V_5\cos(A_1+A_3+A_6)] +\\ &-2\cdot V_1V_4V_6{}^2d_{13}{}^2\cdot\{\,V_2[V_5\cos(A_2+A_5)-V_6\cos(A_2+A_5+A_6)] +\\ &V_3[V_6\cos(A_1+A_4)-V_5\cos(A_1+A_4+A_6)]\,\}\\ &-2\cdot V_1V_5V_6(d_{13}d_{14})^2\cdot[\,V_2\cos(\,A_2+A_6)-V_3\cos(\,A_2+A_3+A_6)\\ &+V_4\cos(\,A_2+A_3+A_4+A_6)]\end{aligned} \qquad (9)$$

比較方程式(9)式與(7)式，兩者有部份差異，也有半部份完全相同。雖然整體方程式相異，但都是描述平面凸六邊形對角線長度連乘積的結果。所以，此方程式(9)式與(7)式、(7a)式、(8)式同並列為等價方程式！

同樣地，若使此平面凸六邊形內接於一圓而形成圓內接六邊形，再仿效本文內容裡標題三的 **C.**節內容全部推演運算流程，則此方程式(9)式也會完全轉化成(4)式。因此，方程

式(9)式也必統一涵蓋了圓內接六邊形、圓內接五邊形、圓內接四邊形托勒密定理等相關的方程式。

[2] 平面凸六邊形的對角線長度連乘積方程式(7)式、(7a)式、(8)式與(9)式都是被證明發現到的新穎完整方程式，是作者自我發想，精心思維，全力規劃，演繹完成的新創作品。對比於下列 2 圖類似的相異方程式，此 5 者的各自內涵型態皆能展現出涇渭分明，各擁特徵風華，且有異曲同工之妙；

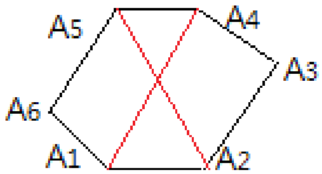

圖 31

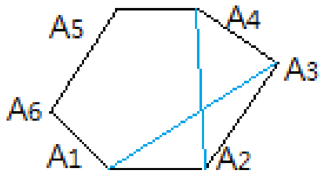

圖 32

$$(d_{14}d_{25})^2 = (V_1V_4)^2 + [(V_2V_5)^2 + (V_3V_5)^2 - 2V_2V_3V_5^{\,2}\cos A_3] + [(V_2V_6)^2 + (V_3V_6)^2 - 2V_2V_3V_6^{\,2}\cos A_3] - 2V_1V_2V_4V_5\cos(A_2 + A_5) + 2V_3V_4V_5V_1\cos(A_4 + A_6 + A_1) + 2V_1V_2V_4V_6\cos(A_2 + A_5 + A_6) - 2V_6V_1V_3V_4\cos(A_1 + A_4) - 2V_2^{\,2}V_5V_6\cos A_6 - 2V_3^2V_5V_6\cos A_6 + 4V_2V_3V_5V_6\cos A_3\cos A_6 \tag{10}$$

(10)式為圖 31.的平面凸六邊形內中央兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式！

方程式(10)式請詳細參閱下列參考文獻列舉的第 1 件資料、第 2 件資料。

[3] 主文內容的探討須由平面凸四邊形(2)式基礎分析起，逐次推演至平面凸五邊形方程式(5)式、(6)式再順勢推廣到平面凸六邊形的(7)式、(8)式，不能直接就凸六邊形圖形進行方程式(7)式、(8)式的單獨演繹證明；此因其牽涉到的通過選定頂點的對角線數目超過 3 條，且對角線數目均勻佈滿整個圖形。不像(10)式、(11)式只有 2 條相鄰對角線長度的乘積那種單純情形。

[4] 平面凸六邊形的(7)式、(8)式是個推廣型公式，它統一涵蓋了圓內接六邊形、平面凸五邊形、圓內接五邊形、平面凸四邊形及托勒密定理等相對應的方程式。

方程式(2)式、(5)式、(8)式的對角線長度連乘積方程式都完全純由圖形的各邊長與各

頂角適切組合美妙形成！

參考文獻

李輝濱(2019)，平面凸六邊形中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。**數學傳播季刊，169 期** (第 43 卷 1 期) 第 55 頁，2019 年 3 月出版發行。

李輝濱(2018)，平面凸六邊形內臨近周邊的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。**科學教育月刊，410 期** 第 10 頁，2018 年 7 月出版發行。

李輝濱(2019)，平面凸多邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式。**科學教育月刊，422 期，423 期**，2019 年 9、10 月出版發行。

李輝濱(2017)，預測與驗證平面凸多邊形面積公式。**科學教育月刊 398、399 期**，2017 年 5、6 月出版發行。

蔡聰明(2010)：**數學拾貝----星空燦爛的數學**。三民書局。

黃武雄(1980)：**中西數學簡史**。人間文化事業公司。

世部貞市郎(1988)：**幾何學辭典**。九章出版社。

林聰源(1995)：**數學史----古典篇**。凡異出版社。

項武義(2006)：**基礎幾何學**。五南圖書出版公司。

項武義(2006)：**基礎分析學**。五南圖書出版公司。

E.W. Hobson, (1957). *A treatise on plane and Advanced trigonometry,* Dover.

Z.A. Melzek, (1983). *Invitation to geometry*, John Wiley and Sons.