平面凸多邊形 SASAS 方程式

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

壹、前言

平面凸多邊形圖形中可擇取任意三段連續相鄰邊長與居間的兩頂角恰形成以 邊長-頂角-邊長-頂角-邊長 SASAS 分佈排列出 凵 圖樣的幾何形狀，而此三段邊長與居間的兩頂角正弦值、餘弦值恰能分別構建成各自一組互對應的兩相關方程式，此類方程式即稱為一般形平面凸多邊形連續邊長與頂角的 SASAS 方程式。

這個 SASAS 定理在圓內接多邊形中慣常地展現出更精簡的方程式內涵結構，也容易經由圓內接四邊形內角性質而證得。相對地，要推證出一般形平面凸多邊形邊長與頂角的 SASAS 方程式而卻沒有特定的內角性質可依據應用時，就須另闢蹊徑開拓出新策略而有效正確的完成理論證明。經多方思索、精密比對各種預推的方程式結果而找到的新方法就是頂角角度轉換修正參數法，這參數法的應用可導證出許多預想不到的新境界成果，其翔實內容盡在下方主文中完整揭露。

首先來看；圓內接四邊形 SASAS 定理：

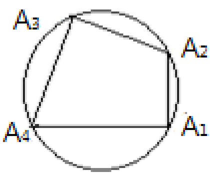

圖 1

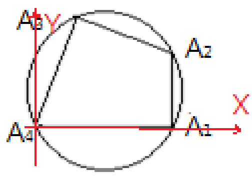

圖 2

任給一個圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，見圖 1.， 令邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_1}=V_4$，則下列 SASAS 正弦型方程式 (1-1)式與 (1-2)式 必定恆成立；

$$V_2\sin(A_2-A_3)=V_3\sin A_2-V_1\sin A_3 \tag{1-1}$$

$$\frac{\sin(A_2-A_3)}{V_1V_3}=\frac{\sin A_2}{V_1V_2}-\frac{\sin A_3}{V_2V_3} \tag{1-2}$$

此處選取的三段連續相鄰邊長為 V_1、V_2 與 V_3，而居間的兩頂角為 A_2 與 A_3，使這五個幾何量恰形成 SASAS 正弦型方程式 (1-1)式與 (1-2)式。

證明：見圖 2，建立一直角坐標系，先將 A_4點置於此坐標系的原點，再將直線段 $\overline{A_4A_1}$ 疊置於坐標系 X 軸，使兩者相重合。此四邊形線段 $\overline{A_4A_1}$ 處顯示之方位角為零，$\overline{A_1A_2}=V_1$處之方位角為 $\pi-A_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$ 的方位角為 $2\pi-A_1-A_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$ 的方位角為 $3\pi-A_1-A_2-A_3$。由封閉四邊形及向量的正交性質，則此圓內接四邊形必有下列的四個相鄰邊長與頂角相關聯的正弦關係式；

$$V_4\sin 0+V_1\sin(\pi-A_1)+V_2\sin(2\pi-A_1-A_2)+V_3\sin(3\pi-A_1-A_2-A_3)=0$$

由圓內接四邊形兩對角和互為補角關係性質，代入演算後可得；

$$\Rightarrow \qquad V_1\sin A_1+V_2\sin(\pi+A_3-A_2)+V_3\sin(2\pi-A_2)=0$$

$$\Rightarrow \qquad V_1\sin A_3+V_2\sin(A_2-A_3)-V_3\sin A_2=0$$

$$\Rightarrow \qquad V_2\sin(A_2-A_3)=V_3\sin A_2-V_1\sin A_3 \tag{1-1}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\sin(A_2-A_3)}{V_1V_3}=\frac{\sin A_2}{V_1V_2}-\frac{\sin A_3}{V_2V_3} \tag{1-2}$$

以上 (1-1)式與(1-2)式證明完成。同時，此定理的逆敘述也必然成立，證明如下；

[逆敘述]：任意給定一個平面凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，若其三個連續相鄰邊長 V_1、V_2與 V_3，

而居間的兩頂角為 A_2與 A_3已滿足 $V_2\sin(A_2-A_3)=V_3\sin A_2-V_1\sin A_3$的(1-1)式等式關

係式時，則此凸四邊形的四頂點必定共圓。

[證明]：以歸謬法証明；　假設 (1-1)式成立，請見下圖 3.。

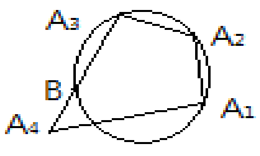

圖 3

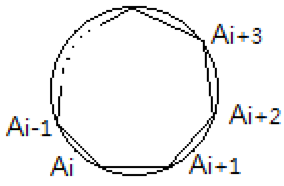

圖 4

若通過 A_1、A_2、A_3三點的外接圓不通過點 A_4，先預設點 A_4落在圓的外側。令 B 點是線段 $\overline{A_3A_4}$ 與圓周的交點，且令線段長 $\overline{A_3B}=U_3$，則由已證的定理知；

$$V_2\sin(A_2-A_3)=U_3\sin A_2-V_1\sin A_3 \tag{1-3}$$

，但由已知的假設有 $$V_2\sin(A_2-A_3)=V_3\sin A_2-V_1\sin A_3 \tag{1-1}$$

比較 (1-3)式與 (1-1)式，得 $U_3=V_3$ ，而有 B= A_4 ，即點 B 與點 A_4 重合。如果預設點 A_4 落在圓的內側，證明完全類似。因此，此平面凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的四頂點必定共圓，其必為圓內接四邊形。逆敘述證明完成。

這定理告訴我們，只要有三個連續相鄰邊的四頂點共圓時，此三鄰邊的邊長與居間的兩頂角之間必具有如(1-1)式與(1-2)式 SASAS 型的實質恆等式關係。圖 4.裡 由(1-1)式表明：任一邊長 $\overline{A_iA_{i+1}}=V_i$ 與其兩端點的頂角差 A_i-A_{i+1} 的正弦值相乘積組合恰等於（A_i 正弦值乘上右鄰邊長 $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}=V_{i+1}$）減去（$A_{i+1}$ 正弦值乘上左鄰邊長 $\overline{A_{i-1}A_i}=V_{i-1}$），型式為：

$$V_i\sin(A_i-A_{i+1})=V_{i+1}\sin A_i-V_{i-1}\sin A_{i+1} \tag{2}$$

，這是很具有規則性的型態結構。此方程式(2)式非常有效用，後續的許多推演證明過程都會重複應用此類方程式性質。

應用頂角角度轉換修正參數法並參考(1-1)式的型態結構，即可對一般形平面凸多邊形任意圖形推證尋找出相對應的各類 SASAS 正弦型、餘弦型方程式。

貳、本文

考慮任意一個一般形平面凸 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$，令各邊邊長為 $\overline{A_1A_2}=V_1$ ，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，…，$\overline{A_iA_{i+1}}=V_i$，…，$\overline{A_{n-3}A_{n-2}}=V_{n-3}$，$\overline{A_{n-2}A_{n-1}}=V_{n-2}$，$\overline{A_{n-1}A_n}=V_{n-1}$，$\overline{A_nA_1}=V_n$，對角線長 $\overline{A_1A_m}=d_{1m}$，$3\le m\le(n-1)$，$1\le i\le n$ ，此 i 與 n、m 皆為自然數。而在以下正文的敘述推論驗證過程中，所有需使用到的各多邊形邊長線段及各對角線長表示式均以依循此處明列者為基準，且演繹運算流程中更需要應用到下列 4 個基本性質----引理；

一、數學基本性質---引理；

引理 1. 三角形正弦定理：請見下圖 5.，半徑 R 的圓內接三角形 $A_1A_2A_3$，令邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_1}=V_3$，則精簡、對稱的正弦定理公式為：

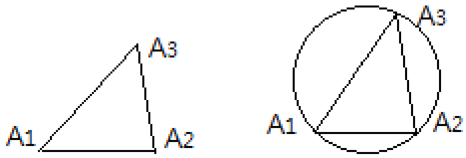

圖 5

$$\frac{V_1}{\sin A_3}=\frac{V_2}{\sin A_1}=\frac{V_3}{\sin A_2}=2R \tag{3}$$

證明：略。

引理 2. 三角函數角度的和差轉換公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

引理 3. 平面凸 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的所有頂角總和為：

$$A_1+A_2+A_3+....+A_{n-2}+A_{n-1}+A_n=(n-2)\pi$$

證明：略。

引理 4. 任給一個圓內接偶數邊數 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4....A_{n-1}A_n$，$n=2k+2$，$k$ 為自然數，則

此多邊形的頂角組合； $A_1+A_3+A_5+A_7+....+A_{n-3}+A_{n-1}$

$$=A_2+A_4+A_6+A_8+....+A_{n-2}+A_n=\frac{1}{2}(n-2)\pi$$

證明：略。

二、一般形平面凸多邊形三連續邊長與居間頂角的 SASAS 方程式

A. 三角形的 SASAS 正弦型、餘弦型方程式

仿效前言敘述中的圖 2.證明，先在三角形底邊建立一直角坐標系，如下圖 6.

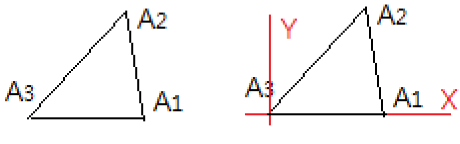

圖 6

證明：此三角形必有下列的兩組三個相鄰邊長與頂角相關聯的關係式；

$$V_3\sin 0+V_1\sin(\pi-A_1)+V_2\sin(2\pi-A_1-A_2)=0$$

與 $$V_3\cos 0+V_1\cos(\pi-A_1)+V_2\cos(2\pi-A_1-A_2)=0$$

應用引理 2.三角函數角度的和差轉換公式，上述 2 方程式化簡成下列 2 式；

$\Rightarrow\quad V_1\sin A_1-V_2\sin(A_1+A_2)=0$ 與 $V_3-V_1\cos A_1+V_2\cos(A_1+A_2)=0$

[1] 現在要應用**多邊形頂角角度轉換修正參數法**：將奇數號標記的頂角 A_1、A_3 與偶數號標記的頂角 A_2 分開成兩組，並應用引理 3.，再令 $A_1+A_3=\pi-\phi$，$A_2=\phi$，此處 ϕ 為角度修正參數。三個頂角和仍然為 π。此角度修正參數 ϕ 適度地將所有頂角區分成 2 組不同角度組合的連結，角度組合的身份與個數則視需要選取，由此可得；$\sin A_2=\sin\phi$，$\cos A_2=\cos\phi$。

[2] 將上述正弦方程式：$V_1\sin A_1-V_2\sin(A_1+A_2)=0$，作角度轉換修正如下；

$V_1\sin(\pi-\phi-A_3)-V_2\sin(\pi-\phi-A_3+A_2)=0$，應用引理 2.展開化簡，得；

$\Rightarrow V_1\sin(\phi+A_3)+V_2\sin(A_2-\phi-A_3)=0$，再展開，分類，依序整理成；

$\sin\phi\cdot[\,V_1\cos A_3-V_2\cos(A_2-A_3)]+\cos\phi\cdot[\,V_1\sin A_3+V_2\sin(A_2-A_3)]=0$，

令 $p=V_1\cos A_3-V_2\cos(A_2-A_3)$，$q=V_1\sin A_3+V_2\sin(A_2-A_3)$，則上式

$$\Rightarrow\quad p\cdot\sin\phi+q\cdot\cos\phi=0 \qquad (*1)$$

[3] 將上述餘弦方程式：$V_3-V_1\cos A_1+V_2\cos(A_1+A_2)=0$，作角度轉換修正如下；

$V_3-V_1\cos(\pi-\phi-A_3)+V_2\cos(\pi-\phi-A_3+A_2)=0$，再展開，整理成；

$V_3+\cos\phi\cdot[\,V_1\cos A_3-V_2\cos(A_2-A_3)]+\sin\phi\cdot[-V_1\sin A_3-V_2\sin(A_2-A_3)]=0$

$$\Rightarrow\quad V_3+p\cdot\cos\phi-q\cdot\sin\phi=0 \qquad (*2)$$

[4] 由 $(*1)\times\sin\phi + (*2)\times\cos\phi \Rightarrow p = -V_3\cos\phi = -V_3\cos A_2$

$$\Rightarrow \quad V_1\cos A_3 - V_2\cos(A_2 - A_3) + V_3\cos A_2 = 0 \tag{4}$$

再由 $(*1)\times\cos\phi + (*2)\times(-\sin\phi) \Rightarrow q = V_3\sin\phi = V_3\sin A_2$

$$\Rightarrow \quad V_1\sin A_3 + V_2\sin(A_2 - A_3) - V_3\sin A_2 = 0 \tag{5}$$

$\Rightarrow$ (4)式又可化成； $$\frac{\cos(A_2 - A_3)}{V_1V_3} = \frac{\cos A_2}{V_1V_2} + \frac{\cos A_3}{V_2V_3} \tag{4-1}$$

方程式(5)式與(4)式即為三角形的 SASAS 正弦型、餘弦型方程式，證明完成。(5)式就是(1-1)式，(1-2)式與(4-1)式恰形成有趣的對比，其型態對照如下；

$$\frac{\sin(A_2 - A_3)}{V_1V_3} = \frac{\sin A_2}{V_1V_2} - \frac{\sin A_3}{V_2V_3} \quad 與 \quad \frac{\cos(A_2 - A_3)}{V_1V_3} = \frac{\cos A_2}{V_1V_2} + \frac{\cos A_3}{V_2V_3}$$

等號右側兩項分別為減與加的組合，兩方程式相對應組成結構都極具規律性。

B. 平面凸四邊形的 SASAS 正弦型、餘弦型方程式

見圖 7.的平面凸四邊形，同樣地，先在四邊形底邊 V_4 邊建立一直角坐標系。

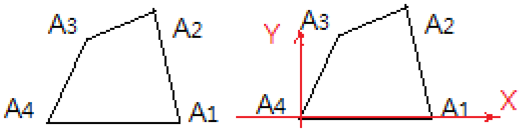

圖 7

證明：此四邊形必有下列的四個相鄰邊長與頂角相關聯的餘弦、正弦關係式；

$$V_4\cos 0 + V_1\cos(\pi - A_1) + V_2\cos(2\pi - A_1 - A_2) + V_3\cos(3\pi - A_1 - A_2 - A_3) = 0$$

與 $$V_4\sin 0 + V_1\sin(\pi - A_1) + V_2\sin(2\pi - A_1 - A_2) + V_3\sin(3\pi - A_1 - A_2 - A_3) = 0$$

$$\Rightarrow V_4 - V_1\cos A_1 + V_2\cos(A_1 + A_2) - V_3\cos(A_1 + A_2 + A_3) = 0$$

與 $$V_1\sin A_1 - V_2\sin(A_1 + A_2) + V_3\sin(A_1 + A_2 + A_3) = 0$$

[1] 應用**多邊形頂角角度轉換修正參數法**：令 $A_1 + A_3 = \pi + \phi$ ， $A_2 + A_4 = \pi - \phi$，

則 $-\cos(A_2 + A_4) = \cos\phi = -\cos(A_1 + A_3)$ ， $\sin(A_2 + A_4) = \sin\phi = -\sin(A_1 + A_3)$ ，

[2] 將 $V_4 - V_1\cos A_1 + V_2\cos(A_1 + A_2) - V_3\cos(A_1 + A_2 + A_3) = 0$ ，作角度轉換；

得 $$V_4 - V_1\cos(\pi + \phi - A_3) + V_2\cos(\pi + \phi - A_3 + A_2) - V_3\cos(\pi + \phi + A_2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad V_4 + V_1\cos(\phi - A_3) - V_2\cos(\phi - A_3 + A_2) + V_3\cos(\phi + A_2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad V_4 + \cos\phi\cdot[\, V_1\cos A_3 - V_2\cos(A_2 - A_3) + V_3\cos A_2\,] +$$

$$\sin\phi\cdot[\, V_1\sin A_3 + V_2\sin(A_2 - A_3) - V_3\sin A_2\,] = 0$$

令 $$p_2 = V_1\cos A_3 - V_2\cos(A_2 - A_3) + V_3\cos A_2$$

$$q_2 = V_1\sin A_3 + V_2\sin(A_2 - A_3) - V_3\sin A_2$$

$$\Rightarrow \quad V_4 + p_2\cdot\cos\phi + q_2\cdot\sin\phi = 0 \qquad (*3)$$

[3] 將 $V_1\sin A_1 - V_2\sin(A_1 + A_2) + V_3\sin(A_1 + A_2 + A_3) = 0$ ，作角度轉換；

得 $$V_1\sin(\pi + \phi - A_3) - V_2\sin(\pi + \phi - A_3 + A_2) + V_3\sin(\pi + \phi + A_2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin\phi\cdot[\, -V_1\cos A_3 + V_2\cos(A_2 - A_3) - V_3\cos A_2\,] +$$

$$\cos\phi\cdot[\, V_1\sin A_3 + V_2\sin(A_2 - A_3) - V_3\sin A_2\,] = 0$$

$$\Rightarrow \quad -p_2\cdot\sin\phi + q_2\cdot\cos\phi = 0 \qquad (*4)$$

[4] 將方程式 (*3)式與(*4)式聯立解出，得； $p_2 = -V_4\cos\phi = V_4\cos(A_1 + A_3)$

$$\Rightarrow \quad V_1\cos A_3 - V_2\cos(A_2 - A_3) + V_3\cos A_2 = V_4\cos(A_1 + A_3) \qquad (6)$$

及 $$q_2 = -V_4\sin\phi = V_4\sin(A_1 + A_3)$$

$$\Rightarrow \quad V_1\sin A_3 + V_2\sin(A_2 - A_3) - V_3\sin A_2 = V_4\sin(A_1 + A_3) \qquad (7)$$

方程式(7)式與(6)式即為平面凸四邊形的 SASAS 正弦型、餘弦型方程式。

[5] 如果平面凸四邊形內接於一圓成為圓內接四邊形，同圖 1.，由於引理 4.圓內接偶數邊數多邊形的頂角組合，得； $A_1+A_3=\pi=A_2+A_4$ 方程式(7)式與(6)式即化簡成為；

$$V_1\sin A_3+V_2\sin(A_2-A_3)-V_3\sin A_2=0$$

與 $$V_1\cos A_3-V_2\cos(A_2-A_3)+V_3\cos A_2=-V_4 \qquad (8)$$

方程式(8)式即為圓內接四邊形的 SASAS 正弦型、餘弦型方程式組。
方程式(7)式與(6)式完全涵蓋了方程式(8)式組。

C. 平面凸五邊形的 SASAS 正弦型、餘弦型方程式

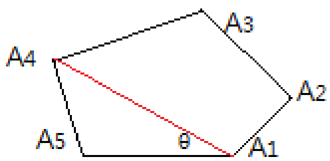

圖 8

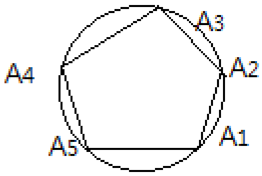

圖 9

證明：見圖 8.的平面凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，連接對角線長 $\overline{A_1A_4}=d_{14}$，先取其中部份平面凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，其第 4 邊長為 d_{14}，第 1 頂角為 $A_1-\theta$，則

[1] 應用(7)式，得； $V_1\sin A_3+V_2\sin(A_2-A_3)-V_3\sin A_2=d_{14}\sin(A_1-\theta+A_3)$

$=d_{14}\sin(A_1+A_3)\cos\theta-d_{14}\cos(A_1+A_3)\sin\theta$ ，對圖 8.的三角形 $A_1A_4A_5$ 言，有

$d_{14}\cos\theta=V_5+V_4\cos(\pi-A_5)=V_5-V_4\cos A_5$ 與 $d_{14}\sin\theta=V_4\sin A_5$ ，則

$$d_{14}\sin(A_1+A_3)\cos\theta-d_{14}\cos(A_1+A_3)\sin\theta=V_5\sin(A_1+A_3)-V_4\sin(A_1+A_3+A_5)$$

$$=V_5\sin(A_1+A_3)-V_4\sin(A_2+A_4)$$

$$\Rightarrow V_1\sin A_3+V_2\sin(A_2-A_3)-V_3\sin A_2=V_5\sin(A_1+A_3)-V_4\sin(A_2+A_4) \qquad (9)$$

[2] 應用(6)式，得； $V_1\cos A_3-V_2\cos(A_2-A_3)+V_3\cos A_2=d_{14}\cos(A_1-\theta+A_3)$，仿效

上述運算，展開，代入，整理，合併，再角度變換，最後得；

$$V_1 \cos A_3 - V_2 \cos(A_2 - A_3) + V_3 \cos A_2 = V_5 \cos(A_1 + A_3) + V_4 \cos(A_2 + A_4) \qquad (10)$$

方程式(9)式與(10)式即為平面凸五邊形的 SASAS 正弦型、餘弦型方程式。

[3] 如果平面凸五邊形內接於一圓成為圓內接五邊形，見上圖 9.，則由(9)式與(1-1)式的相互依附關係，代入整理成； $0 = V_5 \sin(A_1 + A_3) - V_4 \sin(A_2 + A_4)$

$\Rightarrow \dfrac{V_4}{\sin(A_1 + A_3)} = \dfrac{V_5}{\sin(A_2 + A_4)}$，間接地又可證出另 3 個邊長關係而得下式；

$$\frac{V_1}{\sin(A_3 + A_5)} = \frac{V_2}{\sin(A_4 + A_1)} = \frac{V_3}{\sin(A_5 + A_2)} = \frac{V_4}{\sin(A_1 + A_3)} = \frac{V_5}{\sin(A_2 + A_4)} \qquad (11)$$

方程式(11)式即為圓內接五邊形的正弦定理！對比於方程式(3)式完全同類型。

D. 平面凸六邊形的 SASAS 正弦型、餘弦型方程式

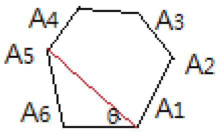

圖 10

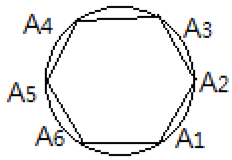

圖 11

證明：見圖 10.的平面凸六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，連接對角線長 $\overline{A_1A_5} = d_{15}$，先取其中部份平面凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，其第 5 邊長為 d_{15}，第 1 頂角為 $A_1 - \theta$，則

[1] 應用平面凸五邊形正弦型方程式(9)式，代入 d_{15}與第 1 頂角 $A_1 - \theta$，得；

$$V_1 \sin A_3 + V_2 \sin(A_2 - A_3) - V_3 \sin A_2 = d_{15} \sin(A_1 - \theta + A_3) - V_4 \sin(A_2 + A_4)$$

$$= d_{15} \sin(A_1 + A_3)\cos\theta - d_{15} \cos(A_1 + A_3)\sin\theta - V_4 \sin(A_2 + A_4)$$

由 $d_{15} \cos\theta = V_6 + V_5 \cos(\pi - A_6) = V_6 - V_5 \cos A_6$ 與 $d_{15} \sin\theta = V_5 \sin A_6$，則

$$d_{15} \sin(A_1 - \theta + A_3) = V_6 \sin(A_1 + A_3) - V_5 \sin(A_1 + A_3 + A_6) \qquad \Rightarrow$$

$$V_1 \sin A_3 + V_2 \sin(A_2 - A_3) - V_3 \sin A_2 = V_6 \sin(A_1 + A_3) + V_5 \sin(A_2 + A_4 + A_5) - V_4 \sin(A_2 + A_4) \quad (12)$$

[2] 應用(10)式並仿效上述運算，展開，整理，合併，再角度變換，得；

$$V_1 \cos A_3 - V_2 \cos(A_2 - A_3) + V_3 \cos A_2 = V_6 \cos(A_1 + A_3) - V_5 \cos(A_2 + A_4 + A_5) + V_4 \cos(A_2 + A_4) \quad (13)$$

方程式(12)式與(13)式即為平面凸六邊形的 SASAS 正弦型、餘弦型方程式。

[3] 如果平面凸六邊形內接於一圓成為圓內接六邊形，見上圖 11.，則由(12)式可得

$$V_1 \sin A_3 + V_2 \sin(A_2 - A_3) - V_3 \sin A_2 = 0 \quad \text{且}$$

$$V_6 \sin(A_1 + A_3) + V_5 \sin(A_2 + A_4 + A_5) - V_4 \sin(A_2 + A_4) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-V_6 \sin A_5 + V_5 \sin(A_2 + A_4 + A_5) - V_4 \sin(A_2 + A_4) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$V_5 \sin(A_2 + A_4 + A_5) = V_4 \sin(A_2 + A_4) + V_6 \sin A_5 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\sin(A_2 + A_4 + A_5)}{V_6 V_4} = \frac{\sin(A_2 + A_4)}{V_6 V_5} + \frac{\sin A_5}{V_4 V_5} \quad (14)$$

方程式(14)式是圓內接六邊形的另一類正弦特徵分式型，這類型計有 6 方程式為一組，對照(1-2)式與(4-1)式，(14)式組是圓內接六邊形圖形內 3 個連續相鄰邊長所具有的特徵型；式中出現的頂角數及等式右側項數均以加法呈現，別具意義。

E. 平面凸七邊形的 SASAS 正弦型、餘弦型方程式

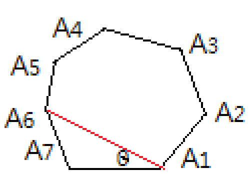

圖 12

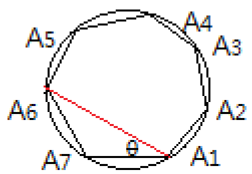

圖 13

證明：見圖 12.的平面凸七邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$，對角線長 $\overline{A_1A_6} = d_{16}$，先取其中部份凸六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，其第 6 邊長為 d_{16}，第 1 頂角為 $A_1 - \theta$，則

[1] 應用平面凸六邊形正弦型方程式(12)式，代入 d_{16}與第 1 頂角 $A_1 - \theta$，得；

$$V_1 \sin A_3 + V_2 \sin(A_2 - A_3) - V_3 \sin A_2$$

$$= d_{16} \sin(A_1 - \theta + A_3) + V_5 \sin(A_2 + A_4 + A_5) - V_4 \sin(A_2 + A_4)$$

$$= d_{16} \sin(A_1 + A_3)\cos\theta - d_{16} \cos(A_1 + A_3)\sin\theta + V_5 \sin(A_2 + A_4 + A_5) - V_4 \sin(A_2 + A_4)$$

由 $d_{16} \cos\theta = V_7 + V_6 \cos(\pi - A_7) = V_7 - V_6 \cos A_7$ 與 $d_{16} \sin\theta = V_6 \sin A_7$ ，

則 $V_1 \sin A_3 + V_2 \sin(A_2 - A_3) - V_3 \sin A_2$

$$= V_7 \sin(A_1 + A_3) - V_6 \sin(A_1 + A_3 + A_7) + V_5 \sin(A_2 + A_4 + A_5) - V_4 \sin(A_2 + A_4)$$

$$\Rightarrow V_1 \sin A_3 + V_2 \sin(A_2 - A_3) - V_3 \sin A_2$$

$$= V_7 \sin(A_1 + A_3) - V_6 \sin(A_2 + A_4 + A_5 + A_6) + V_5 \sin(A_2 + A_4 + A_5) - V_4 \sin(A_2 + A_4) \quad (15)$$

同理，應用(13)式並仿效上述運算，展開，整理，合併，再角度變換，得；

$$V_1 \cos A_3 - V_2 \cos(A_2 - A_3) + V_3 \cos A_2$$

$$= V_7 \cos(A_1 + A_3) + V_6 \cos(A_2 + A_4 + A_5 + A_6) - V_5 \cos(A_2 + A_4 + A_5) + V_4 \cos(A_2 + A_4) \quad (16)$$

方程式(15)式與(16)式即為平面凸七邊形的 SASAS 正弦型、餘弦型方程式。

[2] 如果平面凸七邊形內接於一圓成為圓內接七邊形，見上圖 13.，則先取其中部份六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，其第 6 邊長為 d_{16}，第 1 頂角為 $A_1 - \theta$，由(12)式得

$$V_1 \sin A_3 + V_2 \sin(A_2 - A_3) - V_3 \sin A_2$$

$$= d_{16} \sin(A_1 - \theta + A_3) + V_5 \sin(A_2 + A_4 + A_5) - V_4 \sin(A_2 + A_4) \quad (*5)$$

比較方程式(15)式與(*5)式兩者，必可得下列關係式；

$$V_7 \sin(A_1 + A_3) - V_6 \sin(A_2 + A_4 + A_5 + A_6) = d_{16} \sin(A_1 - \theta + A_3) \quad (H1)$$

對此部份圓內接六邊形言，$A_1-\theta+A_3+A_5=2\pi$ ，則 (H1)式轉化成下式；

$$V_7\sin(A_1+A_3)-V_6\sin(A_2+A_4+A_5+A_6)=-d_{16}\sin A_5 \tag{H2}$$

見圖 14.，角度 $u=A_6-\angle A_5A_6A_1=A_6-(2\pi-A_2-A_4)=(A_2+A_4+A_6)-2\pi$ ，

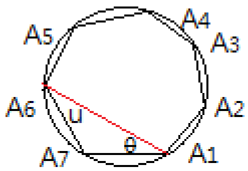

圖 14

同理， $\theta=(A_1+A_3+A_5)-2\pi$ ，再由 $d_{16}=V_6\cos u+V_7\cos\theta \Rightarrow$
$d_{16}=V_6\cos u+V_7\cos\theta=V_6\cos(A_2+A_4+A_6)+V_7\cos(A_1+A_3+A_5)$ 代入(H2)式，
得； $V_7\sin(A_1+A_3)-V_6\sin(A_2+A_4+A_5+A_6)$
$=-\sin A_5\cdot[V_6\cos(A_2+A_4+A_6)+V_7\cos(A_1+A_3+A_5)]$
$\Rightarrow\ V_7\sin[(A_1+A_3+A_5)-A_5]-V_6\sin[(A_2+A_4+A_6)+A_5]$
$=-\sin A_5\cdot[V_6\cos(A_2+A_4+A_6)+V_7\cos(A_1+A_3+A_5)]$ ，展開，化簡整理，
$\Rightarrow\ V_7\sin(A_1+A_3+A_5)-V_6\sin(A_2+A_4+A_6)=0$
$\Rightarrow\ \dfrac{V_6}{\sin(A_1+A_3+A_5)}=\dfrac{V_7}{\sin(A_2+A_4+A_6)}$ ，又可證出另 5 邊長關係而得下式；

$$\frac{V_1}{\sin(A_3+A_5+A_7)}=\frac{V_2}{\sin(A_4+A_6+A_1)}=\frac{V_3}{\sin(A_5+A_7+A_2)}=\frac{V_4}{\sin(A_6+A_1+A_3)}=$$
$$\frac{V_5}{\sin(A_7+A_2+A_4)}=\frac{V_6}{\sin(A_1+A_3+A_5)}=\frac{V_7}{\sin(A_2+A_4+A_6)} \tag{17}$$

方程式(17)式為圓內接七邊形的正弦定理！對比於(11)式與(3)式完全同類型。

[3] 對圓內接七邊形言，因為； $V_1\sin A_3+V_2\sin(A_2-A_3)-V_3\sin A_2=0$ 由(15)式得；

$$V_7\sin(A_1+A_3)-V_6\sin(A_2+A_4+A_5+A_6)+V_5\sin(A_2+A_4+A_5)-V_4\sin(A_2+A_4)=0$$

$$\Rightarrow\ V_4\sin(A_2+A_4)+V_6\sin(A_2+A_4+A_5+A_6)$$

$$=V_5\sin(A_2+A_4+A_5)+V_7\sin(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7) \tag{18-4}$$

方程式(18-4)式為圓內接七邊形圖形中的任意四個連續相鄰邊長所特別建立的新穎四項式正弦型方程式。這類型方程式計有 7 個成為一組。仿效(18-4)式將式中各個邊長與頂角的下標記號數同步變換加或減一個數，如同步變換加 1 或是變換減 3，即可獲得同類型的其它方程式。例如變換減 3 後所得出的下列第一式；

$$V_1\sin(A_6+A_1)+V_3\sin(A_6+A_1+A_2+A_3)$$

$$=V_2\sin(A_6+A_1+A_2)+V_4\sin(A_6+A_1+A_2+A_3+A_4) \tag{18-1}$$

檢視對照這類型方程式，每一方程式的內涵結構皆極具有變換規律性。

F. 平面凸八邊形的 SASAS 正弦型、餘弦型方程式

[1] 同理，仿效上述平面凸五邊形、六邊形、七邊形的證明過程，對八邊形做同樣的演繹操作運算，見下圖 15.，必可得下列結果；

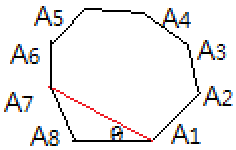

圖 15

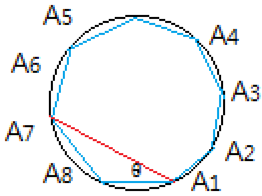

圖 16

$$V_1\sin A_3+V_2\sin(A_2-A_3)-V_3\sin A_2$$

$$=V_8\sin(A_1+A_3)+V_7\sin(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7)-V_6\sin(A_2+A_4+A_5+A_6)+$$

$$V_5\sin(A_2+A_4+A_5)-V_4\sin(A_2+A_4) \tag{19}$$

$$V_1\cos A_3-V_2\cos(A_2-A_3)+V_3\cos A_2=$$

$$V_8\cos(A_1+A_3)-V_7\cos(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7)+V_6\cos(A_2+A_4+A_5+A_6)$$

$$-V_5\cos(A_2+A_4+A_5)+V_4\cos(A_2+A_4) \tag{20}$$

方程式(19)式與(20)式即為平面凸八邊形的 SASAS 正弦型、餘弦型方程式。

[2] 如果平面凸八邊形內接於一圓成為圓內接八邊形，見上圖 16.，則(19)式 ⇒

$$V_8\sin(A_1+A_3)+V_7\sin(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7)-V_6\sin(A_2+A_4+A_5+A_6)+$$

$$V_5\sin(A_2+A_4+A_5)-V_4\sin(A_2+A_4)=0 \qquad \Rightarrow$$

$$V_4\sin(A_2+A_4)+V_6\sin(A_2+A_4+A_5+A_6)-V_8\sin(A_1+A_3)=V_5\sin(A_2+A_4+A_5)$$

$$+V_7\sin(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7) \qquad \Rightarrow$$

$$V_4\sin(A_2+A_4)+V_6\sin(A_2+A_4+A_5+A_6)+V_8\sin(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7+A_8)$$

$$=V_5\sin(A_2+A_4+A_5)+V_7\sin(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7) \tag{21-4}$$

仿效(21-4)式的內涵型式同步變換其下標記號數，同步變換減 3 後，得下式；

$$V_1\sin(A_7+A_1)+V_3\sin(A_7+A_1+A_2+A_3)+V_5\sin(A_7+A_1+A_2+A_3+A_4+A_5)$$

$$=V_2\sin(A_7+A_1+A_2)+V_4\sin(A_7+A_1+A_2+A_3+A_4) \tag{21-1}$$

方程式(21-1)式、(21-4)式為圓內接八邊形的五項式正弦型方程式。這類型方程式計有 8 個成為一組，每一方程式的內涵結構皆極具有變換規律性。

G. 接下來，要以最典雅完備的數學歸納法來推證出平面凸 n 邊形的 SASAS 正弦型、餘弦型方程式；

[1] 令 $n=k\geq 9$ 時，下列的 SASAS 正弦型方程式(22)式成立；設 k 為奇數，

$$V_1\sin A_3+V_2\sin(A_2-A_3)-V_3\sin A_2=V_k\sin(A_1+A_3)-V_{k-1}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{k-1}A_i)+$$
$$V_{k-2}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{k-2}A_i)-V_{k-3}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{k-3}A_i)+\cdots+V_7\sin(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7)-$$
$$V_6\sin(A_2+A_4+A_5+A_6)+V_5\sin(A_2+A_4+A_5)-V_4\sin(A_2+A_4) \tag{22}$$

若 k 為偶數，下列的 SASAS 正弦型方程式(23)式成立；

$$V_1\sin A_3+V_2\sin(A_2-A_3)-V_3\sin A_2=V_k\sin(A_1+A_3)+V_{k-1}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{k-1}A_i)-$$
$$V_{k-2}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{k-2}A_i)+V_{k-3}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{k-3}A_i)-\cdots+V_7\sin(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7)-$$
$$V_6\sin(A_2+A_4+A_5+A_6)+V_5\sin(A_2+A_4+A_5)-V_4\sin(A_2+A_4) \tag{23}$$

此處僅對 k 為奇數情形(22)式作推理證明，因 k 為奇、偶數證明流程完全相同。

[2] 當 $n=k+1$，見圖 17.的平面凸 $(k+1)$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_{k-1}A_kA_{k+1}$，對角線長 $\overline{A_1A_k}=d_{1k}$，先取其中部份凸 k 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k$，其第 k 邊長為 d_{1k}，其第 1 頂角為 $A_1-\theta$，則應用方程式(22)式必可得下列方程式(*6)式結果；

$$V_1\sin A_3+V_2\sin(A_2-A_3)-V_3\sin A_2=d_{1k}\sin(A_1+A_3-\theta)-V_{k-1}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{k-1}A_i)+V_{k-2}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{k-2}A_i)-V_{k-3}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{k-3}A_i)+\cdots+V_7\sin(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7)-V_6\sin(A_2+A_4+A_5+A_6)+V_5\sin(A_2+A_4+A_5)-V_4\sin(A_2+A_4) \quad (*22)$$

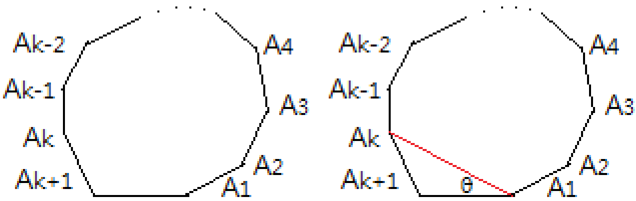

圖 17

由 $d_{1k}\cos\theta=V_{k+1}+V_k\cos(\pi-A_{k+1})=V_{k+1}-V_k\cos A_{k+1}$ 與 $d_{1k}\sin\theta=V_k\sin A_{k+1}$，

則由 $d_{1k}\sin(A_1+A_3-\theta)=d_{1k}\sin(A_1+A_3)\cos\theta-d_{1k}\cos(A_1+A_3)\sin\theta$

$$=V_{k+1}\sin(A_1+A_3)-V_k\sin(A_1+A_3+A_{k+1})$$

$$=V_{k+1}\sin(A_1+A_3)+V_k\sin(A_2+\sum_{i=4}^{k}A_i)$$ 代入(*22)式，得；

$$V_1\sin A_3+V_2\sin(A_2-A_3)-V_3\sin A_2=V_{k+1}\sin(A_1+A_3)+V_k\sin(A_2+\sum_{i=4}^{k}A_i)-V_{k-1}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{k-1}A_i)+V_{k-2}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{k-2}A_i)-V_{k-3}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{k-3}A_i)+\cdots+V_7\sin(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7)-V_6\sin(A_2+A_4+A_5+A_6)+V_5\sin(A_2+A_4+A_5)-V_4\sin(A_2+A_4) \quad (24)$$

先來比對(24)式與(22)式，知(24)式比(22)式中的各對應項多出了一項，且由於 k 為奇數， $k+1$ 為偶數，現在特將偶數項數的方程式(24)式再重新敘述改寫如下；

$$V_1\sin A_3+V_2\sin(A_2-A_3)-V_3\sin A_2=V_{k+1}\sin(A_1+A_3)+V_{(k+1)-1}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{(k+1)-1}A_i)-V_{(k+1)-2}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{(k+1)-2}A_i)+V_{(k+1)-3}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{(k+1)-3}A_i)-\cdots+V_7\sin(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7)-V_6\sin(A_2+A_4+A_5+A_6)+V_5\sin(A_2+A_4+A_5)-V_4\sin(A_2+A_4) \quad (*24)$$

詳盡比對偶數項數的(*24)式與(23)式，很清楚地知悉兩方程式的型態結構完全相同；

這樣就證明了只要(23)式成立可以推導出方程式(*24)式與(24)式也成立。

從上述嚴謹證明過程的 A.開始到 G.獲得(*24)式，顯示了完整的數學歸納法證明完成，即先證明 $n=4$、5、6、7、8 時，方程式(22)式、(23)式成立，再假設此 $n=k$，$k\geq 9$ 時，方程式(22)式、(23)式成立，而繼續再證明當 $n=k+1$，方程式(22)式、(23)式亦順勢推理成立。 所以，對於整體任意自然數 n，$n\geq 4$，下列兩方程式(25)式、(26)式均自然完全成立。 設 n 為奇數，

$$V_1\sin A_3+V_2\sin(A_2-A_3)-V_3\sin A_2=V_n\sin(A_1+A_3)-V_{n-1}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{n-1}A_i)+$$
$$V_{n-2}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{n-2}A_i)-V_{n-3}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{n-3}A_i)+\cdots+V_7\sin(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7)-$$
$$V_6\sin(A_2+A_4+A_5+A_6)+V_5\sin(A_2+A_4+A_5)-V_4\sin(A_2+A_4) \tag{25}$$

若 n 為偶數，下列的 SASAS 正弦型方程式(26)式成立；

$$V_1\sin A_3+V_2\sin(A_2-A_3)-V_3\sin A_2=V_n\sin(A_1+A_3)+V_{n-1}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{n-1}A_i)-$$
$$V_{n-2}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{n-2}A_i)+V_{n-3}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{n-3}A_i)-\cdots+V_7\sin(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7)-$$
$$V_6\sin(A_2+A_4+A_5+A_6)+V_5\sin(A_2+A_4+A_5)-V_4\sin(A_2+A_4) \tag{26}$$

方程式(25)式與(26)式即為平面凸 n 邊形的 SASAS 正弦型方程式。

[3] 同理，仿效上述 n 邊形的正弦型方程式證明過程可得下列餘弦型方程式；設 n 為奇數，下列的 SASAS 餘弦型方程式(27)式成立；

$$V_1\cos A_3-V_2\cos(A_2-A_3)+V_3\cos A_2=V_n\cos(A_1+A_3)+V_{n-1}\cos(A_2+\sum_{i=4}^{n-1}A_i)-$$
$$V_{n-2}\cos(A_2+\sum_{i=4}^{n-2}A_i)+V_{n-3}\cos(A_2+\sum_{i=4}^{n-3}A_i)-\cdots-V_7\cos(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7)+$$
$$V_6\cos(A_2+A_4+A_5+A_6)-V_5\cos(A_2+A_4+A_5)+V_4\cos(A_2+A_4) \tag{27}$$

若 n 為偶數，下列的 SASAS 正弦型方程式(28)式成立；

$$V_1\cos A_3-V_2\cos(A_2-A_3)+V_3\cos A_2=V_n\cos(A_1+A_3)-V_{n-1}\cos(A_2+\sum_{i=4}^{n-1}A_i)+$$
$$V_{n-2}\cos(A_2+\sum_{i=4}^{n-2}A_i)-V_{n-3}\cos(A_2+\sum_{i=4}^{n-3}A_i)+\cdots-V_7\cos(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7)+$$
$$V_6\cos(A_2+A_4+A_5+A_6)-V_5\cos(A_2+A_4+A_5)+V_4\cos(A_2+A_4) \tag{28}$$

方程式(27)式與(28)式即為平面凸 n 邊形的 SASAS 餘弦型方程式。

[4] 如果平面凸 n 邊形內接於一圓成為圓內接 n 邊形，見下圖 18、圖 19.，

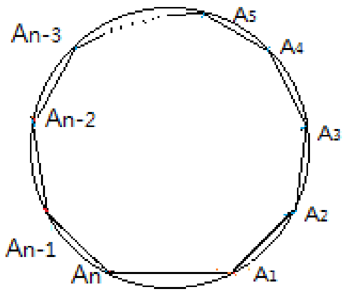

圖 18

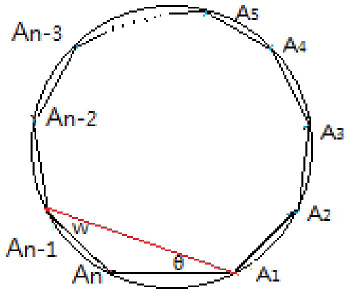

圖 19

[4a] 先取其中部份 $n-1$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_{n-2}A_{n-1}$，圖 19.，其第$(n-1)$邊長為 $d_{1(n-1)}$，第 1 頂角為 $A_1-\theta$，設 n 為奇數，則 $n-1$ 為偶數，參考(26)式得下式；

$$V_1\sin A_3+V_2\sin(A_2-A_3)-V_3\sin A_2=d_{1(n-1)}\sin(A_1+A_3-\theta)+V_{n-2}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{n-2}A_i)$$

$$-V_{n-3}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{n-3}A_i)+\cdots+V_7\sin(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7)-$$

$$V_6\sin(A_2+A_4+A_5+A_6)+V_5\sin(A_2+A_4+A_5)-V_4\sin(A_2+A_4) \tag{*7}$$

現在比較方程式(25)式與(*7)式兩者，必可得下列關係式；

$$V_n\sin(A_1+A_3)-V_{n-1}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{n-1}A_i)=d_{1(n-1)}\sin(A_1+A_3-\theta) \tag{P1}$$

對部份圓內接 $n-1$ 邊形言，($A_1-\theta$) $+\sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}}A_{2i+1}=(\frac{n-3}{2})\pi$ ，則(P1)式轉化成；

$$V_n\sin(A_1+A_3)-V_{n-1}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{n-1}A_i)=d_{1(n-1)}\cdot[-\sin(\sum_{i=2}^{\frac{n-3}{2}}A_{2i+1})]\cdot\cos[(\frac{n-3}{2})\pi]$$

再看圖 19.，由 $\theta=A_1+\sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}}A_{2i+1}-(\frac{n-3}{2})\pi$ ，$w=\sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}}A_{2i}+A_{n-1}-(\frac{n-3}{2})\pi$ ，

得 $d_{1(n-1)}=V_{n-1}\cos\left[\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}A_{2i}\right]\cdot\cos(\frac{n-3}{2})\pi+V_n\cos\left[A_1+\sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}}A_{2i+1}\right]\cdot\cos(\frac{n-3}{2})\pi$

$$\Rightarrow V_n\sin(A_1+A_3)-V_{n-1}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{n-1}A_i)=\{V_{n-1}\cos\left[A_{n-1}+\sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}}A_{2i}\right]\cdot\cos(\frac{n-3}{2})\pi$$

$$+V_n\cos\left[A_1+\sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}}A_{2i+1}\right]\cdot\cos(\frac{n-3}{2})\pi\}\cdot[-\sin(\sum_{i=2}^{\frac{n-3}{2}}A_{2i+1})]\cdot\cos[(\frac{n-3}{2})\pi]$$

$$\Rightarrow V_n\sin(A_1+A_3)-V_{n-1}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{n-1}A_i)=-V_{n-1}\sin(\sum_{i=2}^{\frac{n-3}{2}}A_{2i+1})\cdot\cos\left[A_{n-1}+\sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}}A_{2i}\right]$$

$$-V_n\sin(\sum_{i=2}^{\frac{n-3}{2}}A_{2i+1})\cdot\cos\left[A_1+\sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}}A_{2i+1}\right]$$

$$\Rightarrow V_n \sin[(A_1 + A_3 + \sum_{i=2}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i+1}) - \sum_{i=2}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i+1}] - V_{n-1} \sin[(\sum_{i=2}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i+1}) + \left[A_{n-1} + \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i}\right]]$$

$$= -V_{n-1} \sin(\sum_{i=2}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i+1}) \cdot \cos\left[A_{n-1} + \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i}\right] - V_n \sin(\sum_{i=2}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i+1}) \cdot \cos\left[A_1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i+1}\right]$$

展開上式等號左側的V_n與V_{n-1}所引導的 sin 兩項，然後全式化簡整理，得；

$$V_n \sin(A_1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i+1}) \cos(\sum_{i=2}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i+1}) - V_{n-1} \sin\left[A_{n-1} + \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i}\right] \cos(\sum_{i=2}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i+1}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad V_n \sin(A_1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i+1}) = V_{n-1} \sin\left[A_{n-1} + \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{V_{n-1}}{\sin[A_1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i+1}]} = \frac{V_n}{\sin[\sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i} + A_{n-1}]} \qquad (29)$$

(29)式的等比例數值須另採以下方法求得； n為奇數，則 $n-1$為偶數，先取部份 $n-1$邊形 $A_1A_2\cdots A_{n-2}A_{n-1}$，圖 19.，其第 1 頂角為 $A_1-\theta$，第 $(n-1)$頂角為 $A_{n-1}-w$，此偶數邊數 $n-1$邊形其 2 組相異頂角和必分別具有下列關係式；

$$(A_1-\theta) + \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i+1} = (\frac{n-3}{2})\pi \quad 與 \quad \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i} + (A_{n-1}-w) = (\frac{n-3}{2})\pi \quad \Rightarrow$$

$$\theta = A_1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i+1} - (\frac{n-3}{2})\pi \quad , \quad w = \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i} + A_{n-1} - (\frac{n-3}{2})\pi \quad ,$$

再看圖 19.的 $\Delta A_1A_{n-1}A_n$，由其正弦定理知； $\frac{V_{n-1}}{\sin\theta} = \frac{V_n}{\sin w} = 2R \quad \Rightarrow$

$$\frac{V_{n-1}}{\sin[A_1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i+1}] \cdot \cos[(\frac{n-3}{2})\pi]} = \frac{V_n}{\sin[\sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i} + A_{n-1}] \cdot \cos[(\frac{n-3}{2})\pi]} = 2R \quad \Rightarrow$$

R為外接圓半徑，因 $n-3$為偶數，使 $(n-3)/2$ 可能為奇數或偶數；當 n=3、7、11、15、… 、$4k-1$ ， $\cos[(\frac{n-3}{2})\pi] = 1$ ，當 n=5、9、13、17、…、$4k+1$ ， $\cos[(\frac{n-3}{2})\pi] = -1$ ，故整合此兩結果為； $\cos[(\frac{n-3}{2})\pi] = (-1)^{\frac{n+1}{2}}$ $\Rightarrow$ 得；

$$\frac{V_{n-1}}{\sin[A_1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i+1}]} = \frac{V_n}{\sin[\sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} A_{2i} + A_{n-1}]} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot 2R \qquad (29)$$

方程式(29)式為圓內接奇數邊數多邊形正弦定理的 2 項代表示。其餘各項均可按各

個邊長與頂角的下標記號數同步變換加或減一個數而求得。

[4b] 當 n 為奇數，方程式(25)式等號右側必為 0，再將偶數標記號全移至左側，得；

$$V_4\sin(A_2+A_4)+V_6\sin(A_2+A_4+A_5+A_6)+\ \cdots\ +V_{n-3}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{n-3}A_i)+$$
$$V_{n-1}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{n-1}A_i)=V_5\sin(A_2+A_4+A_5)+V_7\sin(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7)+\ \cdots\ +$$
$$V_{n-2}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{n-2}A_i)+V_n\sin(A_2+\sum_{i=4}^{n}A_i) \tag{30}$$

同理，當 n 為偶數，方程式(26)式等號右側必為 0，(26)式變化成；

$$V_4\sin(A_2+A_4)+V_6\sin(A_2+A_4+A_5+A_6)+\ \cdots\ +V_{n-2}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{n-2}A_i)+$$
$$V_n\sin(A_2+\sum_{i=4}^{n}A_i)=V_5\sin(A_2+A_4+A_5)+V_7\sin(A_2+A_4+A_5+A_6+A_7)+\ \cdots\ +$$
$$V_{n-3}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{n-3}A_i)+V_{n-1}\sin(A_2+\sum_{i=4}^{n-1}A_i) \tag{31}$$

將(30)式、(31)式統一合併成一般化正整數型態，無論奇數或偶數，得下式；

$$V_4\sin(A_2+A_4)+\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2n-9+(-1)^n]}V_{2i+4}\sin[A_2+A_4+\sum_{j=1}^{i}(A_{2j+3}+A_{2j+4})]$$

$$=V_5\sin(A_2+A_4+A_5)+\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2n-11-(-1)^n]}V_{2i+5}\sin[A_2+A_4+A_5+\sum_{j=1}^{i}(A_{2j+4}+A_{2j+5})]$$

$$,\quad n\geq 5 \tag{32}$$

同理，再按各邊長與頂角的下標記號數同步變換減 3 後而得出的下列第一式；

$$V_1\sin(A_{(n-1)}+A_1)+\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2n-9+(-1)^n]}V_{2i+1}\sin[A_{(n-1)}+A_1+\sum_{j=1}^{i}(A_{2j}+A_{2j+1})]$$

$$=\ V_2\sin(A_{(n-1)}+A_1+A_2)+$$

$$\sum_{i=1}^{\frac{1}{4}[2n-11-(-1)^n]}V_{2i+2}\sin[A_{(n-1)}+A_1+A_2+\sum_{j=1}^{i}(A_{2j+1}+A_{2j+2})]\quad,\ n\geq 5 \tag{33}$$

方程式(32)式、(33)式為圓內接多邊形新發現的有規律邊長、角度分佈關係的 2 個代表示。其等號兩側項數意義分別各為純奇數標記號數邊長的加法組合恰等於純偶數標記號數邊長的加法組合，奇數、偶數標記號數邊長互不摻合。

綜合以上所有演繹論述過程已嚴謹完成平面凸多邊形 SASAS 方程式的證明。

參、結論

1. 這類型態方程式原本靜謐的沉潛於多邊形圖形中，毫不顯眼，默默無聞。當第一次發現到 **SASAS** 正弦型方程式是在圓內接四邊形中意會到的，後來在所有圓內接多邊形圖形中更是見到它的普遍性存在，然而進一步地也適時應用到頂角角度轉換修正參數法，因而發現可以按序在一般形的平面凸多邊形中陸續推廣引介並證明出正弦型及餘

弦型方程式。

2. 這 **SASAS** 方程式在邊數少的多邊形中所顯現的精緻內涵印象令人深刻難忘，例如；三角形裡的(1-2)式與(4-1)式兩式恰形成有趣的對比，其型態對照如下；

$$\frac{\sin(A_2 - A_3)}{V_1V_3} = \frac{\sin A_2}{V_1V_2} - \frac{\sin A_3}{V_2V_3} \quad 與 \quad \frac{\cos(A_2 - A_3)}{V_1V_3} = \frac{\cos A_2}{V_1V_2} + \frac{\cos A_3}{V_2V_3}$$

平面凸四邊形所呈現的正弦型及餘弦型方程式為下列兩相對應結構方程式；

$$V_1 \sin A_3 + V_2 \sin(A_2 - A_3) - V_3 \sin A_2 = V_4 \sin(A_1 + A_3)$$

與 $$V_1 \cos A_3 - V_2 \cos(A_2 - A_3) + V_3 \cos A_2 = V_4 \cos(A_1 + A_3)$$

平面凸五邊形的下列(9)式已然隱喻性的透露出圓內接五邊形的正弦定理公式。

$$V_1 \sin A_3 + V_2 \sin(A_2 - A_3) - V_3 \sin A_2 = V_5 \sin(A_1 + A_3) - V_4 \sin(A_2 + A_4) \tag{9}$$

平面凸五邊形的下列(10)式也間接道出了其與平面凸五邊形面積公式的關聯。

$$V_1 \cos A_3 - V_2 \cos(A_2 - A_3) + V_3 \cos A_2 = V_5 \cos(A_1 + A_3) + V_4 \cos(A_2 + A_4) \tag{10}$$

此關聯性須詳細參閱參考文獻中的第 3.件資料內五邊形面積部分。

3. 在推廣的 G.單元裡全盤以一般化形式證明出所有新穎的方程式，藉以提供並分享、宣揚 **SASAS** 方程式的廣泛美好應用。本文為自我發想的文創作品。

參考文獻

李輝濱。平面凸五邊形最大面積。**數學傳播季刊 144 期**，2012 年 12 月。
李輝濱。圓內接奇數邊數多邊形的正弦定理。**數學傳播季刊 148 期**，2013 年月。
李輝濱。預測與驗證平面凸多邊形面積公式。**科學教育月刊 398、399 期**，2017 年 5、6 月出版發行。
蔡聰明 (2010)。**數學拾貝---星空燦爛的數學**。三民書局。
黃武雄 (1980)。**中西數學簡史**。人間文化事業公司。
世部貞市郎 (1988)。**幾何學辭典**。九章出版社。
林聰源 (1995)。 **數學史----古典篇**。凡異出版社。
項武義 (2006)。**基礎幾何學**。五南圖書出版公司。
項武義 (2008)。**基礎分析學**。五南圖書出版公司。
E.W. Hobson (1957). *A treatise on plane and advanced trigonometry*. Dover.
Z.A. Melzek (1983). *Invitation to geometry*. John Wiley and Sons.