「費波那契彈(談)正弦-F-sine 卷積恆等式」的迴響

許閎揚

彰化縣立藝術高級中學

壹、前言

費氏數列的定義為 $\langle F_n \rangle : F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$ 且 $F_0 = 0$, $F_1 = 1$，它是中學數學課程常見的一個數列。在科學教育月刊第 407 期[1]中，陳建燁老師利用 $\sin n\theta$ 的遞迴性質推導出費氏數列與正弦函數卷積恆等式：

$$\sin\theta \cdot F_{n-1} + \sin 2\theta \cdot F_{n-2} + \cdots + \sin(n-1)\theta \cdot F_1$$

$$= \frac{2\sin\theta F_{n+1} + \left(2\cos\theta - 1\right)\sin\theta F_n - 2\sin\left(n+1\right)\theta + \left(2\cos\theta - 1\right)\sin n\theta}{1 + 4\sin^2\theta} \text{。}$$

我們發現利用複數與費氏數列的矩陣及旋轉矩陣皆可以推導出上述結果。此外，我們還可以做出費氏數列與餘弦函數的卷積。

貳、用複數與費氏數列矩陣證明卷積等式

以下的引理 1 是關於矩陣計算費氏數列的理論基礎。

引理 **2.1**[2]：若 F_n 為費氏數列第 n 項，則 $\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n, \ n \geq 1$ 。

證明：讀者可使用數學歸納法證明或參考資料[2]。

引理:2.2： $e^{i\theta}x^{n-1} + e^{2i\theta}x^{n-2} + \cdots + e^{(n-1)i\theta}x = \dfrac{e^{i\theta}\left(x^n - xe^{(n-1)i\theta}\right)}{x - e^{i\theta}}, x \neq e^{i\theta}.$ 。

證明：利用等比級數公式，得

$$e^{i\theta}x + e^{2i\theta}x^2 + \cdots + e^{(n-1)i\theta}x^{n-1} = \frac{e^{i\theta}x\left(1 - e^{(n-1)i\theta}x^{n-1}\right)}{1 - e^{i\theta}x} \qquad (1)$$

將(1)式的 x 用 $\dfrac{1}{x}$ 代入，得

$$e^{i\theta} \cdot \frac{1}{x} + e^{2i\theta} \cdot \frac{1}{x^2} + \cdots + e^{(n-1)i\theta} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} = \frac{e^{i\theta} \cdot \frac{1}{x}\left(1 - e^{(n-1)i\theta} \cdot \frac{1}{x^{n-1}}\right)}{1 - e^{i\theta} \cdot \frac{1}{x}} \qquad (2)$$

將(2)等號兩邊同乘 x^n ，得

$$e^{i\theta}x^{n-1}+e^{2i\theta}x^{n-2}+\cdots+e^{(n-1)i\theta}x=\frac{e^{i\theta}\left(x^n-xe^{(n-1)i\theta}\right)}{x-e^{i\theta}} \tag{3}$$

得證。

有了上面兩個引理，我們現在可以來證明陳建燁老師所提出的正弦與費式數列的卷積，即以下定理 1。

定理 1[1]： $\sin\theta\cdot F_{n-1}+\sin 2\theta\cdot F_{n-2}+\cdots+\sin(n-1)\theta\cdot F_1$

$$=\frac{2\sin\theta F_{n+1}+\left(2\cos\theta-1\right)\sin\theta F_n-2\sin\left(n+1\right)\theta+\left(2\cos\theta-1\right)\sin n\theta}{1+4\sin^2\theta}$$ 。

證明：

令 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，將 A 代入(3)式，得

$$e^{i\theta}A^{n-1}+e^{2i\theta}A^{n-2}+\cdots+e^{(n-1)i\theta}A=e^{i\theta}\left(A-e^{i\theta}I\right)^{-1}\left(A^n-e^{(n-1)i\theta}A\right) \tag{4}$$

由引理 2.1 可知，(4)式等號左邊矩陣的(1,2)元為

$$e^{i\theta}F_{n-1}+e^{2i\theta}F_{n-2}+\cdots+e^{(n-1)i\theta}F_1 \tag{5}$$

顯然地，(5)式的實部為

$$\cos\theta\cdot F_{n-1}+\cos 2\theta\cdot F_{n-2}+\cdots+\cos(n-1)\theta\cdot F_1$$ ，

虛部為

$$\sin\theta\cdot F_{n-1}+\sin 2\theta\cdot F_{n-2}+\cdots+\sin(n-1)\theta\cdot F_1$$ 。

現在計算(4)式的等號右邊：

首先，
$$A-e^{i\theta}I=\begin{bmatrix}1-e^{i\theta} & 1\\ 1 & -e^{i\theta}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\left(A-e^{i\theta}I\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1-e^{i\theta} & 1\\ 1 & -e^{i\theta}\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{e^{2i\theta}-e^{i\theta}-1}\begin{bmatrix}-e^{i\theta} & -1\\ -1 & 1-e^{i\theta}\end{bmatrix} \tag{6}$$

將(6)代入(4)式，得等號右邊矩陣(1,2)元為

$$\frac{-F_ne^{2i\theta}+e^{(n+1)i\theta}-e^{i\theta}F_{n-1}}{e^{2i\theta}-e^{i\theta}-1}$$ 。

因為

$$\frac{1}{e^{2i\theta}-e^{i\theta}-1}=\frac{1}{\left(\cos 2\theta-\cos\theta-1\right)+i\left(\sin 2\theta-\sin\theta\right)}$$

$$=\frac{\left(\cos 2\theta-\cos\theta-1\right)-i\left(\sin 2\theta-\sin\theta\right)}{\left(2\sin^2\theta+\cos\theta\right)^2+\left(2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\right)^2}$$

$$=\frac{e^{-2i\theta}-e^{-i\theta}-1}{1+4\sin^2\theta}$$ 。

所以

$$\frac{-F_ne^{2i\theta}+e^{(n+1)i\theta}-e^{i\theta}F_{n-1}}{e^{2i\theta}-e^{i\theta}-1}=\frac{e^{-2i\theta}-e^{-i\theta}-1}{1+4\sin^2\theta}\left(-F_ne^{2i\theta}+e^{(n+1)i\theta}-e^{i\theta}F_{n-1}\right)$$

$$=\frac{-F_n+e^{(n-1)i\theta}-e^{-i\theta}F_{n-1}+F_ne^{i\theta}-e^{in\theta}+F_{n-1}+F_ne^{2i\theta}-e^{(n+1)i\theta}+e^{i\theta}F_{n-1}}{1+4\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\left(e^{2i\theta}+e^{i\theta}-1\right)F_n+\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}+1\right)F_{n-1}-e^{(n+1)i\theta}+e^{(n-1)i\theta}-e^{in\theta}}{1+4\sin^2\theta} \qquad (7)$$

(7)式的虛部為

$$\frac{\left(\sin 2\theta+\sin\theta\right)F_n+\left(\sin\theta-\sin\left(-\theta\right)\right)F_{n-1}-\sin\left(n+1\right)\theta+\sin\left(n-1\right)\theta-\sin n\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

$$=\frac{(2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta)F_n+2\sin\theta F_{n-1}-\sin(n+1)\theta+\sin(n-1)\theta-\sin n\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

$$=\frac{(2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta+2\sin\theta)F_n+2\sin\theta F_{n-1}-2\sin(n+1)\theta+\sin(n+1)\theta+\sin(n-1)\theta-\sin n\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta F_{n+1}+\left(2\cos\theta-1\right)\sin\theta F_n-2\sin\left(n+1\right)\theta+2\sin n\theta\cos\theta-\sin n\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta F_{n+1}+(2\cos\theta-1)\sin\theta F_n-2\sin(n+1)\theta+(2\cos\theta-1)\sin n\theta}{1+4\sin^2\theta}\text{。}$$

因此，比較(5)(7)式的虛部，得

$$\sin\theta\cdot F_{n-1}+\sin 2\theta\cdot F_{n-2}+\cdots+\sin(n-1)\theta\cdot F_1$$

$$=\frac{2\sin\theta F_{n+1}+(2\cos\theta-1)\sin\theta F_n-2\sin(n+1)\theta+(2\cos\theta-1)\sin n\theta}{1+4\sin^2\theta}\text{，}$$

得證。

系理： $\cos\theta\cdot F_{n-1}+\cos 2\theta\cdot F_{n-2}+\cdots+\cos(n-1)\theta\cdot F_1$

$$=\frac{(\cos2\theta+\cos\theta-1)F_n+F_{n-1}-\cos(n+1)\theta-\cos n\theta+\cos(n-1)\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

證明：利用(5)與(7)式實部相等，即可得證。

參、用旋轉矩陣證明卷積等式

引理 **3.1**： $F_1x^{n-1}+F_2x^{n-2}+\cdots+F_{n-1}x=\dfrac{F_1x^{n+1}-F_nx^2-F_{n-1}x}{x^2-x-1}$ 。

證明：

令 $S=F_1x+F_2x^2+\cdots+F_{n-1}x^{n-1}$

$=> xS=F_1x^2+F_2x^3+\cdots+F_{n-2}x^{n-1}+F_{n-1}x^n$

$=> (1-x)S=F_1x+F_0x^2+F_1x^3+\cdots+F_{n-3}x^{n-1}-F_{n-1}x^n$

$=F_1x+x^2S-F_{n-2}x^n-F_{n-1}x^{n+1}-F_{n-1}x^n$

$=F_1x+x^2S-F_nx^n-F_{n-1}x^{n+1}$

$$=> S=F_1x+F_2x^2+\cdots+F_{n-1}x^{n-1}=\frac{F_1x-F_nx^n-F_{n-1}x^{n+1}}{1-x-x^2} \qquad (8)$$

將(8)式的 x 用 $\frac{1}{x}$ 代入，得

$$F_1\cdot\frac{1}{x}+F_2\cdot\frac{1}{x^2}+\cdots+F_{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}=\frac{x^2\left(F_1\cdot\frac{1}{x}-F_n\cdot\frac{1}{x^n}-F_{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n+1}}\right)}{x^2-x-1} \qquad (9)$$

(9)式等號兩邊同乘 x^n，得

$$F_1x^{n-1}+F_2x^{n-2}+\cdots+F_{n-1}x=\frac{F_1x^{n+1}-F_nx^2-F_{n-1}x}{x^2-x-1} \qquad (10)$$

，得證。

定理 1 與系理另證：

令 $Q=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，則 $Q^n=\begin{bmatrix}\cos(n\theta) & -\sin(n\theta)\\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta)\end{bmatrix}$。

將 Q 代入(10)式，得

$$F_1Q^{n-1}+F_2Q^{n-2}+\cdots+F_{n-1}Q=\left(Q^2-Q-I\right)^{-1}\left(F_1Q^{n+1}-F_nQ^2-F_{n-1}Q\right) \qquad (11)$$

(11)式等號左邊矩陣(1,1)元與(2,1)元分別為

$F_1\cos(n-1)\theta+F_2\cos(n-2)\theta+\cdots+F_{n-1}\cos\theta$ 與

$F_1\sin(n-1)\theta+F_2\sin(n-2)\theta+\cdots+F_{n-1}\sin\theta$。

現在計算(11)式的等號右邊：

首先

$$Q^2-Q-I=\begin{bmatrix}\cos2\theta-\cos\theta-1 & -\sin2\theta+\sin\theta\\ \sin2\theta-\sin\theta & \cos2\theta-\cos\theta-1\end{bmatrix}$$

$$=> \left(Q^2-Q-I\right)^{-1}=\frac{1}{(\cos2\theta-\cos\theta-1)^2+(\sin2\theta-\sin\theta)^2}\begin{bmatrix}\cos2\theta-\cos\theta-1 & \sin2\theta-\sin\theta\\ \sin\theta-\sin2\theta & \cos2\theta-\cos\theta-1\end{bmatrix}$$

$$=> \left(Q^2-Q-I\right)^{-1}=\frac{1}{1+4\sin^2\theta}\begin{bmatrix}\cos2\theta-\cos\theta-1 & \sin2\theta-\sin\theta\\ \sin\theta-\sin2\theta & \cos2\theta-\cos\theta-1\end{bmatrix} \qquad (12)$$

將(12)代入(11)得等號右邊為

$$\frac{1}{1+4\sin^2\theta}\begin{bmatrix}\cos 2\theta-\cos\theta-1 & \sin 2\theta-\sin\theta\\ \sin\theta-\sin 2\theta & \cos 2\theta-\cos\theta-1\end{bmatrix}$$
$$\times\begin{bmatrix}\cos(\mathrm{n}+1)\theta-F_n\cos 2\theta-F_{n-1}\cos\theta & -\sin(\mathrm{n}+1)\theta+F_n\sin 2\theta+F_{n-1}\sin\theta\\ \sin(\mathrm{n}+1)\theta-F_n\sin 2\theta-F_{n-1}\sin\theta & \cos(\mathrm{n}+1)\theta-F_n\cos 2\theta-F_{n-1}\cos\theta\end{bmatrix}\quad(13),$$

(13)的(1,1)元的分子為

$$\left(\cos 2\theta-\cos\theta-1\right)\left[\cos\left(n+1\right)\theta-F_n\cos 2\theta-F_{n-1}\cos\theta\right]$$
$$+\left(\sin 2\theta-\sin\theta\right)\left[\sin\left(n+1\right)\theta-F_n\sin 2\theta-F_{n-1}\sin\theta\right]$$
$$=\left(-\cos^2 2\theta+\cos\theta\cos 2\theta+\cos 2\theta-\sin^2 2\theta+\sin\theta\sin 2\theta\right)F_n$$
$$+\left(-\cos 2\theta\cos\theta+\cos^2\theta+\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta+\sin^2\theta\right)F_{n-1}$$
$$+\left[\cos\left(n+1\right)\theta\cos 2\theta-\cos\theta\cos\left(n+1\right)\theta-\cos\left(n+1\right)\theta+\sin 2\theta\sin\left(n+1\right)\theta-\sin\theta\sin\left(n+1\right)\theta\right]$$
$$=\left(\cos 2\theta+\cos\theta-1\right)F_n+F_{n-1}-\cos\left(n+1\right)\theta-\cos n\theta+\cos\left(n-1\right)\theta\text{。}$$

此為系理的結果。

(13)式矩陣的(2,1)元的分子為

$$\left(\sin\theta-\sin 2\theta\right)\left[\cos\left(n+1\right)\theta-F_n\cos 2\theta-F_{n-1}\cos\theta\right]$$
$$+\left(\cos 2\theta-\cos\theta-1\right)\left[\sin\left(n+1\right)\theta-F_n\sin 2\theta-F_{n-1}\sin\theta\right]$$
$$=\left(-\sin\theta\cos 2\theta+\sin 2\theta\cos 2\theta-\cos 2\theta\sin 2\theta+\cos\theta\sin 2\theta+\sin 2\theta\right)F_n$$
$$+\left(-\sin\theta\cos\theta+\sin 2\theta\cos\theta-\cos 2\theta\sin\theta+\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\right)F_{n-1}$$
$$+\left[\sin\theta\cos\left(n+1\right)\theta-\sin 2\theta\cos\left(n+1\right)\theta+\cos 2\theta\sin\left(n+1\right)\theta-\cos\theta\sin\left(n+1\right)\theta-\sin\left(n+1\right)\theta\right]$$
$$=\left(\sin 2\theta+\sin\theta\right)F_n+\left(\sin\theta+\sin\theta\right)F_{n-1}-\sin\left(n+1\right)\theta+\sin\left(n-1\right)\theta-\sin n\theta\text{。}$$

由定理 1 證明可知

$$\left(\sin 2\theta+\sin\theta\right)F_n+\left(\sin\theta+\sin\theta\right)F_{n-1}-\sin\left(n+1\right)\theta+\sin\left(n-1\right)\theta-\sin n\theta$$
$$=2\sin\theta F_{n+1}+\left(2\cos\theta-1\right)\sin\theta F_n-2\sin\left(n+1\right)\theta+\left(2\cos\theta-1\right)\sin n\theta,$$

得證。

參考資料

[1] 陳建燁。費波那契彈(談)正弦--F-sine 卷積恆等式。**科學教育月刊, 407**, 18- 23, 2018。
[2] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley, New York, 2001.