再探百轉千摺

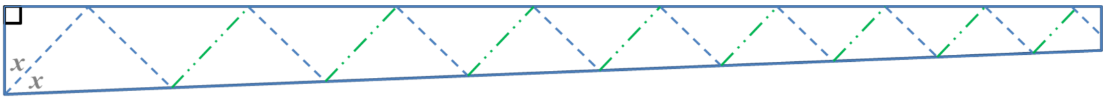
李政憲 [1*] 常文武 [2]

[1] 新北市林口國民中學

[2] 上海市普陀區現代教育技術中心

筆者於《藝數摺學：18 堂從 2D 到 3D 的「摺紙數學課」，讓幾何從抽象變具體，發現數學的實用、趣味與美》（民 108 年 9 月，臉譜出版）一書曾寫過《無止境的相似——百轉千摺》一文，提及國中數學常用到的子母相似，可以摺紙的方式完成作品，且可應用於高中的斜率或國中的算術平均數概念作紙條的延長，十分實用。經與寫作群組常文武博士探索後，發現還有其他可以延伸討論的內容，特撰此文以饗讀者。

首先請各位依【註一】影片完成一個「百轉千摺」的作品，並將作品攤開如下圖一，你會發現所有的摺痕將形成許多的直角三角形，而除了末端幾個未必成型的三角形，其餘三角形根據簡單的代數符號計算，將可以證明彼此是相似的，而且其相似的縮放比，將與一開始紙條斜切的角度有很大的關係。



圖一

至於其縮放比與紙條斜切的角度關係，我們可以透過下圖二作簡單的說明：

圖二

若我們假設原紙條延伸後夾角為 θ，經角平分線的摺製後，我們發現所有三角形除了直角外的另外兩角均為 $45^o-\frac{\theta}{2}$ 與 $45^o+\frac{\theta}{2}$；所以若我們想了解摺製後三角形的縮放比例，亦即$\triangle ABC$ 與$\triangle BCD$ 的邊長比（亦為完成作品後$\triangle ABE$ 與$\triangle BCE$ 的邊長比），其結果為 $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AE}:\overline{BE}$，亦即一開始摺製的直角$\triangle ABO$ 的兩股比$\overline{AO}:\overline{BO}$！也就是若紙條左端的寬度$\overline{AO}$與紙條的總長度不變，其比值$\frac{\overline{AO}}{\overline{BO}}=\tan\left(45^o+\frac{\theta}{2}\right)$將因$\theta$的大小而改變；當$\theta$愈小，

*為本文通訊作者

其比值愈小，摺痕由左向右進展的速度愈慢；若我們想摺製一個較多層的百轉千摺作品，可以在長度與寬度不變的前提下，盡量斜切這張紙條，造成θ較大的結果【註二】。

在了解了縮放比與斜切角度的關係後，接著我們突發奇想，若摺製的第一步驟不是沿著梯形非直角的平分線摺製（即圖一中左下方的角度 x），又會製造什麼效果呢？

為了確認我們的猜想，我們再拿一張紙條依下列步驟完成作品：

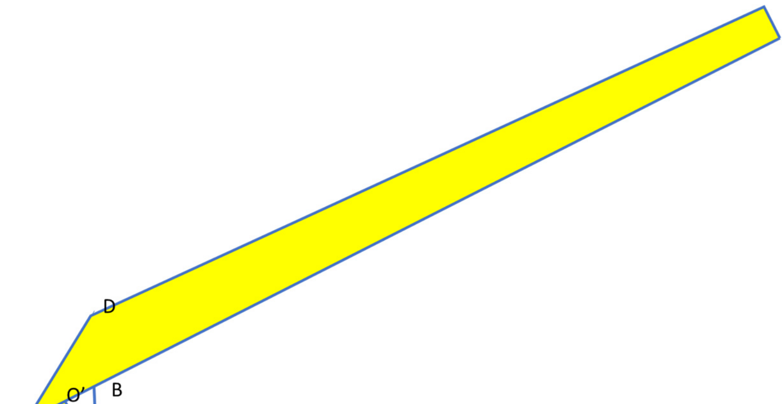
如圖三，在紙條上半部取一點 B，先將 O 點往下摺，使$\overline{OA}$與$\overline{AB}$連線對齊，且 O 點落在 O'點上，並產生摺痕$\overline{CA}$，亦為$\angle OAB$ 的角平分線。

圖三

如圖四，接著將紙條的上半部$\overrightarrow{CB}$摺製與$\overline{CO'}$疊合，此時產生摺痕$\overline{CD}$恰為$\angle BCO'$之分角線；

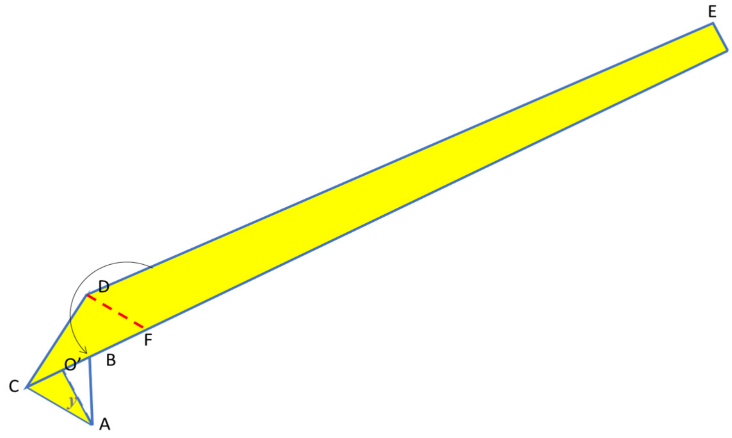
圖四

如圖五，摺製後將紙條旋轉，使$\overline{AD}$位於鉛直線上，需注意此時 B 點經翻摺後未必與 A、D 同一直線；



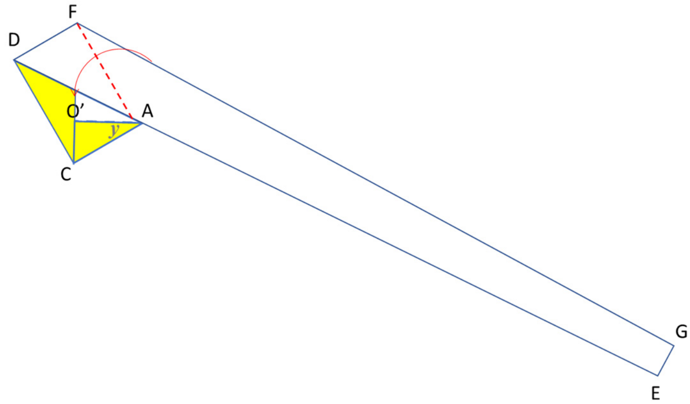
圖五

如圖六，將旋轉後的紙條上半部邊長$\overline{DE}$摺至鉛直線$\overline{DA}$上，此時摺痕$\overline{DF}$恰為∠ADE 的分角線；



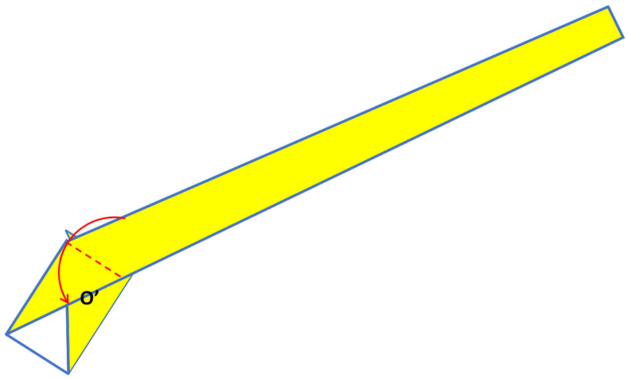
圖六

如圖七，將摺製後的紙條旋轉為$\overline{CF}$為鉛垂線後，將上半部邊長$\overline{FG}$摺至$\overline{CF}$上；

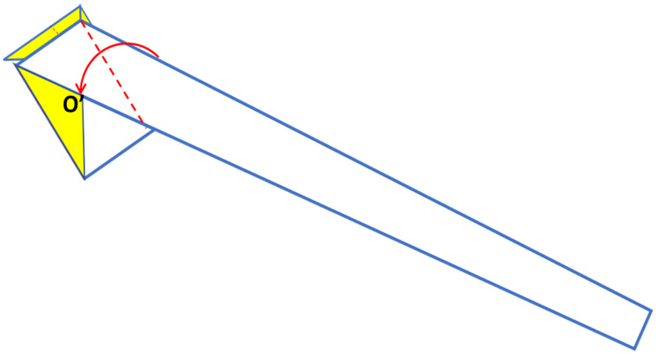


圖七

如圖八、圖九，接著依此方式，持續旋轉紙條，使得上半部邊長輪流摺至鉛垂線上；

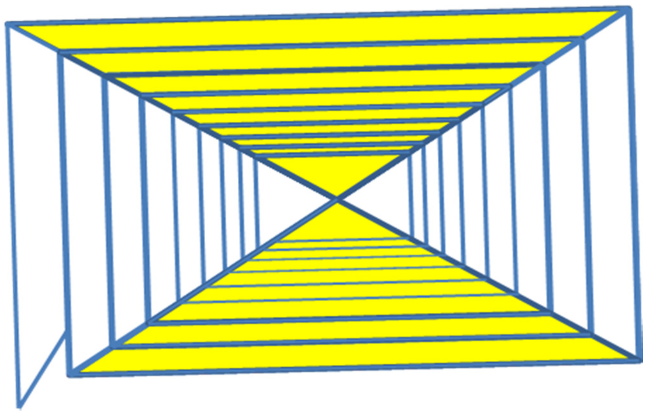


圖八

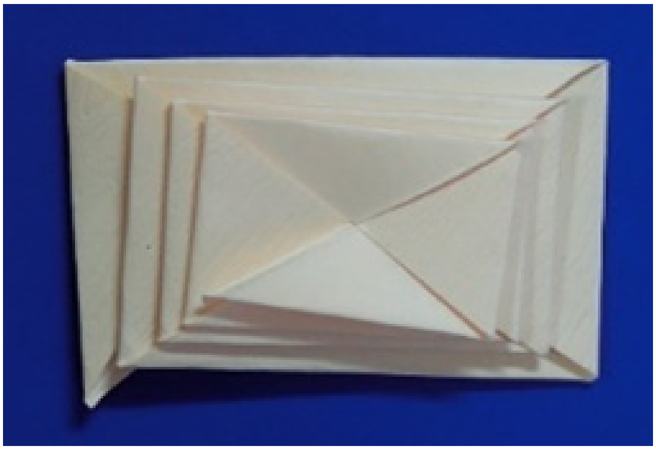


圖九

將整張長條紙的摺痕摺製完畢後，仿照之前「百轉千摺」的收納方式，完成作品如圖十【註三】。

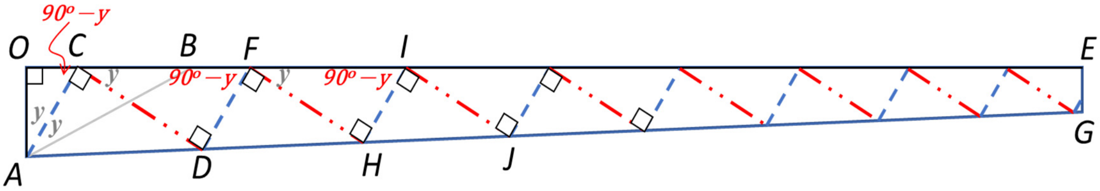


圖十-1



圖十-2

接下來我們要討論這個長方形版的百轉千摺了！首先我們將作品的摺痕攤開如圖十一，在同樣看到這些摺痕形成許多的直角三角形的前提下，這些直角三角形是否跟之前作品一樣也會彼此相似呢？

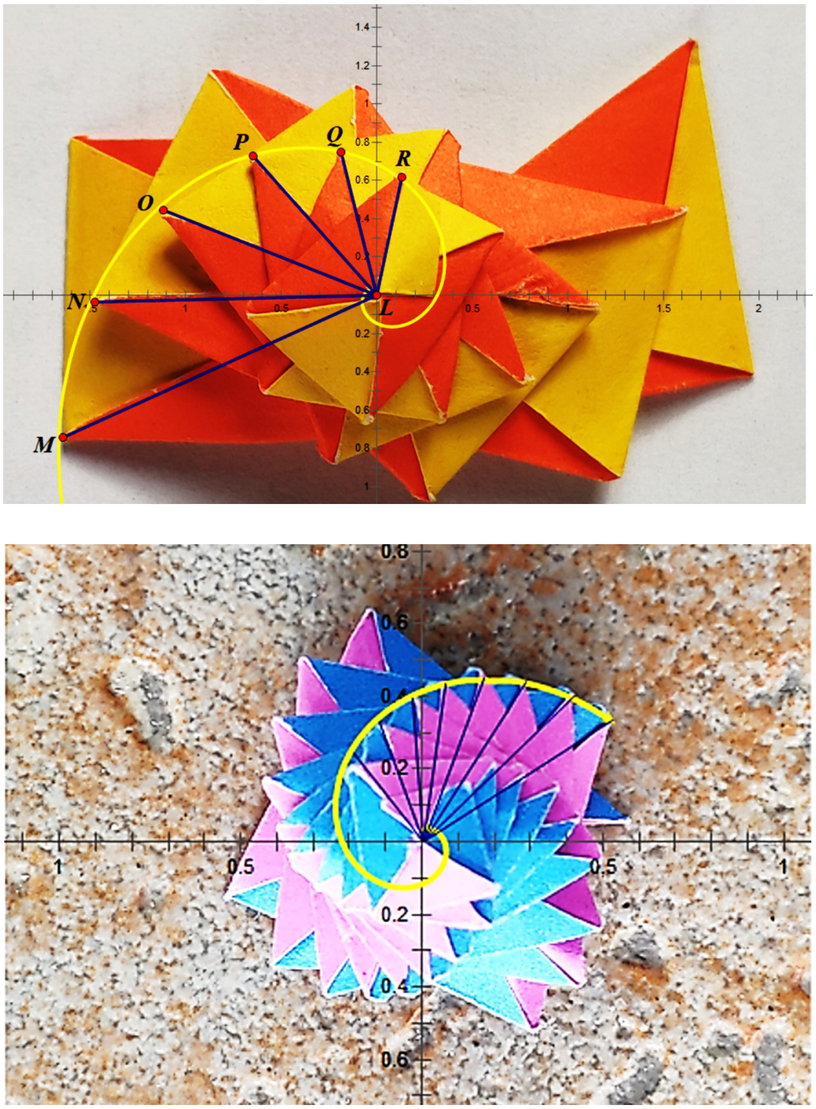


圖十一

首先我們看第一個摺製的△ACO，由於我們摺進來的摺痕$\overline{AC}$與原來紙條的寬邊$\overline{AO}$夾角為 y，又根據我們摺製的過程，每條摺痕的夾角均為直角，所以我們可以推得△CDF、△FHI 皆為直角三角形，且角度與第一摺製的△ACO 均相同，再仿照此推論，就可以得到上半部所有的直角三角形均相似，且其兩股的比值恰為一開始摺製△ACO 的$\frac{\overline{OC}}{\overline{AO}} = \tan y$！可是下半部的直角三角形呢？

此時我們發現下半部直角三角形的角度會隨著斜切後的 G 點位置而改變，亦即若我們將上半部邊長$\overline{OE}$與下半部邊長$\overline{AG}$延長產生夾角θ，則$\angle CAD=90^o - y - \theta$；$\angle CDA=y + \theta$，且△$ACD$ 的角度會與接下來下半部所有的直角三角形（△DFH、△HIJ……）都相似！接著再考慮其特殊性，若夾角$\theta = 0^o$（即上下兩邊$\overline{OE}$與$\overline{AG}$平行）或將$\overline{OA}$摺至$\overline{AG}$上（亦即原來百轉千摺作品摺法，此時 y=$45^o - \frac{\theta}{2}$）均會造成這個作品從頭到尾的直角三角形（即上下半部的兩種三角形）均相似，有興趣的讀者們還可以從最後的作品中拆解這些直角三角形為哪兩種三角形所組成，彼此相似或不相似呢？

還可以接著探究的是，「百轉千摺」作品無論本文中一開始提到的子母相似版本，還是後半段所提到的矩形版「百轉千摺」，最後完成的作品若經過均勻旋轉並將其一個系列的所有的頂點連接成曲線，均可以一個適當的等角螺線擬合（如下圖十二），其方程式與我們所摺製的角度（或紙張裁切的度數）為極度相關：

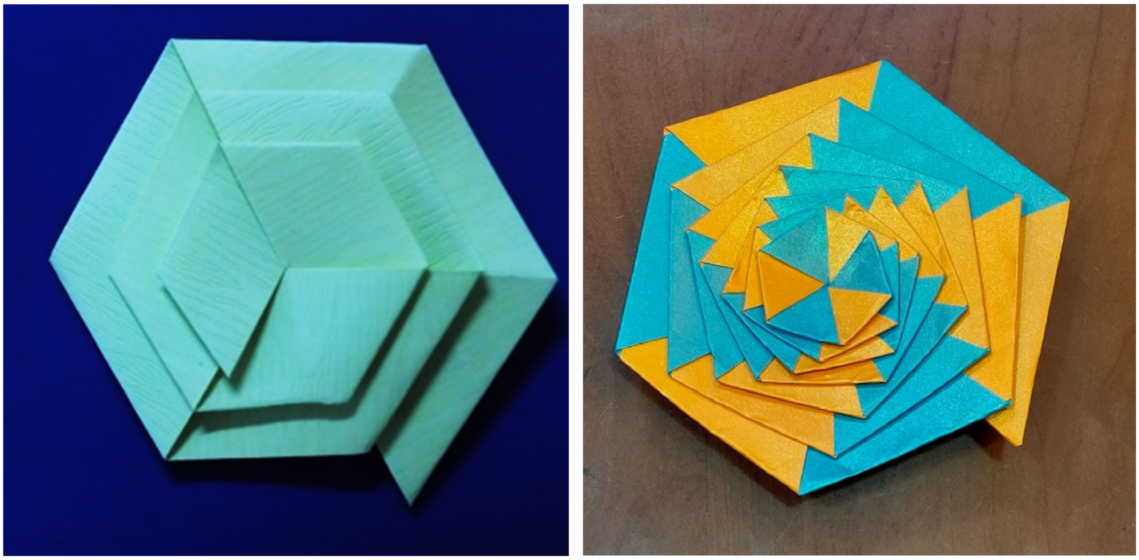


圖十二

這樣的等角螺旋線有一個統一的極座標運算式：$\rho = \gamma^{\frac{\theta}{\alpha_0}-\beta_0}$. 其中$\gamma$是公比，也就是相鄰的三角形之間的相似比；$\alpha_0$是對應邊之間相差的旋轉角；$\beta_0$是初相，可用來調節電腦繪圖與實物照片之間的旋轉差角。

最後再附帶一提，「百轉千摺」作品除了本文中一開始提到的子母相似版本，以及後半段所提到的矩形版「百轉千摺」，若我們在摺製方式再作點變化，還可以完成如圖十三的六邊形版「百轉千摺」，只是因篇幅關係，或許留待下次有機會再跟各位讀者們分享其摺製方式與數學概念應用了。

百轉千摺，勝境連連！



圖十三

【註一】「百轉千摺」作品示範影片：(若無銜接紙條，亦可以長方形紙條或一般常用的空白收據紙捲斜切為兩段直角梯形，以其中一段摺製即可)
https://www.youtube.com/watch?v=xiIbAv6Ow78&list=PLKCcdlHfSbyEsOntuI2ivEep7P06lATgz&index=10&fbclid=IwAR3zJsJ8-0oTAVVGAIDus9Km2Rzd6DzzRAIe73Y0v8NccbFqZRWG2_PoBOI

【註二】需注意若θ過大，最後幾個直角三角形將不易摺製，作品完成的效果也會受到影響，請讀者們自行斟酌裁切。

【註三】若讀者已有之前完成「百轉千摺」作品的經驗，可直接以單色紙條摺製作品如圖十-2；若尚未摺製或不熟悉者，可以正反面雙色紙條摺製完成如圖十-1。