《新天文學》克卜勒的天文物理觀

楊哲安

高中自學生

壹、前言

在講授克卜勒發現火星橢圓軌跡的過程，都會將其成果直接連結到第谷累積多年的精準觀測資料上，鮮少有人提及克卜勒如何善用第谷的精準觀測資料。事實上克卜勒深入探究火星軌跡，並撰寫《新天文學》一書(Kepler，1609)，共花了十年之久，筆者認為克卜勒對於預測火星軌道的貢獻，並不亞於第谷對於精進觀測儀器的貢獻(Brahe，1598; Chapman，1989)。因此，本文章將重點專注在探討克卜勒不同階段的研究結果，並分析他如何透過各階段的結果進行誤差修正，精進預測模型的精度，最後解開了火星運行的秘密，以此凸顯克卜勒跟以托勒密系統為主流的占星學家的與眾不同。

貳、主流占星學家預測火星軌跡的方法

要深入了解克卜勒對於火星預測的全新見解前，必須先了解當時以托勒密系統為主流的占星學家如何建立行星預測模型(參考圖 1)。

托勒密火星預測模型分為兩個部分：運動模型和時間模型，前者約束了火星行走的軌道，後者約束了火星行走的速度。

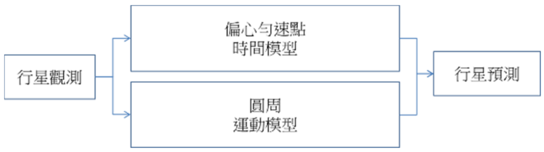

圖 1、托勒密行星軌跡預測模型

當時的占星學家觀察到火星在天球上進行忽快忽慢的運動，也會在固定周期產生逆行的軌跡，為了解釋此物理現象，占星學家採用均輪-本輪模型(deferent and epicycle)，利用多個圓周運動來達到行星軌跡預測。而時間模型是採用一個數學假設點，名為偏心勻速點(equant)，從此點觀察本輪圓心運動為等速率圓周運動，藉由偏心均勻點的角度決定行星所移動的經度。偏心勻速點是托勒密最偉大的貢獻，他提升了行星預測的精確度，托勒密模型也因此被沿用了一千五百年(姚珩和黃秋瑞，2003)。

克卜勒早期的研究也採用占星學家前輩的概念，憑藉第谷精準的資料，他擬合出比托勒密模型精準一百倍的火星預測模型，找出了偏心勻速點和太陽偏移距離最精準的比例，接近 5 比 3(Kepler, 1609，第 16-18 章; Gingerich，1971)，參考圖 2SC 與 EC 距離比例。他稱此模型為「替代假設」(vicarious hypothesis)。

替代假設可以精準地預測火星經度，但在火星緯度的預測上完全失利，原因在於緯度需要透過預測模型的火星和太陽距離求出。這間接地告訴了克卜勒，即使是再精準的偏心勻速點模型也不符合火星在大自然移動的軌跡(Kepler，1609，第 21 章；Gingerich，1971)。必須加入符合大自然的「物理」才能解開天體運行的秘密。

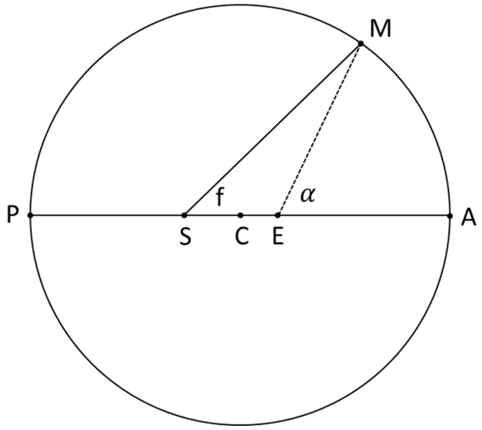

圖 2、替代假設，S:太陽，M:火星，A:遠日點，P:近日點，C:圓中心，E:火星偏心均速點，f:火星經度，α：火星偏心均速點角度

參、克卜勒對火星軌跡預測的全新見解

克卜勒觀察行星運行時快時慢的現象，提出具有物理意義的「距離規則(distance law)」，採用了哥白尼日心概念，認為太陽是行星運行的驅動力，其影響力隨距離遞減，更具體敘述是行星速度隨距離以反比例遞減。他更進一步透過數學工具的推導，將距離規則延伸到面積時間角概念(Area-time，參考附錄一，姚珩，2004)。

從此刻開始，克卜勒和當時占星學家建立火星預測模型的流程有了開創性的區別(參考圖 3)。他放棄了數學假設下的偏心勻速點時間模型，堅持使用具有「物理意義」的距離規則時間模型，透過誤差分析，在物理意義的導引下，修正運動模型，直到獲得準確的行星軌跡。

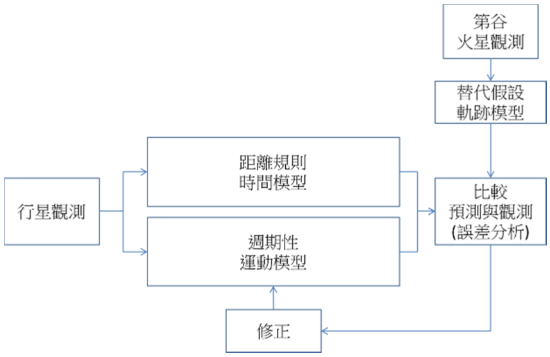

圖 3、克卜勒建立火星軌跡模型的流程

克卜勒的替代假設模型，無法給出火星和太陽的真正距離，導致在緯度的預測失準，但其準確的火星經度預測，使得它在之後的誤差分析佔有一席之地。替代假設模型能夠給出任意時間的正確觀測經度供誤差分析使用。「替代」本意應該為替代托勒密的預測模型，但筆者認為，從後續替代假設模型對整體研究的貢獻，筆者傾向再給予「替代」更深層的含意，此模型「替代」了第谷的觀測資料。

肆、從完美的圓到非圓的關鍵

克卜勒建立了具有「物理意義」的距離規則後，第一個嘗試就是採用偏心圓為運動模型，我們稱這模型為「均分模型(bisect model)」如圖 4，因為克卜勒採用了的均分概念，太陽偏移距離和偏心均速點比例為 1 比 1，來定

義偏心距離，他的理由是均分概念在遠近連線區域(apsides)符合距離規則的物理意義(Kepler，1609; 第 43 章; 姚珩和黃秋瑞，2003)，其證明請參考附錄二。均分概念除了確定太陽偏心以外，均分距離也能作為太陽偏心距離的參考標準。

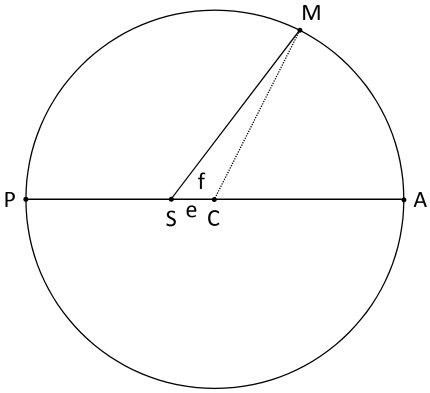

圖 4、均分模型，S:太陽，M:火星，A:遠日點，P:近日點，C:圓中心，e:火星偏心率，f:火星經度

透過誤差分析，均分模型在象限的八分位位置(45 度)有最大誤差八角分，遠大於第谷資料的平均誤差兩角分(Gingerich，1972)，能夠清楚被辨別出來。均分模型的失利，讓克卜勒開始認為火星軌道可能不是完美的圓。他進一步針對遠近日點和上下短軸線位置，進行瞬時角速度誤差分析，並根據距離規則進行軌道的修正，他認為火星軌道在上下短軸位置應該更扁，遠近日點位置應該更狹長，才能夠符合距離規則(參考圖 5)。在符合物理性質的佐證下，克卜勒大膽提出了前無古人的結論—火星為非圓軌跡，並用「肥胖的香腸」來描述此修正(Kepler，1609，第 44 章)。

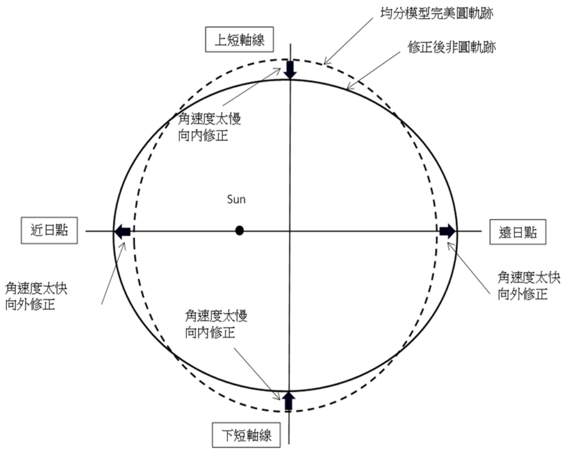

圖 5、均分模型的軌道修正

伍、運用歷史悠久的「本輪」產生非圓軌跡

克卜勒從均分模型的結果推論出火星軌跡是非圓軌跡，他稱這非圓軌跡為卵形，因此我們稱這段時期使用的模型為卵形模型(oval model)如圖 6。

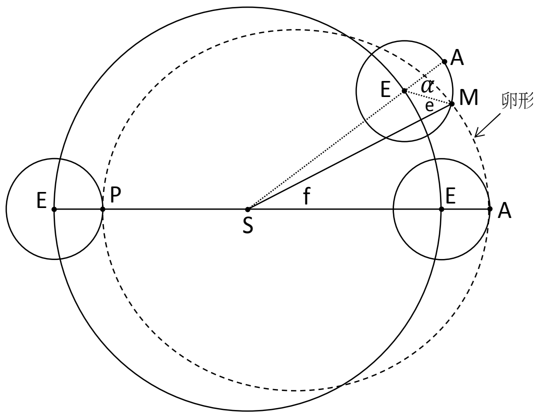

圖 6、卵形模型，S:太陽，M:火星，A:遠日點，P:近日點，E:本輪中心，α:本輪角度，e:偏心率，f:火星經度

為了產生出卵形軌跡，克卜勒使用歷史悠久的本輪系統作為工具，本輪是類似偏心勻速點的等速率計時工具，本輪中心繞行大圓的速度必須符合距離規則，這需

要進行複雜的遞迴計算。為了方便整理計算過程，克卜勒發明了目錄法(Catalog Method)，有系統的排列各個參數，類似現今的 Excel 表格，但每個都需要以人工填上。參考附錄三。

克卜勒花費大量的數值計算後，卵形模型仍舊失敗了，但它呈現和均分物理模型截然不同的誤差趨勢，卵形模型在第一象限八分位的位置落後均分物理模型；在第二象限八分位的位置超前均分物理模型，而替代假設模型所代表的真正軌跡恰好就在兩者之間，參考圖 7。

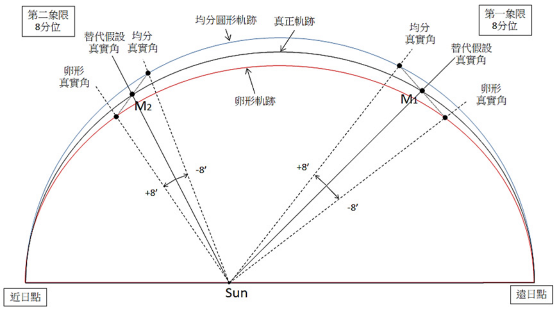

圖 7、卵形模型和均分模型的誤差比較

陸、偵探般地分析誤差，發現火星真正距離

根據先前結果得到真正軌跡在兩者之間的結論，克卜勒接續探究在 90 度位置的各模型間誤差(參考圖 8)，他發現均分模型和卵形模型的月牙寬度為 0.00858(圓半徑為 1)，結合「兩者之間」的結論，除半得到了 0.00429，這讓克卜勒聯想到視角方程式 5°18'的正割函數(1.00429)，這是克卜勒在推導面積時間角計算時很常見的數值(Kepler, 第 43 章)。經過數學推理後，他發現真正距離應該修正為圓半徑 1.0000 (姚珩和黃秋瑞，2003)，這讓克卜勒如夢中驚醒般，看到了新希望，他回想起曾在 40 章所進行的火星距離修正研究，其目的是要找尋正確的距離，以符合均分模型所計算的面積時間角概念。詳細推導參考附錄四。

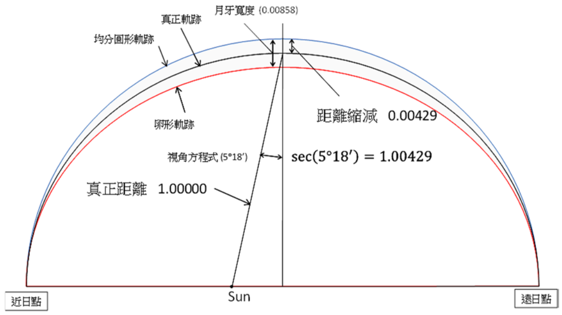

圖 8、火星真正距離的發現

克卜勒提出修正後的火星距離為 $1 + e\cos\beta$，其中 e 為偏心率，β 為圓心角，他稱這個物理現象為「徑向擺盪(diameter reciprocation)」(參考圖 9)，火星擺盪程度由修正後距離決定，修正距離為太陽投影到火星過圓心直徑上的投影量 ME，參考附錄四。但修正後的距離應該往何哪個方向修正火星經度呢?克卜勒首先嘗試沿圓心直徑修正(圖中 M_a 所示)，但持續擁有超前的 5’誤差，最終他發現修正方向應該是投影遠近連線的垂直線上(圖中 M_b 所示)。在發現真正軌跡後，克卜勒嘗試推導面積時間角關係，他赫然發現，這是壓縮圓成為橢圓的過程，這軌跡竟然是他最熟悉的橢圓軌跡(Kepler，1609，第 57 章; Aiton，1969)。

起初克卜勒還不相信，火星真正軌跡就是如此簡單的曲線，試圖用本輪繼續解

釋正確的徑向擺盪，在最後真正地走頭無路下，克卜勒寫下:「我真荒謬！徑向擺盪不可能套用在橢圓軌跡上，我早該想到橢圓本身就具有擺盪的特性。」 (Kepler，1609，第 56、58 章)

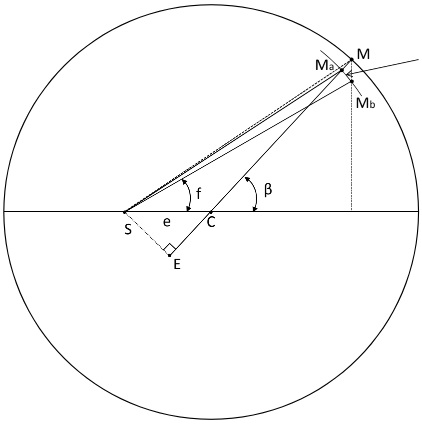

圖 9、徑向擺盪的修正，S：太陽，C：圓中心，M：均分模型的火星，M_a：首次修正位置，M_b：火星正確位置，f：火星經度，β：圓心角，e：偏心率

柒、結論

在一個世紀後，牛頓運用自己獨創的萬有引力和微積分，重新證明了克卜勒三大定律，優雅地解構了上帝的巧思，問到克卜勒的成就，牛頓只簡單的評論:「他[克卜勒]當然是用「猜」的，他知道軌跡非圓是卵形，於是他就猜會是橢圓，」

相較於牛頓的嘲諷，擁有「數學王子」美譽的高斯認為:「已經有好一段時間，人們不再去探討全然的未知，只想去稍微改進已知。」(Wilson，1968)

我們究竟該如何去看待克卜勒？筆者認為，我們不該只將他發現橢圓的成就歸功於精準資料和卓越數學技巧，我們需要理解將「物理」帶入占星學是克卜勒一生中最大的貢獻。這項貢獻，需要從偏心勻速點和距離規則的差異來體會，前者是基於數學的理論基礎，精確地逼近當時人眼觀察到的天文現象，已經沿用一千五百年了，挑戰它的缺陷需要極大的勇氣與智慧。而後者是基於物理概念，透過數學工具來解構天體運行的道理，並成為現今眾所皆知的克卜勒第二定律面積規則，是繼哥白尼日心說後，天文學上最偉大的革新之一。克卜勒不聽信老師馬斯特林（Maestlin）「不該把物理學引入天文學」的勸言，堅持使用具有物理意義的「距離規則」來思考天文，讓他從眾多占星學家中蛻變成「第一位天文物理學家」(金格瑞契，2007)。

筆者也認為克卜勒征戰火星軌跡的研究是一個很好的科學教學案例，以前學習到科學方法時，筆者就有一個疑問，為何要先提出一個假設模型，然後錯了還要再回來修正？因為鮮少有人告訴你，那些偉大的科學家們遭遇失敗或失意落魄的樣子。如果要深深體會科學方法的流程，就必須要有個耳熟能詳的例子，克卜勒的《新天文學》研究，就擁有他許多挫敗與反省的故事。首先，他面對的問題較現在的天文問題簡單，使用的幾何數學也不會過於困難，最重要的是，讓學習者不再只記得三個死板的定理，能夠立體化這些知識，學習者能夠身歷其境，理解科學家究竟如何思考問題，並且會遇到什麼困境，以此激發學習者探究未知的興趣。

參考文獻

金格瑞契(Gingerich. O.) (2007)。**追蹤哥白尼**。台北市：遠流出版社。

姚珩、黃秋瑞 (2003)。克卜勒行星橢圓定律的初始內涵。**科學教育月刊，第 256 期**，第 33-45 頁。

姚珩 (2004)。行星面積定律的建立。**科學教育月刊，第 257 期**，第 32-38 頁。

Aiton, E.J. (1969). Kepler's second Law of Planetary Motion. *Isis A Journal of the History of Science Society*, 60, 75-90.

Brahe, T. (1598). Astronomiae Instauratae Mechanica. *Books.google.com*

Chapman, A. (1989). Tycho Brahe - *Instrument designer*, *observer and mechanician*, J. Br. Astron. Assoc, 99（2）, 70-77.

Gingerich, O. (1972). Johannes Kepler and the New Astronomy. Quarterly *Journal of the Royal Astronomical Society*, 13, 346-373.

James, R.V. (1999). *Johannes Kepler and the New Astronomy*. New York：Oxford University Press

Kepler, J. ([1609] 1992). *New astronomy*. New York: Cambridge University Press.

Wilson, C. (1968). Kepler's derivation of the elliptical path. Isis *A Journal of the History of Science Society,* 59, 5-25

附錄一、基於距離規則的面積時間角之推導

克卜勒提出距離規則，認為太陽是天體運行的驅動力，其影響力隨距離遞減，更具體敘述是天體速度隨距離以反比例遞減。距離規則的定義(參考圖 1(a))：

$$r \cdot v = c$$

r 是天體 M 到太陽 S 距離，v 是天體瞬時速度，c 為固定值。考量單位時間Δt天體運行到 M'位置，移動距離為 d，上述公式可表示為：

$$r \cdot \frac{d}{\Delta t} = c$$

讓單位時間天體掃過的面積$A = r \cdot d$，可得下列面積規則公式:

$$A = c \cdot \Delta t$$

即面積可作為計時工具。

克卜勒進一步發明面積時間角概念(Area-time)，取代偏心勻速點的角度。面積時間角可用圖 1(b)來說明，以遠日點 A 為基準，火星以 687 天為周期繞行太陽一周，用 360 度(2π)來表示天體一周期時間，依據上述面積規則公式，火星自遠日點 A 起算，行進到 M 位置的時間，可以用扇型面積ΔMSA表示，其時間角α可定義為：

$$\alpha = 2\pi \frac{\Delta MSA}{\text{全周期面積}}$$

有了具物理意義的時間角定義後，克卜勒就可以透過幾何計算預測真實角 f，即對應於此時間的火星經度。

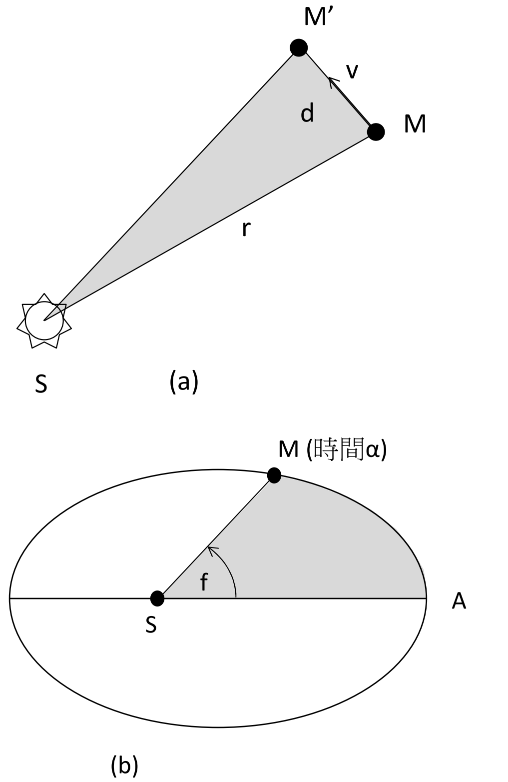

圖 1、(a)距離規則示意圖 (b)時間角概念示意圖

克卜勒在《新天文學》第 40 章提出面積時間角概念，原本的用意是用來取代繁複的距離數值計算，後來成為眾所周知的克卜勒第二定律面積規則。

附錄二、均分概念在遠近連線區域符合距離規則之證明

定理說明：均分概念在遠近連線區域符合距離規則

均分概念為太陽偏移距離和偏心均速點比例為 1 比 1，如圖 2 所示，C 為圓形軌跡的圓心，S 為太陽，E 為偏心勻速點，S 與 E 均分在圓心 C 兩側且在遠近連線上，$\overline{SC}$與$\overline{EC}$皆為距離 e，稱為偏心率。在遠日點與近日點，火星軌跡符合距離規則，即速度與火星到太陽距離成反比，用數學式表示如下：

$$\frac{v_A}{v_P}=\frac{1-e}{1+e}$$

V_A 與 V_P 分別為火星在遠日點與近日點的速度。

證明：

火星自 A 運行到 M 位置，移動距離為弧長 AM 或用 β 表示，而所運行時間可用偏心勻速點之時間角 α 表示，遠日點速度為：

$$v_A=\frac{\beta}{\alpha}$$

α 和 β 的關係能透過ΔMCE的正弦定理得知：

$$e\sin\alpha=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

當火星接近近日點，α 接近 0，$\sin\alpha$接近 α，$\cos\alpha$接近 1，β 亦然。代入式子為：

$$v_A=1-e$$

同理，火星接近遠日點的速度為：

$$v_P=1+e$$

因此

$$\frac{v_A}{v_P}=\frac{1-e}{1+e}$$

Q.E.D.

根據上述證明，均分概念在遠近連線符合距離規則，克卜勒因此了解到太陽與偏心均勻點均分是具有物理意義且接近真實情況，除了確定太陽偏心以外，均分概念的太陽偏心距離也能作為爾後預測模型的參考標準。

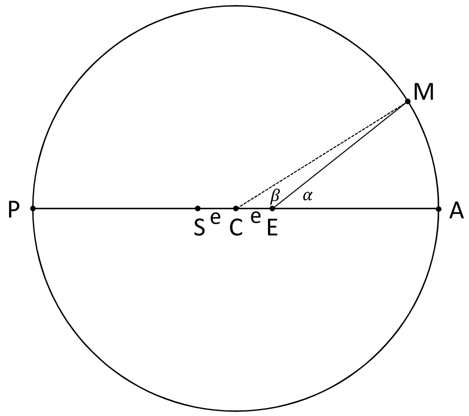

圖 2、均分概念在遠近連線區域符合距離規則之證明

附錄三、卵形模型的目錄法和計算

採用均輪本輪系統的卵形模型(參考本文圖 5)，不像替代假設模型和均分模型能夠直接推導得出真實角 f(火星經度)和時間角 α 的關係。因為均輪本輪系統的複雜性，需要將均輪與本輪分開討論，因此新增了許多參數，克卜勒在《新天文學》第 49 章發明了目錄法(Catalog Method)來歸納各個參數，他將時間角細分為 360 張卡片，每一張卡片代表每一度時間角，並記錄著四種參數。參考圖 3.1，主要分為兩大目錄：第一目錄參數和火星 M 相關，第二目錄參數和本輪中心 E 相關。

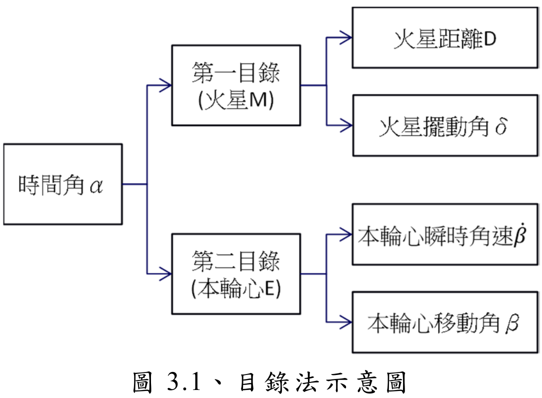

圖 3.1、目錄法示意圖

參考圖 3.2，更進一步說明各參數的求法：

(一) 第一目錄

1. 火星距離 D($\overline{SM}$)

N 為 M 在初始轉軸上的垂足點，$\overline{MN}$=e $\sin\alpha$，$\overline{EN}$=e $\cos\alpha$，透過畢氏定理能夠得出：

$$D=\sqrt{(1+e\cdot\cos\alpha)^2+(e\cdot\sin\alpha)^2}$$

2. 火星擺動角 δ

從ΔESM的正弦定律得出 α 和 δ 的關係為：

$$\sin\delta=\frac{e}{D}sin\alpha$$

(二) 第二目錄

本輪中心 E 在均輪上的移動遵循距離規則，能夠透過距離規則公式，來計算本輪中心的瞬時角速度$\dot{\beta}$，360 個時間角都有其對應的瞬時速度$\dot{\beta}$，累加起來應為一周期的角度，即為 360 度。其概念類似於當今的積分概念，以積分的數學式表示為：

$$\beta=\int_0^{\alpha_i}\dot{\beta}d\alpha$$

1. 本輪心瞬時角速$\dot{\beta}$：

依據距離規則，E 的瞬時角速$\dot{\beta}$跟火星距離 D 成反比，用數學式能夠表示為：

$$D\dot{\beta}=C$$

或

$$\dot{\beta}=\frac{C}{D}$$

C 為常數。

2. 本輪心移動角 β：

從遠日點開始，當 α 為 n 度，依序累加 n 個$\dot{\beta}$，其值即為均輪心移動角 β，以數

學式表示為：

$$\beta_n=\sum_{i=1}^{n}\dot{\beta}_i=(\dot{\beta}_1+\dot{\beta}_2+\cdots+\dot{\beta}_n)$$

或

$$\beta_n=\sum_{i=1}^{n}\dot{\beta}_i=C\left(\frac{1}{D_1}+\frac{1}{D_2}+\cdots+\frac{1}{D_n}\right)$$

完成各個參數的計算後，時間角和真實角的計算方式如下：

時間角：$\alpha_n=n$

真實角：$f_n=\beta_n-\delta_n$ (n=1...360)

距離規則數學式的常數 C，代表著真實軌跡面積的 360 分之 1，其值接近數值 1，在計算過程中，需要透過反覆代入來確認，C 需要滿足β_{180}為 180°。

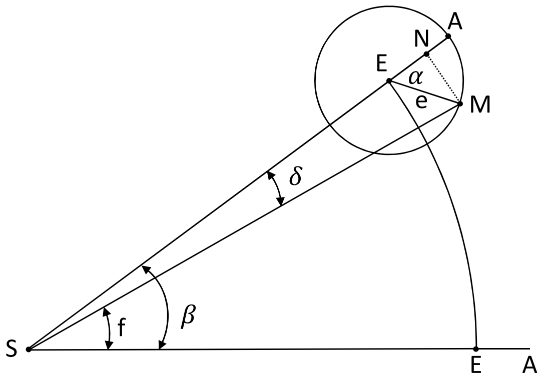

圖 3.2、形模型真實角與時間角之推導

附錄四、均分物理模型的火星距離修正

克卜勒在《新天文學》第 40 章，針對均分物理模型提出了火星距離修正，其目的是要找尋真正的火星距離，它和掃過的面積一樣可以代表時間。首先，他將圓周切成 360 等分弧長，將每段弧長s_i視為 1，每段弧長各自擁有對應的火星距離$\overline{SM}$，克卜勒認為 360 段火星距離相加應該要等於 360 段圓半徑，因為兩者必須要掃過一樣的面積，然而結果並不是這樣。克卜勒很快就找到差異原因，因為偏心的關係，$\overline{SM}$並不垂直於對應弧長，而是有一傾斜角，他稱這傾斜角為視角方程式(Optical Equation)，弧長必須經過此角度修正，參考圖 4。因此他提出了下列修正關係：

$$\sum_{i=1}^{360} r_i\cdot(s_i\cos\theta_i)=360$$

或是

$$\sum_{i=1}^{360}(r_i\cos\theta_i)\cdot s_i=360$$

因此修正後的火星距離為 r·cosθ，即$\overline{KM}$線段，而$\overline{KM}$線段可以表示為$1+\mathrm{e}\cos\beta$，e 為偏心距離，β為圓心角。

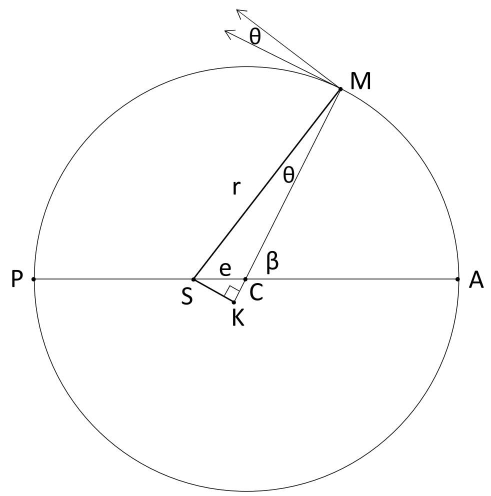

圖 4、均分物理模型的火星距離修正