解構我的「圓面積」教學

陳玉珊

臺北市立大學 教育系

壹、前言

「為何『圓面積』單元要安排在六年級才教?」、「教圓面積，不是只要套套圓面積公式計算就可以了嗎?」、「我知道動手操作可以提升學生的學習興趣，但是如果每一個活動真的都讓學生動手操作，會大幅壓縮到上課時間……」，上述困惑都是學校同事們曾經問過筆者的問題，儘管筆者已經有近二十年的高年級教學經驗，但在國小教『圓面積』，如果要讓學生更有脈絡性的學習，究竟該教些什麼呢?或者應該怎麼教呢?

圓的概念是國小平面幾何課程的重點(教育部，2008、2018)，但是由於「圓」為曲線，對於國小學童來說，圓周長的測量，不易透過直尺的測量而得到結果;同樣的，圓面積的計算亦不及正方形、長方形、三角形或平行四邊形面積容易理解，因此現行三家版本(康軒、南一、翰林)的教科書對於「圓面積」的教學活動，仍舊沿襲中年級求正方形和長方形面積的方法，會先安排第一個活動:「非直線邊的平面區域面積」，採用平方公分板去點數出葉子形狀的不規則平面面積，進一步去估算圓面積，接著再進入第二個活動:「圓面積公式」，透過將圓分別平分成 8 份扇形、16 份扇形、32 份扇形，再將其拼湊成平行四邊形或是長方形，進而推導出公式為「圓面積=半徑×半徑×圓周率(3.14)」。

儘管這兩個活動都可以讓學生估算出圓面積，然而，學生在進行具體物操作時，要能夠從「採用平方公分板去點數出葉子形狀的不規則平面面積，進一步去估算圓面積」連結到「將圓分別平分成 8 份扇形、16 份扇形、32 份扇形，再將其拼湊成平行四邊形或是長方形」的學習，具有相當難度，因為前者是屬直觀的操作活動，而後者則已牽涉到等積異形的保留概念(譚寧君，1995)，除此之外，學生還要能夠「將這些小扇形進行有規律的拼湊成平行四邊形或是長方形」，才有能力使用平行四邊形或是長方形的面積公式進行圓面積的推導，上述這些活動彼此之間缺乏脈絡性的連結，甚至容易讓學生淪於只對數學公式的背誦罷了。「圓面積」的學習倘若只為公式的背誦，便無需要將其課程安排在六年級才教，更遑論對於之前「圓周長」的學習有一個脈絡性的連結。因此，如何讓「圓面積」與「圓周長」教學更具有脈絡性的連結，便成了筆者想要重新解構「圓面積」教學的主因。

李源順(2018)提到想要真正了解曲線

需要有微積分的概念，筆者除了透過數學史的啟發，再加上有了之前解構「圓周長」教學的成功經驗，這兩者都加深了筆者想要再次重新解構自己「圓面積」教學的念頭，筆者也剛好藉此機會延續之前「圓周長」的教學，再一次嘗試以「無限分割」的方式(隱含逼近概念)實踐在自己的數學課室中，而學生在「圓面積」的解題表現也同樣令人感到驚豔。為此，筆者認為以「逼近」的概念來進行「圓面積」教學，或許能夠再次為大家提供另一條更具脈絡化的教學新路徑。

貳、相關文獻

學生幾何能力的發展，隨著年級會有不同的學習重點。根據十二年國民基本教育課程綱要的學習重點(教育部，2018)來看：低年級階段，強調透過操作來進行幾何形體的認識及探索。中年級階段，強調學習運用幾何形體的構成要素(ex：頂點、邊、角、面)及其數量的性質(角度、邊長、面積)敘述幾何形體，透過點數平方公分板的活動，進行邊長、周長與面積關係的理解。高年級階段，強調認識生活中的圖形(多邊形、圓形、扇形、柱體、錐體)，**以推理、歸納的方式**來理解幾何圖形的基本定義，應用全等、相似性質於幾何圖形問題的解題，同時透過切割、重組的活動操作，建立面積和體積公式並能加以應用。

一、現行康軒版教科書「圓面積」的教學活動設計

國小有關「圓」的教學脈絡，從中年級開始，主要是認識圓，知道圓心、半徑、直徑、圓周為圓的構成要素；到了高年級，才進行圓周長、圓周率與圓面積的教學。筆者任職的學校，六年級的數學課本是選用康軒版本，以下簡單介紹康軒第十一冊教科書在「圓面積」的教學活動設計。

現行康軒版教科書對於「圓面積」的教學活動設計，編排了二個活動，活動一：「非直線邊的平面區域面積」，先是採用平方公分板去覆蓋、點數出葉子形狀的不規則平面面積後，再進一步去估算圓面積大小。緊接著進入活動二：「圓面積公式」，則是透過將圓平分成 8 等份小扇形、16 等份小扇形、32 等份小扇形，將這些等分切割後的 $\frac{1}{8}$ 圓、$\frac{1}{16}$圓和$\frac{1}{32}$圓的小扇形分別將其拼湊成平行四邊形或是長方形，再透過平行四邊形或是長方形的面積公式推導出圓面積公式為「圓面積=半徑×半徑×圓周率(3.14)」。

當代數學教育理念強調的「概念性理解」，是指所有教學活動與題目的鋪陳，所要帶給學生的**數學概念必須是前後連貫**的，絕不只是單純的活動操作與回答，因為這樣的學習容易淪於程序性知識的問答而已(Hiebert & Carpenter，1992)，換言之，一個好的教學活動設計，是要能夠引發學生學習上的連結。

筆者仔細分析上述教學活動設計，現行教科書所編寫「非直線邊的平面區域面積」與「將圓進行等分切割，再將這些等分切割後的扇形拼湊成平行四邊形 or 長

方形」的圓面積教學活動，筆者認為這兩個教學活動彼此獨立，並沒有很強的脈絡性連結。換言之，現行教科書在「圓面積」的教學活動設計上，其數學概念是缺乏前後連貫的，因此學生都必須得透過老師的「直接指令」才能夠進行每一個活動，而學生的學習也都是屬於比較被動式的操作。

二、數學史的啟發

當代數學教育的理念，一直都希望能教給學生概念性知識的理解，所以在教學活動的設計，理應重視承先啟後的脈絡性發展，如何讓學生在「圓」的學習上更有感？筆者先從了解圓面積教學的內涵開始，藉由透過閱讀相關的數學史—中國劉徽的「割圓術」以及西方阿基米德的「窮舉逼近法」，發現「圓」概念的教學，從「逼近」的角度切入似乎是一個值得嘗試的選擇。礙於篇幅限制，筆者只列出中西方各一個最著名的圓面積公式的推導方法。

(一) 劉徽的「割圓術」

有關「圓」的數學史，就不得不提到曹魏有名的數學家—劉徽，劉徽的「割圓術」：割之彌細，所失彌少。割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣！觚面之外，猶有餘徑，以面乘餘徑，則冪出弧表。若夫觚之細者，與圓合體，則表無餘徑。表無餘徑，則冪不外出矣。以一面乘半徑，觚而裁之，每輒自倍，故以半周乘半徑而為圓冪。其中將圓內接正多邊形「割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣」，無疑是涉及無限概念的一種推論，只要不斷切割下去，圓內接正多邊形最終就能與圓周疊合在一起（洪萬生，2004），如圖 1。

(二) 阿基米德—窮舉逼近法

阿基米德則是將歐幾里得提出的「逼近」概念作了有效的運用，他發現隨著圓外切多邊形和內接多邊形的邊數增加，多邊形將會越來越接近圓(如圖 2)，此方法就是數學史上有名的「窮舉逼近法」(維基百科，2019)。

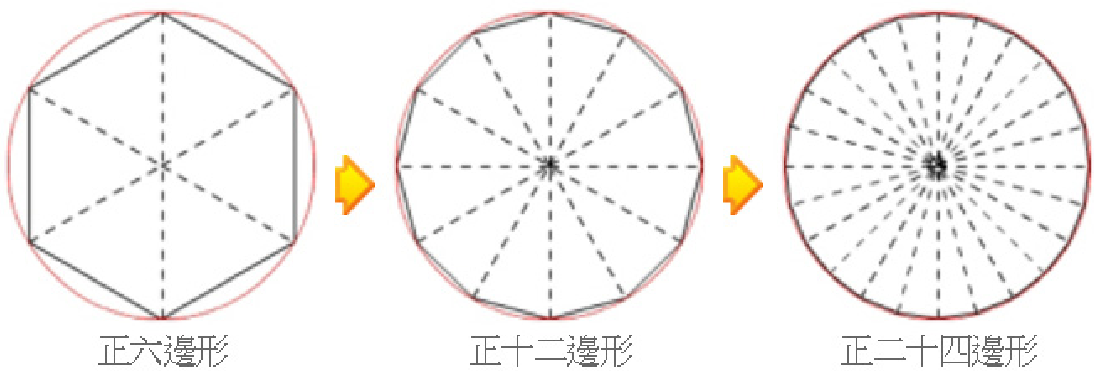

圖 1、劉徽的割圓術

圖 2、阿基米德的窮舉逼近法

根據上述兩個數學史的例子，不論是中國劉徽的割圓術，或是西方阿基米德的窮舉逼近法，都是用「逼近」的方法來求得圓面積，因此筆者認為，從「逼近」的概念引導學生學習圓面積的教學方式或許值得嘗試。礙於篇幅限制，本文只聚焦在解構「圓面積」的教學。

參、教材設計與教學實踐

透過文獻，讓筆者對「圓」的教學有了新的體認，原來「圓面積」的教學，絕不只是要教學生學會圓面積的計算而已，更重要的是為日後「不規則圖形的面積」之前置作業，也就是說，我們在教學生如何導出「圓面積＝半徑×半徑×圓周率(3.14)」公式的過程中，如何將「逼近」的概念教給學生?更具體來說，我們是如何引導學生從「不規則」圖形中去產生「逼近」的概念，因為當學生有了「逼近」的概念之後，學生才能去感受到「所有不規則圖形中的曲線，只要透過無限份數的切割，切割後的曲線都將會逼近於直線」。

一、教材設計思考

以學生學習為中心的教學，其中有一個很重要的精神，就是希望學生在學習新概念的同時，都要能夠與舊經驗連結，因此在進行圓面積教學之前，筆者會先**刻意要求**每一位同學都必須先自備一個**任意大小**的圓形圖卡，且該圓形圖卡中不能有圓心的痕跡，也就是說這個圓形圖卡不能是透過圓規畫出來的，企圖透過「任意圓形圖卡」的各種測量結果，讓學生<u>自行算出</u>並<u>發現</u>不管是大圓還是小圓，扇形越小就會越接近等腰三角形，再透過曾經學過的三角形面積公式，進而最後能夠推導出圓面積公式：圓面積＝半徑×半徑×圓周率(3.14)。

二、教學實踐

筆者任教的班級，全班 26 人，共分成四組，每組約 6~7 人。本次圓面積教學，學生手邊只有大小不一的圓形圖卡、直尺等工具，藉由老師的提問，引發學生思考

可能的解題策略。老師(即筆者)有三點任務要求：

1. 解題策略越多種越好。
2. 發表解題策略時，務必說明所依據的數學論點。
3. 寫出合理的算式及算出答案，並清楚的說明。

(一) 活動一：引起動機—製造「圓面積」的需求感 (0.5 節)

教學片段 1：

（T 表示教師，SS 表示全班同學）

T：「請各位同學拿出手上已經準備好且**<u>大小不一的圓形圖卡</u>**，告訴我，當你拿到這張圓形圖卡時，除了上一個單元已經學過的圓心、半徑、直徑、圓周長外，你還會**<u>想要知道什麼樣的訊息</u>**，而這訊息你是怎麼得知?記得此時你的**<u>手邊只有直尺和圓形圖卡而已</u>**唷…」

SS：「除了圓心、半徑、直徑、圓周長外，我們還會想要知道圓面積…」

T：「什麼是圓面積?」

SS：「圓面積就是圓的面積，也就是…圓的大小!」

(二) 活動二：找出圓面積(1 節)

教學片段 2：

（T 表示教師，S4 表示 4 號同學)，如圖 3、圖 4。

T：「請問圓面積要怎麼算呢?不可以套圓面積公式喔，可以使用曾經學過的所有方法哦…」

S4：「因為老師說可以使用曾經學過的所有方法，所以我們就先回想我們學過哪些面積公式，有正方形、長方形、平行四邊形、三角形、梯形…，突然想到前一個單元在學圓周長時，我們把圓一直摺一直摺，摺到不能再摺為止，打開之後，我們發現這些扇形都很像等腰三角形，所以我們就想只要能夠知道三角形的底和高，就可以知道這個圓的圓面積了…」

T：「實在是非常棒的發現，那可以請你告訴我們,你們是怎麼算出圓面積的呢?」

S4：「我們是先把圓對摺 2 次，找到半徑，之後再把圓摺出 32 等份,因為我們這一組的圓，最多只能摺出 32 等份而已，每一等份看起來都很像等腰三角形，所以再用直尺量弧，我們把弧長當底、半徑當高，先算出一個三角形的面積，再乘以 32，就是這個圓的圓面積了(如圖 3)。」

S9：「可是三角形的高不是半徑，後面有突出來一小段(如圖 4)…」

S4：「可是當我們把圓一直切割，切割到很小很小，這時候三角形的底就會很接近扇形的弧，那突出來這一小段就可以被忽略了。」

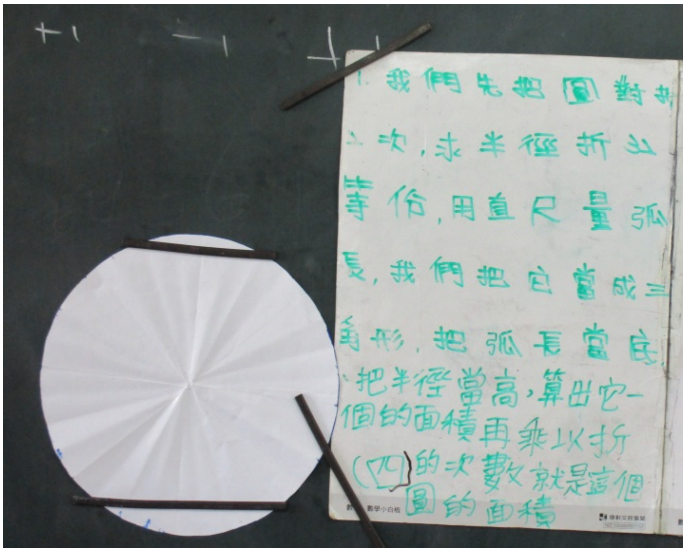

圖 3、將圓形圖卡對摺多次

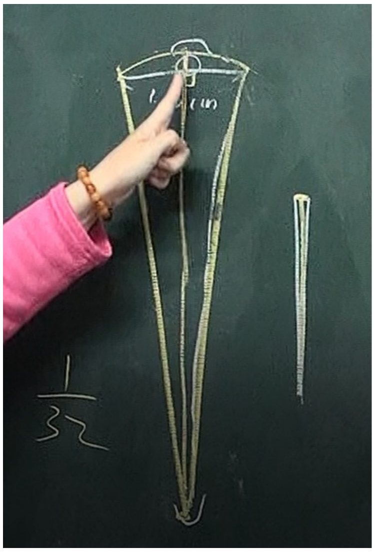

圖 4、扇形的半徑≒三角形的高

根據教學片段 2，筆者以本活動二先引起學生「回想」前一個單元「圓周長」曾學過「逼近」的概念，企圖引導學生再次透過「無限切割」的方式來計算圓面積大小，當學生 S4 可以回答出：「當我們把圓一直切割，切割到很小很小，這時候三角形的底就會很接近扇形的弧，那突出來這一小段就可以被忽略了。」筆者認為此時學生確實已具備「逼近」的概念了。

(三) 活動三：推導出圓面積公式(1.5~2 節)

教學片段 3：

（T 表示教師，Sn 表示 n 號同學），如圖。

T：「現在請用黑板上這個圓，來推導出圓面積公式…」

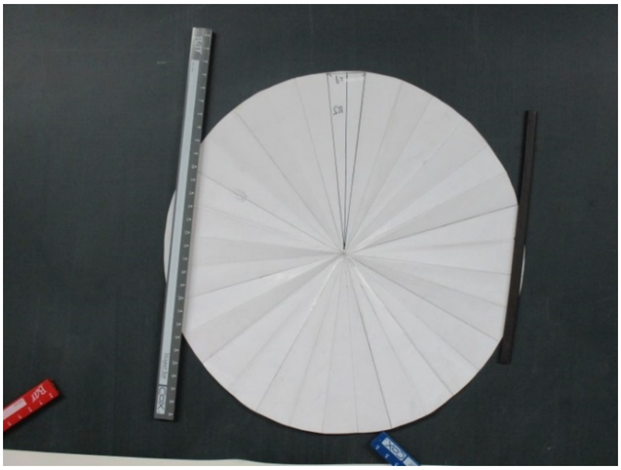

圖 5、將圓形圖卡切割 32 等份

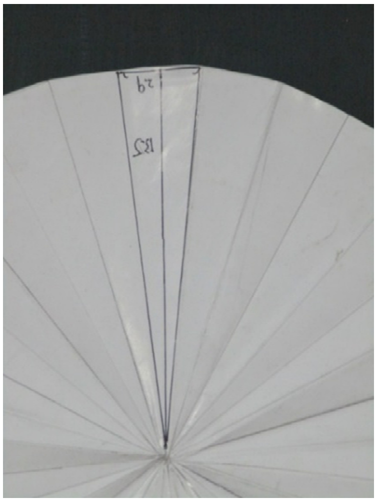

圖 6、小扇形≒小三角形

1. 第二組的解題策略：

如圖 7。推導的過程如下：S 是圓周長、r 是半徑、R 是直徑

S÷32×r÷2×32

S÷32 →因為一個圓被切割成 32 個扇形，所以這是每 1 個扇形的弧長，也就是三角形的底

S÷32×r →r 是半徑，也就是三角形的高，所以這是指 底×高 的意思

S÷32×r÷2→底×高÷2，這是指小三角形面積的意思

S÷32×r÷2×32 →一個圓有 32 個小三角形，這是指這個圓的圓面積

$S\div\cancel{32}\times r\div 2\times\cancel{32}$

$=S\times r\div 2$

$=(R\times\pi)\times r\div 2$

$=\cancel{2}\times r\times\pi\times r\div\cancel{2}$

=r × r × π (半徑×半徑×圓周率)

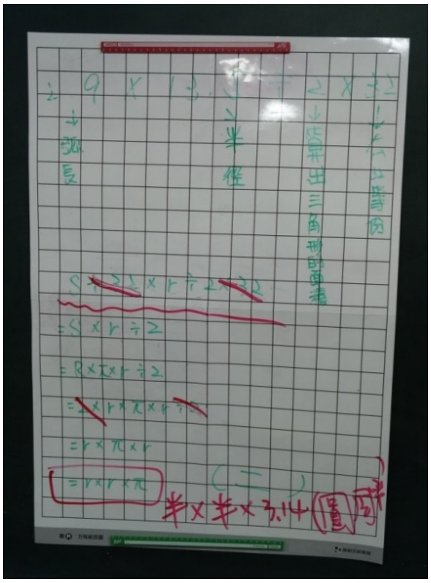

圖 7、第二組的推導過程

2. 第三組的解題策略：

如圖 8。推導的過程如下：R 是直徑、r 是半徑、n 是切成 n 等份

R×π÷n×r÷2×n

R×π → 圓周長

R×π÷n → 每一等份(扇形)的弧長，也就是三角形的底

R×π÷n×r →底×高

R×π÷n×r÷2 →底×高÷2，每一等份(扇形)的面積

R×π÷n×r÷2×n → n 等份(扇形)的面積總和，就是一個圓的圓面積

$R\times\pi\div\cancel{n}\times r\div 2\times\cancel{n}$

$=R\times\pi\times r\div 2$

$=r\times\cancel{2}\times\pi\times r\div\cancel{2}$

$=r\times\pi\times r$

=r × r × π (半徑×半徑×圓周率)

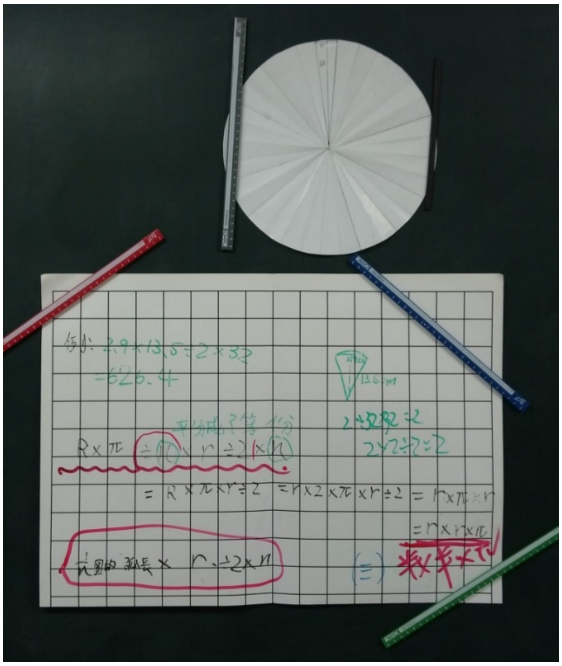

圖 8、第三組的推導過程

3. 第四組的解題策略：

如圖 9。推導的過程如下：S 是圓周長、R 是直徑、r 是半徑、n 是切成 n 等份

$S \div n \times r \div 2 \times n$

$S \div n$ → 將一個圓切割成 n 等份，每一等份(扇形)的弧長，也就是三角形的底

$S \div n \times r$ →底×高

$S \div n \times r \div 2$ → 底×高÷2，每一等份(扇形)的面積

$S \div n \times r \div 2 \times n$ → n 等份(扇形)的面積總和，就是一個圓的圓面積

$S \div \cancel{n} \times r \div 2 \times \cancel{n}$

$= S \times r \div 2$

$= (r \times \cancel{2} \times \pi) \times r \div \cancel{2}$

$= r \times \pi \times r$

$= r \times r \times \pi$ (半徑×半徑×圓周率)

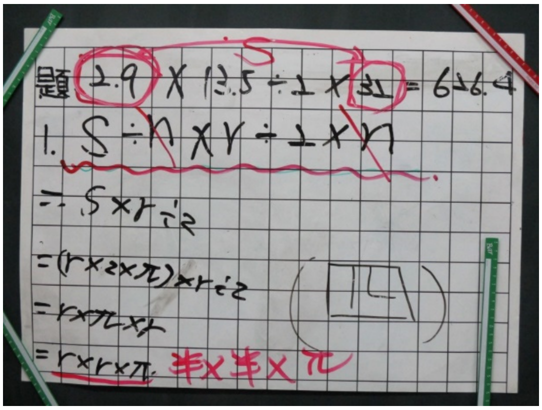

圖 9、第四組的推導過程

上述分析顯示，除了第一組外，其它三組幾乎每一組同學都能夠在此次進行「圓面積」概念的教學過程中，正確地推導出「圓面積」公式，甚至在推導圓面積公式的過程中，直接就能夠使用符號來表示不同項目的義涵(例如：S 表示圓周長、R 表示直徑、r 表示半徑)，充分顯示全班大部分的學生透過此次教學，不但呈現了他們已經具備了數學「一般化」的能力，同時亦展現了他們具備數學微積分：「所有不規則圖形中的曲線，只要透過無限份數的切割，切割後的曲線都將會接近直線」的逼近概念。

肆、結論

根據上述分析，筆者認為本次教學學生確實具備了「逼近」的概念。

當代數學教育理念強調的「概念性理解」，是指所有教學活動與題目的鋪陳，以及所要帶給學生的數學概念必須是前後連貫的，絕不只是單純的活動操作與回答，否則這樣的學習容易淪於程序性知識的問答而已。雖然現行教科書編排測量圓面積的方法是學生比較容易回想到的方法，但是每一個活動的操作以及活動間的連結，都得依賴老師的直接指令才能進行，學生缺乏主動且深入的思考與探究。筆者認為此次解構圓面積的教學，優點有以下二點：

一、圓面積公式將會由學生自行導出，讓學生學習數學更有感。

二、能夠延續之前圓周長的學習，讓「圓」的概念更有脈絡性。

延續上一個單元解構「圓周長」的教學，再加上這一次解構「圓面積」教學，終於讓筆者理解到，為什麼教科書要安排

這麼多堂課的時間來教「圓」？除了讓學生學到圓周率、圓周長公式和圓面積公式外，其實真正重要的內涵是**為了教導學生具備「逼近」的概念，而這「逼近」是學微積分非常重要的關鍵概念，換言之，未來要教「不規則圖形」的周長或面積時，「圓」的教學就是啟蒙例**。教學是為日後求「不規則圖形」最重要的教學，就是要教學生對於非直線邊的**過程**中，如何將「逼近」的概念教給學生?更具體來說，我們是如何引導學生從「求不規則圖形面積」去產生「逼近」的概念，因為當學生有了「逼近」的概念之後，學生才能去感受到**「無限多邊形，最後都會逼近於圓形；也或者從另一個角度來看，所有不規則圖形中的曲線，只要透過無限份數的切割，切割後的曲線都將會逼近於直線」**。

有了數學史的啟發，原來以「逼近」的概念來教圓面積，的確不失為另一條可行的教學新路徑。

參考文獻

李源順（2018）。**數學這樣教： 國小數學感教育**。台北：五南圖書出版股份有限公司。

洪萬生(2004)。三國 π 裏袖乾坤–劉徽的數學貢獻。**《科學發展》，384** 期，68 ~ 74 頁。

康軒文化(2019)。**國小數學第十一冊**。新北市：康軒文化事業有限公司。

蔡聰明（2000)。**數學發現趣談**。臺北市：三民。

教育部(2008)。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。台北市：教育部。

教育部(2018)。**十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程綱要正式版**。

譚寧君(1995)。**國民小學數學課程幾何教材分析研討**。載於周筱亭編，八十三年度國民小學新課程數學科研討會論文暨會議實錄專輯，47-58。臺北。台灣省國民學校教師研習會。

維基百科(2019)。阿基米德。取自：https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%98%BF%E5%9F%BA%E7%B1%B3%E5%BE%B7。

Hiebert& Carpenter(1992).Learning and teaching with understanding.In Grouws,D.A.(Ed).Handbook of research on mathematics teaching and learning.MacMillan.