從一道等式的另證探討該等式的由來

連威翔

苗栗縣政府環保局安心即時上工計畫人員

壹、前言

在中山大學 2019 年春季的雙週一題徵答活動中，第六道徵答題如下：

第六題：證明對所有實數 x, z $(|x| < 1, |z| > 1)$

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} (1 + x^j) P_j = 0, \tag{1}$$

其中 P_j 為

$$\frac{(1-z)(1-zx)\dots(1-zx^{j-1})}{(z-x)(z-x^2)\dots(z-x^j)}.$$

此問題出處與解答，請參考[1]。

在[1]中的解法，是先參考(1)的左式假設級數 S_n 如下：

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \sum_{j=1}^{n} (1 + x^j) P_j \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{n} (1 + x^j) \frac{(1-z)(1-zx)\dots(1-zx^{j-1})}{(z-x)(z-x^2)\dots(z-x^j)}, \end{aligned} \tag{2}$$

並利用數學歸納法證明上述 S_n 滿足

$$S_n = \frac{(1-zx)(1-zx^2)\dots(1-zx^n)}{(z-x)(z-x^2)\dots(z-x^n)}. \tag{3}$$

接著，再利用 S_n 在(3)式中相對較簡單的寫法(相較於(2)式中的 S_n)，對存在某些正整數 n 使得 $S_n = 0$ 與不存在任何正整數 n 滿足 $S_n = 0$ 的兩種情況證明

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0,$$

即完成解答。其中，第一種情況較容易理解，而在第二種情況中，[1]中的解答利用當 $n \to \infty$ 時 $x^{n+1} \to 0$ 而得到底下的結果：

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{1 - zx^{n+1}}{z - x^{n+1}} \to \frac{1}{z}. \tag{4}$$

當[1]中的解答寫出上式之後，即以「因此藉由比例檢定可得知 $\lim\limits_{n\to 0} S_n = 0$」(註 1)這句話做

結，亦即引用比例檢定法來完成證明。底下第二節中，筆者將補充 $\lim_{n\to 0} S_n = 0$ 的一個直接證明供讀者參考。

此外，透過[1]中對(1)式的證明，我們知道(1)式這個極限式背後的意涵是當 n 趨近無窮大時，(3)式中的 S_n 之值會趨近於 0。而[1]中的證明得以完成的最大關鍵，是在(2)式的假設下證明(3)式成立，即證明底下的等式成立：

$$1+\sum_{j=1}^{n}(1+x^j)\frac{(1-z)(1-zx)\ldots(1-zx^{j-1})}{(z-x)(z-x^2)\ldots(z-x^j)} = \frac{(1-zx)(1-zx^2)\ldots(1-zx^n)}{(z-x)(z-x^2)\ldots(z-x^n)}, \tag{5}$$

其中 $n \geq 1, |x| < 1, |z| > 1$。

看過[1]中的解答後，筆者雖然知道(5)式成立，但對其由來並不十分明白，這使筆者產生了研究的動機，想對(5)式找出更有啟發性的另證。因此，接下來在底下的第三節與第四節中，筆者將依序介紹對自己對(5)式所找出的兩個另證。其中，在介紹完第一個另證之後，筆者也會對原徵答題的設計方式提出自己的看法。

貳、關於 $\lim_{n\to 0} S_n = 0$ 的證明補充

在第一節中的(4)式之前，我們對 S_n 所提到的第二種情況，是不存在任意正整數 n 滿足 $S_n = 0$ 的情況。底下，我們將針對此情況給出 $\lim_{n\to 0} S_n = 0$ 的詳細證明。首先，根據此情況當中對 S_n 之值的描述，我們知道對於任意大於 1 的正整數 n 而言，$\frac{S_n}{S_{n-1}}$ 均不為零，因此有

$$\left|\frac{S_n}{S_{n-1}}\right| > 0. \tag{6}$$

接著仿照(4)式的寫法，當 $n \to \infty$ 時我們有結果如下：

$$\frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{1-zx^n}{z-x^n} \to \frac{1}{z}\,. \tag{7}$$

觀察(7)式的結果，我們知道

$$\left|\frac{S_n}{S_{n-1}}\right| = \left|\frac{1-zx^n}{z-x^n}\right| \to \left|\frac{1}{z}\right|.$$

上式告訴我們對於任意正實數 ε 而言，存在與 ε 有關的正整數 N，使得當 $n > N$ 時，下式成立：

$$\left|\left|\frac{S_n}{S_{n-1}}\right| - \left|\frac{1}{z}\right|\right| < \varepsilon.$$

對於上式，我們取 $\varepsilon < 1 - \left|\frac{1}{z}\right|$。當 $n > N$ 時，由上式可知

$$-\varepsilon < \left|\frac{S_n}{S_{n-1}}\right| - \left|\frac{1}{z}\right| < \varepsilon,$$

所以有

$$\left|\frac{1}{z}\right| - \varepsilon < \left|\frac{S_n}{S_{n-1}}\right| < \left|\frac{1}{z}\right| + \varepsilon.$$

由原本 $|z| > 1$ 的條件知 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$，因為 $\varepsilon < 1 - \left|\frac{1}{z}\right|$，由上式右半邊可知

$$\left|\frac{S_n}{S_{n-1}}\right| < \left|\frac{1}{z}\right| + \varepsilon < \left|\frac{1}{z}\right| + 1 - \left|\frac{1}{z}\right| < 1. \tag{8}$$

令 $D = \left|\frac{1}{z}\right| + \varepsilon$，再以上式搭配(6)式，可知 $0 < \left|\frac{S_n}{S_{n-1}}\right| < D < 1$，因此有

$$0 < |S_n| < D|S_{n-1}|.$$

重複運用上式的推論方式，將上式繼續往右寫，可知當 $n > N$ 時，有

$$0 < |S_n| < D|S_{n-1}| < D^2|S_{n-2}| < \cdots < D^{n-N}|S_N|,$$

因此有

$$0 < |S_n| < D^{n-N}|S_N|. \tag{9}$$

因為 $0 < D < 1$，可知 $\lim_{n\to\infty} D^n = 0$，利用此結果，我們有

$$\lim_{n\to\infty}(D^{n-N}|S_N|) = \left(\lim_{n\to\infty} D^n\right) \times \frac{|S_N|}{D^N} = 0.$$

因此令 $n \to \infty$ 對(9)式取極限後，配合上式的結果，使用夾擠定理可知

$$\left|\lim_{n\to 0} S_n\right| = \lim_{n\to 0}|S_n| = 0.$$

這樣就得到 $\lim_{n\to 0} S_n = 0$ 的結果，證明完畢。

參、等式(5)的第一個另證

在我們學習級數的求和與化簡的歷程中，如果有看過底下這類級數的化簡過程，相信一定會留下很深的印象：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}. \tag{10}$$

注意上式計算的最後一個步驟消去了大部分的項，使得結尾處只留下兩項。像(10)式中所介紹的這類級數，在維基百科網頁[2]中稱其為 telescoping series，而在國家教育研究院(底

下簡稱國教院)的網頁[3]中將 telescoping series 翻譯為望遠鏡級數(或嵌入級數)，意思應是指「像望遠鏡一樣長度可以伸縮的級數」。注意在(10)式開頭處的級數共有 n 項，就像「伸長了的望遠鏡」；但到了(10)式結尾處的級數長度則「縮到最短」，只包含兩項。

等式(5)與望遠鏡級數：

筆者發現，在第一節最後所介紹的(5)式這個關鍵等式之所以成立，其實與望遠鏡級數(telescoping series)之化簡過程有關。怎麼說呢？請看底下筆者對(5)式的另證：

證明：觀察(5)左式之 Σ 求和式中的一般項，可發現它是個分式。當 $j \geq 2$ 時，我們可將該分式改寫如下：

$$(1+x^j)\frac{(1-z)(1-zx)\dots(1-zx^{j-1})}{(z-x)(z-x^2)\dots(z-x^j)}$$

$$=(1+x^j)(1-z)\frac{(1-zx)(1-zx^2)\dots(1-zx^{j-1})}{(z-x)(z-x^2)\dots(z-x^j)}$$

$$=[(1-zx^j)-(z-x^j)]\frac{(1-zx)(1-zx^2)\dots(1-zx^{j-1})}{(z-x)(z-x^2)\dots(z-x^j)}$$

$$=\frac{(1-zx)(1-zx^2)\dots(1-zx^j)}{(z-x)(z-x^2)\dots(z-x^j)}-\frac{(1-zx)(1-zx^2)\dots(1-zx^{j-1})}{(z-x)(z-x^2)\dots(z-x^{j-1})}, \tag{11}$$

其中實數 x,z 滿足 $|z|>1>|x|$。注意(11)式是說明在 $j \geq 2$ 的條件下對其開頭處的分式進行改寫後所得的結果，當我們對同一個分式取 $j=1$ 時，則有

$$(1+x^j)\frac{(1-z)(1-zx)\dots(1-zx^{j-1})}{(z-x)(z-x^2)\dots(z-x^j)}=(1+x)\frac{1-z}{z-x}=\frac{(1-zx)-(z-x)}{z-x}=\frac{1-zx}{z-x}-1. \tag{12}$$

注意對任意正整數 k，我們有

$$|z|>1>|x|^k=|x^k|,$$

因此 $z \neq x^k$，即 $z-x^k$ 非零，這表示在(11), (12)兩式中出現的各個分式的分母皆不為 0。

觀察(11), (12)兩式，可發現在(11)式的最後出現兩個同型項相減，這讓我們想起(10)式中所出現之第三個 Σ 求和式，其一般項也是 $\frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}$ 這兩個同型項相減。因此，若我們因應(11)式的結果定義符號 T_k 如下：

$$T_k=\frac{(1-zx)(1-zx^2)\dots(1-zx^k)}{(z-x)(z-x^2)\dots(z-x^k)}, \tag{13}$$

其中 k 為正整數，則(11)式的結果即可改寫成

$$(1+x^j)\frac{(1-z)(1-zx)\dots(1-zx^{j-1})}{(z-x)(z-x^2)\dots(z-x^j)}=T_j-T_{j-1}, \tag{14}$$

其中 $j\geq 2$；另一方面，我們也可將(12)式的結果改寫為

$$(1+x)\frac{1-z}{z-x}=\frac{1-zx}{z-x}-1=T_1-1. \tag{15}$$

接下來，我們把(5)左式之求和式中 $j=1$ 所對應的項單獨拿出來，並利用(14),(15)兩式化簡(5)的左式，計算過程如下：

$$\begin{aligned}
&1+\sum_{j=1}^{n}(1+x^j)\frac{(1-z)(1-zx)\dots(1-zx^{j-1})}{(z-x)(z-x^2)\dots(z-x^j)}\\
&=1+(1+x)\frac{1-z}{z-x}+\sum_{j=2}^{n}(1+x^j)\frac{(1-z)(1-zx)\dots(1-zx^{j-1})}{(z-x)(z-x^2)\dots(z-x^j)}\\
&=1+(T_1-1)+\sum_{j=2}^{n}\left(T_j-T_{j-1}\right)\\
&=T_1+T_n-T_1=T_n=\frac{(1-zx)(1-zx^2)\dots(1-zx^n)}{(z-x)(z-x^2)\dots(z-x^n)}.
\end{aligned} \tag{16}$$

上式的結果告訴我們(5)式成立，因此我們完成了對(5)式的另證，證明完畢。

使用 T_k 的新定義來改寫證明：

值得一提的是，筆者發現若在原本(13)式之 T_k 的定義中適當地新增對 T_0 的定義，則(16)式的推導過程還可再簡化。回顧(13)式，我們將 T_k 的定義修改為

$$T_k=\begin{cases}1, & k=0;\\ \dfrac{(1-zx)(1-zx^2)\dots(1-zx^k)}{(z-x)(z-x^2)\dots(z-x^k)}, & 1\leq k\leq n.\end{cases} \tag{17}$$

其中 k 為非負整數。有了上述的新定義後，即可將(15)式改寫為

$$(1+x)\frac{1-z}{z-x}=\frac{1-zx}{z-x}-1=T_1-T_0. \tag{18}$$

此時若以上式配合(14)式，則(16)式的推導則可進一步簡化如下：

$$\begin{aligned}
&1+\sum_{j=1}^{n}(1+x^j)\frac{(1-z)(1-zx)\dots(1-zx^{j-1})}{(z-x)(z-x^2)\dots(z-x^j)}\\
&=1+\sum_{j=1}^{n}\left(T_j-T_{j-1}\right)=T_0+T_n-T_0=T_n
\end{aligned}$$

$$= \frac{(1-zx)(1-zx^2)\dots(1-zx^n)}{(z-x)(z-x^2)\dots(z-x^n)}. \tag{19}$$

推測原徵答題的設計方式：

而此時若仔細觀察(19)式的推導過程，我們大致上能看出原本[1]中徵答題的設計方式。首先，筆者相信徵答題的設計者知道(17)式中所定義的 T_k 滿足(14), (18)兩式，從而可寫下

$$T_n - T_0 = \sum_{j=1}^{n}\left(T_j - T_{j-1}\right) = \sum_{j=1}^{n}(1+x^j)\frac{(1-z)(1-zx)\dots(1-zx^{j-1})}{(z-x)(z-x^2)\dots(z-x^j)}.$$

因上式中 $T_0 = 1$，將 T_0 移項後，即得

$$T_n = 1 + \sum_{j=1}^{n}(1+x^j)\frac{(1-z)(1-zx)\dots(1-zx^{j-1})}{(z-x)(z-x^2)\dots(z-x^j)}. \tag{20}$$

此時注意依(13)式的定義所寫下的 T_n，其表達式比(20)式單純許多，為

$$T_n = \frac{(1-zx)(1-zx^2)\dots(1-zx^n)}{(z-x)(z-x^2)\dots(z-x^n)}. \tag{21}$$

接著，徵答題的設計者透過證明，得知在實數 x, z 滿足 $|x| < 1 < |z|$ 的條件下，(21)式中的 T_n (即(3)式中的 S_n)滿足 $\lim_{n\to\infty} T_n = 0$，並刻意使用 T_n 在(20)式中的表達式(取代(21)式中的 T_n)來寫出 $\lim_{n\to\infty} T_n = 0$，即得(1)式。最後，只要請解題者在 $|x| < 1 < |z|$ 的條件下證明(1)式成立，即完成原徵答題的設計。以上，就是筆者對原徵答題設計方式的推測。

本節的回顧：

回顧本節的內容，筆者先介紹自己對(5)式的另證，接著透過觀察(19)式來推測[1]中徵答題的設計方式，希望讀者閱讀後能夠有所體會，並請不吝指教。

肆、等式(5)的第二個另證

看過上一節中對(5)式的證明後，讀者對於(5)式的由來與望遠鏡級數的關聯性，應該有了進一步的認識與體會。在本節中，筆者將介紹對(5)式的第二個另證。要先提醒讀者的是，相較於第二節中的證明，底下的證明過程將會稍微繁複，因此僅供有興趣的讀者參考。

首先，回顧上一節的(12)式下方，該處我們說明了在 $|x| < 1, |z| > 1$ 的條件下，對任意正整數 k 而言，$z - x^k$ 均不為零。因此，若我們對(5)式等號兩側同時乘上非零的項

$$(z-x)(z-x^2)\dots(z-x^n),$$

則可得與(5)式等價的下式：

$$
\begin{aligned}
&(1-zx)(1-zx^2)\ldots(1-zx^n)\\
&=(z-x)(z-x^2)\ldots(z-x^n)+(1+x)(1-z)(z-x^2)\ldots(z-x^n)\\
&\quad+(1+x^2)(1-z)(1-zx)(z-x^3)\ldots(z-x^n)+\cdots\\
&\quad+(1+x^{n-1})(1-z)(1-zx)\ldots(1-zx^{n-2})(z-x^n)\\
&\quad+(1+x^n)(1-z)(1-zx)\ldots(1-zx^{n-1}). \qquad (22)
\end{aligned}
$$

若能證明(22)式，則(5)式將隨之成立。筆者進行一些計算之後，雖找出了對(22)式的證明，但證明過程有些複雜。後來發現，若仿照在上一節(13)式中假設 T_k 的想法來假設新符號，則可簡化對(22)式的證明。筆者透過新符號的假設來證明(22)式的過程如下：

證明：觀察(22)式後，我們假設

$$A_k=(1-zx)(1-zx^2)\ldots(1-zx^k),\qquad 1\le k\le n;$$
$$B_k=(z-x^{k+1})(z-x^{k+2})\ldots(z-x^n),\qquad 0\le k\le n-1;$$
$$C_k=(1+x^k)(1-z),\qquad 1\le k\le n.$$

利用上述符號，我們可將(22)式改寫為

$$A_n=B_0+C_1B_1+C_2A_1B_2+C_3A_2B_3+\cdots+C_{n-1}A_{n-2}B_{n-1}+C_nA_{n-1}. \qquad (23)$$

接下來，我們將會設法證明(23)式。

首先，對於滿足 $2\le k\le n-1$ 的正整數 k，我們有

$$
\begin{aligned}
A_kB_k&=(1-zx)(1-zx^2)\ldots\underline{(1-zx^k)}(z-x^{k+1})\ldots(z-x^n)\\
&=\underline{(1-zx^k)}(1-zx)(1-zx^2)\ldots(1-zx^{k-1})(z-x^{k+1})\ldots(z-x^n)=(1-zx^k)A_{k-1}B_k\\
&=[(1-z)(1+x^k)+(z-x^k)]A_{k-1}B_k=A_{k-1}(z-x^k)B_k+(1+x^k)(1-z)A_{k-1}B_k\\
&=A_{k-1}B_{k-1}+C_kA_{k-1}B_k. \qquad (24)
\end{aligned}
$$

上式中所畫出的兩個底線，只是為了讓大家看清楚而畫上的輔助記號。底下列出其他算式時，所畫出的底線功能亦相同。

因為(24)式只考慮滿足 $2\le k\le n-1$ 的正整數 k ，所以接下來，我們將對 $k=1$ 與 $k=n$ 兩情形寫下與 A_k 有關的遞迴式。當 $k=1$ 時，我們仿照(24)式列出

$$
\begin{aligned}
A_1B_1&=(1-zx)(z-x^2)\ldots(z-x^n)\\
&=[(1+x)(1-z)+(z-x)]B_1=(z-x)B_1+(1+x)(1-z)B_1\\
&=B_0+C_1B_1. \qquad (25)
\end{aligned}
$$

而當 $k=n$ 時，再次仿照(24)式列出

$$A_n=(1-zx)(1-zx^2)\ldots(1-zx^{n-1})\underline{(1-zx^n)}$$

$$= \underline{(1-zx^n)}(1-zx)(1-zx^2)\ldots(1-zx^{n-1}) = (1-zx^n)A_{n-1}$$

$$= [(1-z)(1+x^n)+(z-x^n)]A_{n-1} = A_{n-1}(z-x^n)+(1+x^n)(1-z)A_{n-1}$$

$$= A_{n-1}B_{n-1}+C_nA_{n-1}. \tag{26}$$

對於任意正整數 n，我們從(26)式出發後，重複利用(24)式寫下

$$A_n = A_{n-1}B_{n-1}+C_nA_{n-1} = A_{n-2}B_{n-2}+C_{n-1}A_{n-2}B_{n-1}+C_nA_{n-1}$$

$$= A_{n-3}B_{n-3}+C_{n-2}A_{n-3}B_{n-2}+C_{n-1}A_{n-2}B_{n-1}+C_nA_{n-1} = \cdots$$

$$= \underline{A_1B_1}+C_2A_1B_2+C_3A_2B_3+\cdots+C_{n-1}A_{n-2}B_{n-1}+C_nA_{n-1}.$$

接著將(25)式的結果代入上式，即得

$$A_n = B_0+C_1B_1+C_2A_1B_2+C_3A_2B_3+\cdots+C_{n-1}A_{n-2}B_{n-1}+C_nA_{n-1}, \tag{27}$$

因此證得(23)式成立。又因為(23)式即為(22)式，故(22)式成立，證明完畢。

完成上述對(22)式的證明後，由於上方已說明(22)式與(5)式等價，因此知(5)式成立。至此，我們即完成對(5)式的另證。

關於(27)式的改寫：

值得一提的是，若仔細觀察上述另證中的(27)式，我們會發覺(27)式中的各項看起來較缺乏整體上的規律性。關於這件事，筆者接下來將介紹一個方法來改寫(27)式，可將其改寫為較具規律性的樣子。首先，我們將(23)式上方 A_k, B_k, C_k 三個符號的定義修改如下：

$$A_k = \begin{cases} 1, & k=0; \\ (1-zx)(1-zx^2)\ldots(1-zx^k), & 1\le k\le n. \end{cases}$$

$$B_k = \begin{cases} (z-x^{k+1})(z-x^{k+2})\ldots(z-x^n), & 0\le k\le n-1; \\ 1, & k=n. \end{cases}$$

$$C_k = (1+x^k)(1-z), \qquad 1\le k\le n.$$

利用以上的新設定，筆者發現，遞迴式(24)所適用的 k 值範圍，將可從原本的 $2\le k\le n-1$ 擴大到 $1\le k\le n$。而對於新增的 $k=1$ 與 $k=n$ 兩情形，讀者不妨自行驗證，即得知(24)式亦成立(提示：利用(25), (26)兩式)。

有了上面新設定 A_k, B_k, C_k，我們即可直接利用(24)式一口氣寫下

$$A_nB_n = A_{n-1}B_{n-1}+C_nA_{n-1}B_n = A_{n-2}B_{n-2}+C_{n-1}A_{n-2}B_{n-1}+C_nA_{n-1}B_n = \cdots$$

$$= A_0B_0+C_1A_0B_1+C_2A_1B_2+\cdots+C_nA_{n-1}B_n. \tag{28}$$

只要將 $A_0=1, B_n=1$ 代入上式頭尾當中與 A_0, B_n 有關的各項，即可再次得到(27)式並再次完成對(23), (22)兩式的證明。此時，若我們取(28)式的頭尾並將 A_0B_0 移項，則可得如下式

子：

$$A_nB_n - A_0B_0 = C_1A_0B_1 + C_2A_1B_2 + \cdots + C_{n-1}A_{n-2}B_{n-1} + C_nA_{n-1}B_n. \tag{29}$$

不難發現，上式的寫法與(27)式相較之下，看起來就較具整體上的規律性。

<u>又見望遠鏡級數</u>：

除此之外，觀察(29)式的寫法後，筆者也領悟到可以使用望遠鏡級數的概念來證明它。注意在新的 A_k, B_k, C_k 三符號的定義下，對滿足 $1 \le k \le n$ 的任意正整數 k 而言(24)式均成立。取(24)式的頭尾並將 $A_{k-1}B_{k-1}$ 移項，可得

$$A_kB_k - A_{k-1}B_{k-1} = C_kA_{k-1}B_k. \tag{30}$$

對上式取 $k = 1,2,\ldots,n$ 之後，將所得的 n 個式子相加，結果為：

$$\sum_{k=1}^{n}(A_kB_k - A_{k-1}B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} C_kA_{k-1}B_k.$$

將上式中等號兩側的式子展開並消項之後，即可得到

$$A_nB_n - A_0B_0 = C_1A_0B_1 + C_2A_1B_2 + \cdots + C_nA_{n-1}B_n,$$

而上式即為(29)式。接著從(29)式出發，依序回推得(28), (27), (23), (22)四式，即可再次證明(5)式成立。

若比較本節與第二節對(5)式所提出的不同證明，可發現第二節中的證明比較自然，因此第二節中的證明應該是比較好的證明。

本節最後，筆者想介紹在數學知識網站上的[6]文。在[6]文一開始，作者張鎮華教授提到了他的高中老師使用數學歸納法證明

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{31}$$

其實，我們也能使用望遠鏡級數來證明上式，讀者若有興趣不妨練習看看。此處給讀者一個提示：將 k^2 視為 k 的多項式，並假設

$$k^2 = (ak^3 + bk^2 + ck) - [a(k-1)^3 + b(k-1)^2 + c(k-1)],$$

其中 a, b, c 為實數。解出上式中的 a, b, c 後，再以上式計算(31)的左式。

伍、結語

本文寫作的緣起，是發現[1]中的解答使用數學歸納法證明(5)式。看完該證明後，筆者雖知道(5)式成立，但卻不明白(5)式本質上的由來。直到筆者發現(11)式開頭處的分式

可寫成最後的兩個同型項相減，想到這正是望遠鏡級數的特徵，並利用此特徵透過(16)式進行推導後，才首次對(5)式的由來有種恍然大悟之感。相信讀者在看完本文第二節後，都能明白(5)式成立的本質其實就是望遠鏡級數。

在不少證明當中，我們都會發現數學歸納法的身影，使用此方法進行證明經常是嚴謹且有效率的，有助於我們節省很多時間。不過有些時候，若從「是否有助於我們理解等式之本質」的角度來看的話，則數學歸納法所提供的幫助不一定很明顯。在[1]中的解答，應該就是一例；而[6]文中提到使用數學歸納法證明(31)式，或許是另外一例。

筆者撰寫本文的初衷，是想介紹自己對(5)式的另證。閱讀本文時，建議讀者將重心放在第二節的內容，而第三節中對(5)式介紹的證明因其寫法較繁複，不妨將其視為對照組。最後，筆者要特別感謝審稿者所熱心提出的建議，若沒有這些建議督促筆者進行初稿內容的修正，就不會有本文第二節內容的出現。

註 1：在[1]中所提到的「比例檢定」，在國教院所提供的翻譯名詞為「比例檢驗法」或「比值檢驗法」，請參考[4]。

參考文獻

2019 年春季第六題解答，國立中山大學應數系雙週一題網路數學問題徵答活動 http://www.math.nsysu.edu.tw/~problem/2019s/6ans.pdf

Telescoping series, Wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Telescoping_series

望遠鏡級數；嵌入級數 telescoping series 條目，國家教育研究院雙語詞彙、學術名詞暨辭書資訊網 http://terms.naer.edu.tw/detail/2126148/

比例檢驗法；比值檢驗法 ratio test 條目，國家教育研究院雙語詞彙、學術名詞暨辭書資訊網 http://terms.naer.edu.tw/detail/2123107/

Telescoping Series, The OSU Math Department Web Study Guide, Oregon University. http://sites.science.oregonstate.edu/math/home/programs/undergrad/CalculusQuestStudyGuides/SandS/SeriesTests/telescoping.html

張鎮華，閒話尤拉的絕招，數學知識網站 http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_02_3_09/

蔡聰明，談惠更斯級數(第 3 頁)，數學知識網站 http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_22_1_20/page3.html

陶哲軒著，于青林譯(2011)；陶哲軒教你聰明解數學。台北市；遠流。

Ronald L. Graham, Donald E. Knuth and Oren Patashnik (1994). Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science (2nd ed.). Boston: Addison-Wesley.