

# 串珠初探：從正立方體到截半立方體

李政憲<sup>1\*</sup> 王儷娟<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 新北市立林口國民中學

<sup>2</sup> 臺南市仁德文賢國民中學

## 壹、前言

筆者於 2011 年初探串珠，並帶學生實作，從中體會多面體中的數學與路徑問題，學生的反應頗佳；特撰此文將其中的想法與各位讀者分享，希望能讓有興趣的朋友一起加入實作，進一步讓更多學生受惠。

## 貳、緣起

2011 年經由中研院李國偉教授推薦，

參與了台大化學系金必耀教授「串珠分子模型的美妙世界」展覽，後來也實際探訪台大化學系探訪相關模型（如圖 1、圖 2），並經由實作後覺得這是個可以實際帶入課堂，探討尤拉的多面體公式，以及串珠路徑長的好問題，遂製作了授課簡報，並帶其他老師與學生進行實作，也讓家長一起參與課程（如圖 3、圖 4）。



圖 1



圖 2



圖 3



圖 4

\*為本文通訊作者

### 參、珠子位於正立方體的「頂點」

一開始從較簡單的正立方體串珠開始談起，並且探討串珠路徑長度的關聯性；由於一般的串珠多為球型，若將串珠視作正立方體的每個頂點，則共需準備八顆串珠進行串聯：首先將其中四個串珠以適當的線材【註一】連接成圈並重疊一個連接邊將線材外穿（如圖 5），此時下方兩顆串珠將各穿過線材兩次；接著補上兩顆串珠，



圖 5

並於下方兩側分別穿入原線頭的兩端再次交叉（如圖 6），同樣地下方兩顆串珠各穿過線材兩次。

接著將最後兩顆串珠從下方再將線材交叉穿過，使得最後兩顆串珠各穿過線材兩次（如圖 7），最後繞回上方兩顆串珠（一左一右）後，於兩顆串珠中作收尾的動作，至此所有的串珠都被線材繞過兩次（如圖 8，可打結加強結構的穩定性）。



圖 6



圖 7

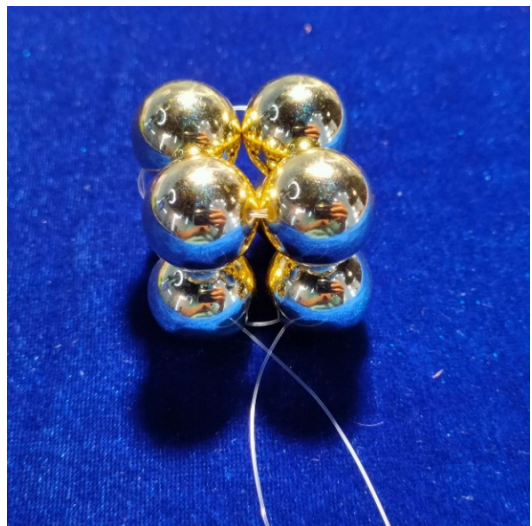


圖 8



至此正立方體結構已大致完成，從左右兩側可看到線材繞成正方形形狀（如圖 9），然而若從上方往下微施力道，會發現線材會如圖 10 改變角度繞成菱形結構。

接著想討論兩個問題：一是線材總長度大約用掉多少？二是為何施力後其側面的正立方體結構會隨著改變？

如圖 11，如果串珠的直徑為  $a$ ，可知  $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = 2a$ ，每顆串珠都被線材穿過兩次則線材需要  $8a \times 2 = 16a$ ，又這一種串珠方式，恰好沿著此正方體的前後繞

了正方形 ABCD 及正方形 EFGH，線材需要  $4a \times 2 = 8a$ ，因此線材的總長度至少需大於  $24a$ 。【註二】

至於施力後側面的正方形結構會改變的原因，主要是正方形（或四邊形）本身是個不穩定的結構，加上左右兩側對稱，所以若我們從上方施力，此正方形將變形為菱形或是其他的四邊形。然而是否有其他的串珠方式，可以呈現出比較穩定的結構呢？



圖 9



圖 10

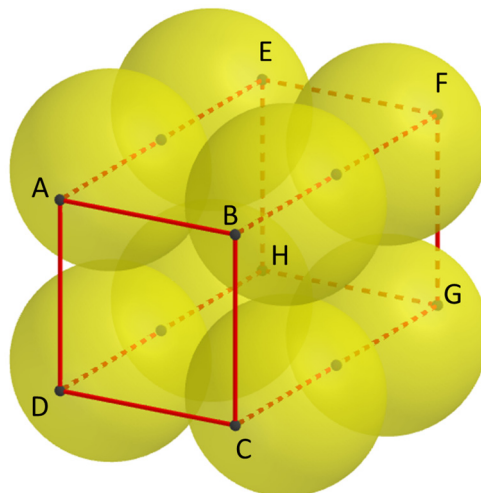


圖 11

#### 肆、珠子位於正立方體的「邊」

如果從正立方體的八個頂點串法改為其十二個邊進行串接，結果又會如何？首先以十二顆串珠中的四顆交叉成環，將線材穿過下方的珠子兩次（如圖 12），接著如

圖 13 再加三顆串珠交叉成環，同樣將線材穿過中央的珠子兩次（如圖 13）；仿照上面動作，加三顆串珠交叉成環，同樣穿過中央的串珠兩次如圖 14；再將最後兩顆串珠一左一右穿過線材如圖 15；



圖 12

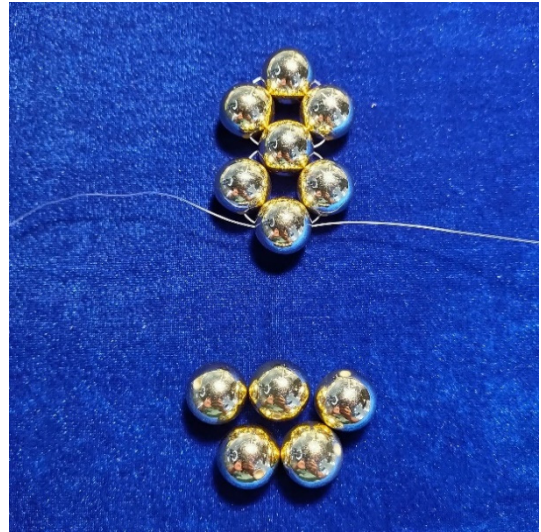


圖 13



圖 14



圖 15



將線材從左側與右側各三顆串珠由上往下穿過（如圖 16），從內側穿過最底下左右兩顆串珠後，回到正上方的串珠交叉穿插（如圖 17）；最後將兩側的線材一拉，

神奇的事情發生了（如圖 18）！十二顆串珠輕易成型，而且結構穩定，主要是因為連接串珠洞口的線材從不穩定的正方形變為三角形的穩定結構了（如圖 19）【註三】！



圖 16



圖 17



圖 18

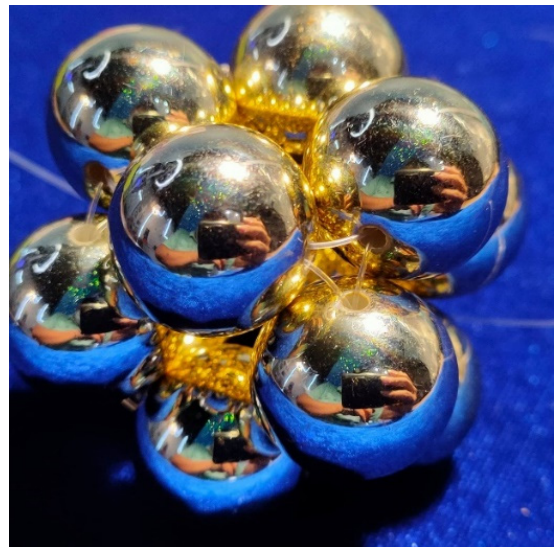


圖 19

此十二顆珠子的作品所需要的線材是否比上一個作品多呢？

由圖 20 可見穿線所走的路徑形成一個截角立方體，又圖 21 表示此截角立方體的一個八邊形的面，若串珠的直徑為  $a$ ，則  $\overline{BC} = \overline{DE} = \overline{FG} = \overline{HA} = a$ ，因為四邊形  $ABO_2O_1$  是等腰梯形， $\overline{AO_1} = \overline{BO_2} = \frac{a}{2}$ ， $\overline{O_1O_2} = a$ ，可得  $\overline{O_1I} = \overline{O_2J} = \frac{\sqrt{2}}{4}a$ ，所以  $\overline{AB} =$

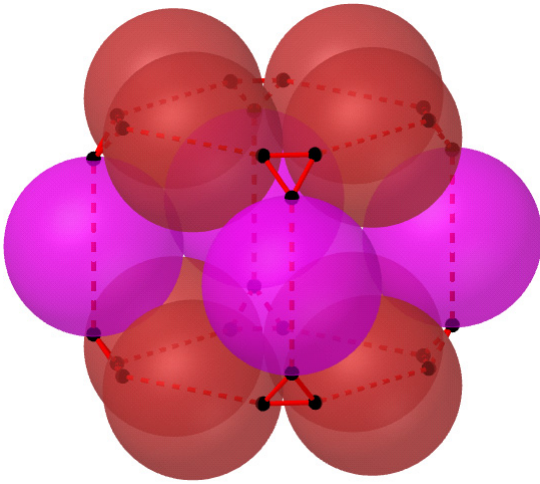


圖 20

$a - \frac{\sqrt{2}}{4}a \times 2 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a$ ， $\overline{CD} = \overline{EF} = \overline{GH} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a$ ，每顆串珠都被線材穿過兩次則線材需要  $12a \times 2 = 24a$ ，再 8 處截角皆形成三角形，需要線材  $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a \times 3 \times 8 = (24 - 12\sqrt{2})a \approx 7a$  則此作品至少需  $31a$  的線材長度，由此可知，較前一個作品增加了串珠數，相對地線材長度也跟著增加了。【註四】

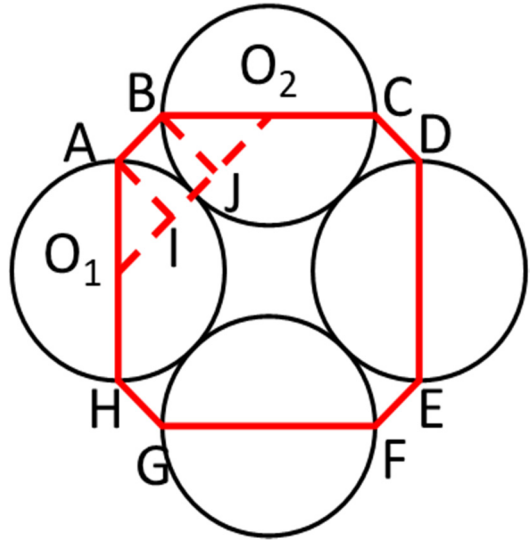


圖 21

## 伍、正立方體與截半立方體關係之探討

讓我們試著從正方體的結構探討這兩個作品的差異性吧！

圖 22 表示將珠子當作正立方體的八個頂點進行串接時，珠子的中心形成一個藍色正立方體結構，而圖 23 中紅色線表示線材路徑，由於串接時線材路徑的每個面都是矩形，所以完成的作品將因四邊形結構而不穩定；而圖 24 表示將珠子當作正立方體的十二個邊進行串接，珠子的中心形

成一個藍色多面體結構，線材以圖 25 的紅線路徑進行串接，由於連接洞口的線材具有三角形的穩定結構，所以這個作品的結構性比較強，也不易變形。事實上，以這十二顆珠子的中心點為頂點的多面體我們稱為「截半立方體」，原因是這個多面體可以視為從一個正立方體的各邊中點，截下八個三角錐而得(如圖 26)；因此，可以發現將珠子當作正立方體的十二個邊進行串接方法，與將珠子當作截半立方體的頂點串接的方法相同。

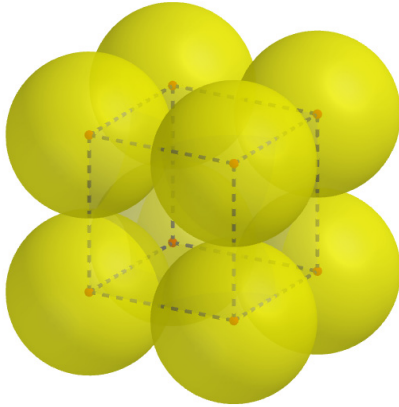


圖 22

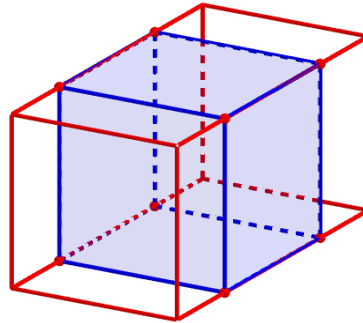


圖 23

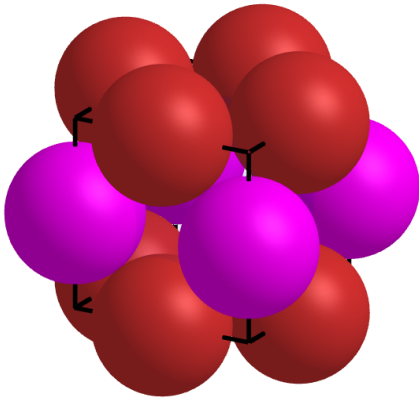


圖 24

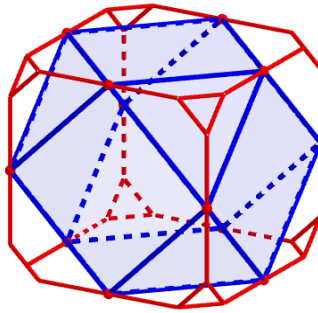


圖 25

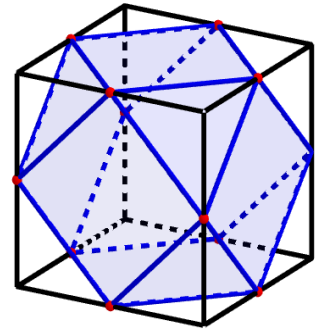


圖 26

然而當初筆者學完這個截半立方體的串珠後，金必耀教授又拿了一顆珠子放入原來截半立方體的內部，使得這顆串珠成為原來截半立方體的內切球，重點是這顆串珠的大小與原來十二顆串珠的大小居然完全相同（如圖 27）！這不禁讓筆者覺得十分有趣，也請各位讀者不妨先想一下為什麼呢？

如圖 28，若正方體的邊長為 1，則正

三角形  $IJK$  的邊長為  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ；根據對稱性，可求得外球半徑均為  $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 。連接三對邊中點形成的等腰三角形  $A_1G_1J$  邊長  $\overline{A_1J} = \sqrt{2}$ ，故內切球直徑  $\overline{H_1I_1} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \times 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，即內切球半徑與外部球半徑均相同！





圖 27

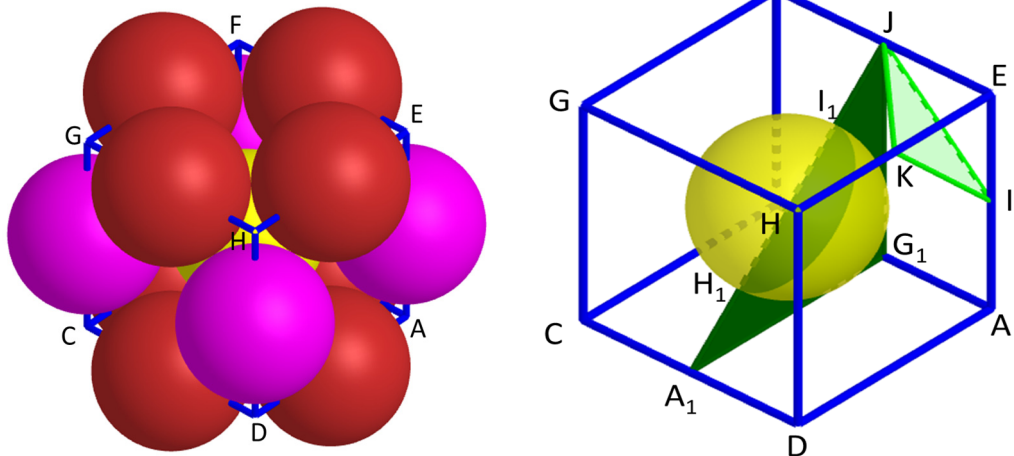


圖 28

筆者嚐試在社群中分享此作品後，也試著提出此問題，讓社群老師們集思廣益，一起探索此結論。由中興國中李慧玲老師提出的正方體斜截面為正六邊形，以此六邊形的頂點為圓心，邊長的一半為半徑畫圓，恰可畫出六個外接圓，且中心可擺放一個與外面六個圓相同大小的等圓（圖 29），更是將立體轉為平面，也省去了計算上的複雜性，直接以概念進行解題；也與

金必耀教授分享此多面體的另一種擺設方式（3,6,3）的橫截面不謀而合（如圖 30，圖 28 為 4,4,4 的擺設方式）！

## 陸、結語

本文探索較容易上手的兩種串珠方法，先從 8 顆珠子完成的正立方體的結構介紹起，接著再以 12 顆珠子完成截半立方



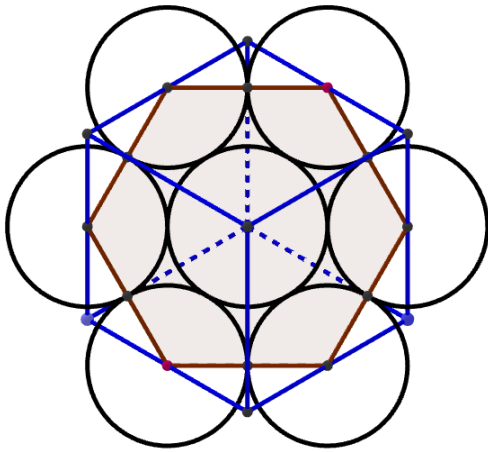


圖 29



圖 30

體的結構，並且比較兩者結構的差異性；接著再以兩種不同方式探討截半立方體串珠內的內切球半徑，恰好與截半立方體的串珠大小完全相同；有興趣的讀者還可以進一步探索正立方體與截半立方體的點、線、面關係，以及相對應的體積關係，相信這也是個有趣的課題；適合如今引導學生多元學習並認識多面體的好教材。本文承蒙台大化學系金必耀教授指導，「藝數摺學」線上寫作群組麗山高中洪明譽老師建議修正，特此致謝。

### 備註

【註一】一般而言，初學者建議使用質地較硬的釣魚線，線的直徑要比串珠的孔徑要小，約末可以穿過 2-3 次的寬度為佳。

【註二】這裏的長度只是約略計算（底下截半立方體的串珠亦同），事實上由於在製作時還要預留左右兩側

至少各 15 公分左右的長度方便收尾或回穿，建議可以計算出來的長度至少再加 30 公分為佳。

【註三】關於截半立方體的串法並非唯一，這裏配合相片呈現較容易理解的串珠方式，若要在串珠時對此結構更了解的讀者們，不妨可以參考由麗山高中洪明譽老師所著的「動手玩數學」一書（南一出版社），比較兩者串法的差異性。

【註四】若線材的長度允許，也可以考慮將多餘的線材不打結，反穿回串珠內至所有線材回穿完畢（盡量穿過不重覆的串珠），使得每個串珠平均穿過 2-3 次，即可完成外觀沒有打結較為美觀的作品。