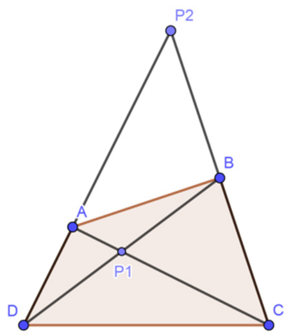
四邊形的等角曲線及相關探討

黃少宏* 吳宜謙 鄭惟仁
國立彰化高級中學

壹、研究動機

在平面上給定一個四邊形ABCD，設其兩對角線交於P_1，$\overleftrightarrow{AD}$ 與$\overleftrightarrow{BC}$ 交於P_2，如圖。我們得知$P = P_1$ 或P_2 時，可滿足$\angle APB = \angle CPD$。除了P_1 與P_2，是否還有其它點？我們討論滿足「$\angle APB = \angle CPD$的所有P點軌跡」，此軌跡本文稱為「四邊形ABCD的等角曲線」，我們對此做一系列的探討與推廣。

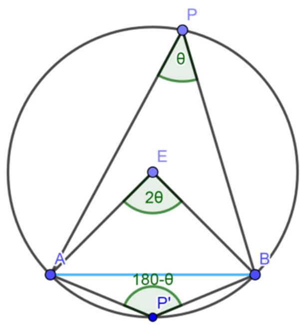


貳、本文

一、正方形的等角曲線

(一) $\angle APB = \theta$或$180° - \theta$的幾何作圖

給定一線段 $\overline{AB}$ 及θ，其中$0° < \theta < 90°$，作等腰三角形EAB 滿足$\overline{EA} = \overline{EB}$ 且$\angle AEB = 2\theta$，以E為圓心，$\overline{EA}$長為半徑作一圓，如圖一。



圖一

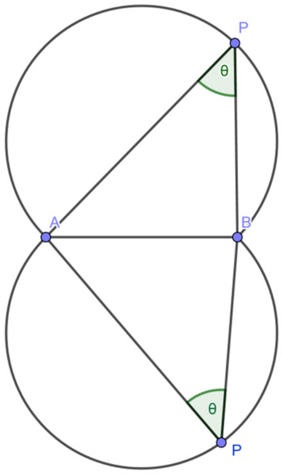
*為本文通訊作者

我們有下列性質：

性質 1：優弧$\widehat{AB}$上的所有點P滿足$\angle APB = \theta$。

性質 2：劣弧$\widehat{AB}$上的所有點P'滿足$\angle AP'B = 180° - \theta$ $(180° - \theta$ 是鈍角)。

將優弧$\widehat{AB}$對$\overline{AB}$作對稱，如圖二。

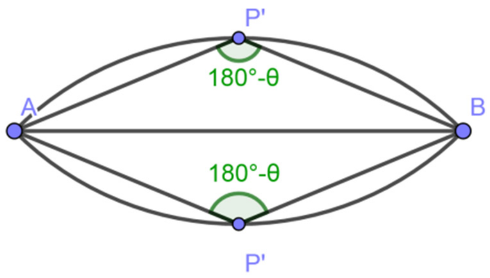


圖二

定義$\overline{AB}$上方$\widehat{AB}$的點所形成的集合為$S^{+}(\overline{AB},\theta)$，$\overline{AB}$下方$\widehat{AB}$的點所形成的集合為$S^{-}(\overline{AB},\theta)$，可得性質 3。

性質 3：滿足$\angle APB = \theta$的所有點P所形成的集合為$S^{+}(\overline{AB},\theta) \cup S^{-}(\overline{AB},\theta)$。

將劣弧$\widehat{AB}$ 對$\overline{AB}$ 作對稱，如圖三。



圖三

定義$\overline{AB}$上方$\widehat{AB}$的點所形成的集合為$S^{+}(\overline{AB}, 180° - \theta)$，$\overline{AB}$下方$\widehat{AB}$的點所形成的集合為$S^{-}(\overline{AB}, 180° - \theta)$，可得性質 4。

性質 4：滿足$\angle AP'B = 180° - \theta$的所有點$P'$所形成的集合為：

$S^{+}(\overline{AB}, 180° - \theta) \cup S^{-}(\overline{AB}, 180° - \theta)$。

性質 5：滿足$\angle APB = 90°$的所有點P所形成的集合為：以$\overline{AB}$為直徑的圓扣掉A、B兩點。

(二) 正方形中$\angle APB=\angle CPD$的軌跡

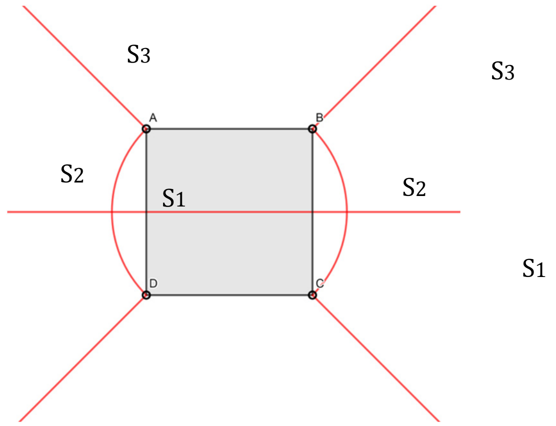
定理 1.

給定一正方形 ABCD，滿足$\angle APB=\angle CPD$ 的 P 點軌跡為 S_1、S_2、S_3 三集合的聯集，其中：

S_1 是過正方形 ABCD 中心 O 且與$\overline{AB}$平行的直線，

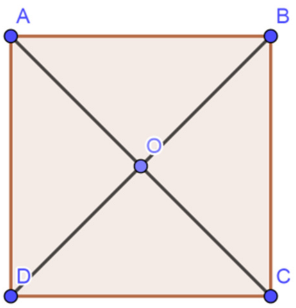
S2 是正方形 ABCD 的外接圓中的劣弧$\widehat{AD}$ 與劣弧$\widehat{BC}$，

S3 是正方形 ABCD 的對角線所在的直線$\overleftrightarrow{AC}$ 及$\overleftrightarrow{BD}$ 扣掉線段$\overline{AC}$ 及$\overline{BD}$。



證明：

設$\angle APB=\angle CPD=\alpha$，對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$的交點為$O$，如圖四。



圖四

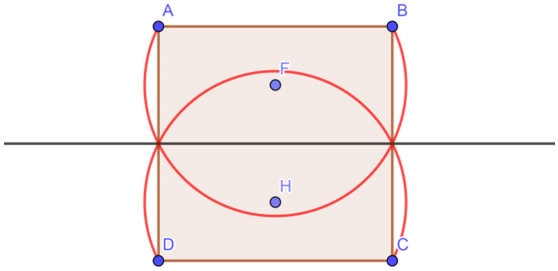
若$\alpha=90°$，由性質 5 得知，只有O點滿足。

當$\alpha>90°$時，由性質 4 得知，不存在這樣的P點。

考慮$\alpha<90°$，分四種情形討論：

1. $S^{+}(\overline{AB},\alpha)\cap S^{-}(\overline{CD},\alpha)$，其交集為空集合。
2. $S^{-}(\overline{AB},\alpha)\cap S^{+}(\overline{CD},\alpha)$

由對稱性可知P點落在過O點且與$\overline{AB}$平行的直線上，如圖五。

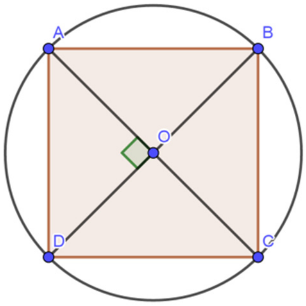


圖五

當$\alpha = 45°$ 時，$S^-(\overline{AB}, 45°)$是以O為圓心，$\overline{OA}$為半徑的優弧$\widehat{AB}$，

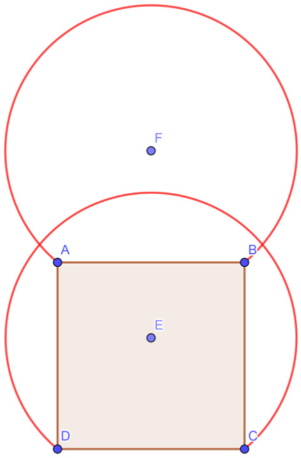
$S^+(\overline{CD}, 45°)$是以O為圓心，$\overline{OA}$為半徑的優弧$\widehat{CD}$，

所以$S^-(\overline{AB}, 45°) \cap S^+(\overline{CD}, 45°)$ =劣弧$\widehat{AD}$ ∪劣弧$\widehat{BC}$。



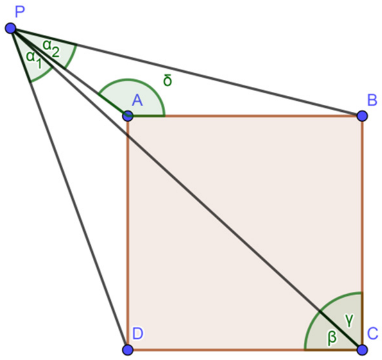
圖六

3. $S^+(\overline{AB}, \alpha) \cap S^+(\overline{CD}, \alpha)$ 如圖七，我們將說明P落在直線$\overleftrightarrow{AC}$上或直線$\overleftrightarrow{BD}$上。

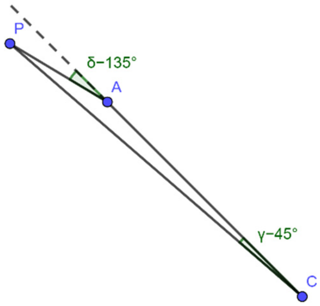


圖七

設$\angle APB = \angle CPD = \alpha$，$\angle DCP = \beta$，$\angle BCP = \gamma$，$\angle PAB = \delta$。利用反證法，設P不在直線$\overleftrightarrow{AC}$上，可設$\gamma > 45°$($0° < \gamma < 45°$處理手法相同)，可知$\delta > 135°$且$\delta + \gamma > 180°$及$\delta - \gamma > 90°$，如圖八的(a)與(b)。



圖八 (a)



圖八 (b)

利用正弦定理：

在三角形PCD中$\frac{\overline{PD}}{\sin\beta}=\frac{\overline{CD}}{\sin\alpha}$

在三角形PAB中$\frac{\overline{PB}}{\sin\delta}=\frac{\overline{AB}}{\sin\alpha}$

合併可得$\frac{\overline{PB}}{\overline{PD}}=\frac{\sin\delta}{\sin\beta}$

在三角形PAD中$\frac{\overline{PD}}{\sin(270°-\delta)}=\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle APD)}$

在三角形PBC中$\frac{\overline{PB}}{\sin\gamma}=\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BPC)}$

因為$\angle APD=\angle BPC$，

可得$\frac{\overline{PB}}{\overline{PD}}=\frac{\sin\gamma}{\sin(270°-\delta)}$

所以$\frac{\overline{PB}}{\overline{PD}}=\frac{sin\delta}{sin\beta}=\frac{\sin\gamma}{\sin(270°-\delta)}$。

因為$\sin\beta=\cos\gamma$，且$\sin\delta=\cos(\delta-90°)$，　$\sin(270°-\delta)=\sin(\delta-90°)$，

可推得 $\frac{\overline{PB}}{\overline{PD}}=\frac{\cos(\delta-90°)}{\cos\gamma}=\frac{\sin\gamma}{\sin(\delta-90°)}$

且$\sin 2\gamma=\sin(2\delta-180°)$

即$\gamma=\delta-90°$或$\gamma+\delta=180°$ (皆不合)故P在直線$\overleftrightarrow{AC}$上，得證。

4. $S^-(\overline{AB},\alpha)\cap S^-(\overline{CD},\alpha)$ 同理可證，P 落在直線$\overleftrightarrow{AC}$上或直線$\overleftrightarrow{BD}$上。

以上定理 1 得證。

(三) 關於正方形的推論

推論 1.

給定一正方形ABCD，滿足∠APB = ∠CPD = ∠APD = ∠BPC的P點軌跡為正方形的中心與S3的聯集。

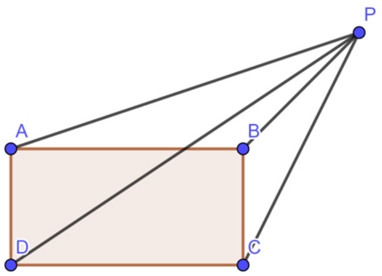
證明：

利用定理 1，取滿足∠APB = ∠CPD與∠APD = ∠BPC軌跡的交集，可得正方形的中心與S3的聯集，而此集合剛好同時滿足∠APB = ∠CPD = ∠APD = ∠BPC，得證。

二、矩形的等角曲線

(一) 利用內積處理矩形(長= **4**，寬= **2**)中∠**APB** = ∠**CPD**的軌跡

我們接下來考慮矩形ABCD的情形。設$A(-2,1)$，$B(2,1)$，$C(2,-1)$，$D(-2,-1)$，設$P(x,y)$滿足∠APB = ∠CPD，如圖九。



圖九

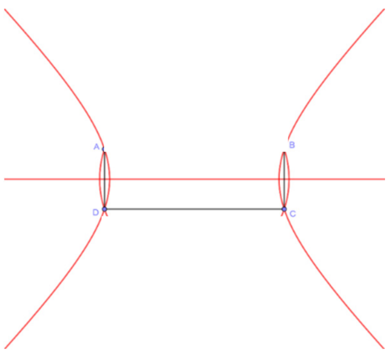
定理 2.

矩形 ABCD 中，A(-2,1)，B(2,1)，C(2,-1)，D(-2,-1)，滿足∠APB=∠CPD 的 P 點軌跡為 T1、T2、T3 三集合的聯集，其中：

T1： $y=0$

T2：$x^2+y^2-5=0$，但$|x|\geq 2$

T3：$x^2-y^2-3=0$，但$|x|\geq 2$



證明：

利用$\cos(\angle APB)=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|}=\cos(\angle CPD)=\frac{\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}}{|\overrightarrow{PC}||\overrightarrow{PD}|}$

可得 $\frac{(-2-x,1-y)\cdot(2-x,1-y)}{\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}=\frac{(2-x,-1-y)\cdot(-2-x,-1-y)}{\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}}$

化簡成

$$\frac{x^2-4+(y-1)^2}{\sqrt{[(x+2)^2+(y-1)^2][(x-2)^2+(y-1)^2]}}=\frac{x^2-4+(y+1)^2}{\sqrt{[(x-2)^2+(y+1)^2][(x+2)^2+(y+1)^2]}}\text{----(✡)}$$

平方並交叉相乘

$$[x^2-4+(y-1)^2]^2[(x-2)^2+(y+1)^2][(x+2)^2+(y+1)^2]$$
$$=[x^2-4+(y+1)^2]^2[(x+2)^2+(y-1)^2][(x-2)^2+(y-1)^2]$$
$$\Rightarrow[(x^2-4)^2+2(x^2-4)(y-1)^2+(y-1)^4][(x^2-4)^2+(2x^2+8)(y+1)^2+(y+1)^4]$$
$$=[(x^2-4)^2+2(x^2-4)(y+1)^2+(y+1)^4][(x^2-4)^2+(2x^2+8)(y-1)^2+(y-1)^4]$$
$$\Longrightarrow(x^2-4)^2[(2x^2+8)\cdot 4y+(y+1)^4-(y-1)^4]$$
$$+2(x^2-4)[(x^2-4)^2(-4y)+(y-1)^2(y+1)^2(4y)]$$
$$+[(y-1)^4-(y+1)^4](x^2-4)^2+(y-1)^2(y+1)^2(2x^2+8)(-4y)=0$$
$$\Longrightarrow(x^2-4)^2\cdot 4y\cdot(16)+16(y-1)^2(y+1)^2(-4y)=0$$
$$\Longrightarrow 64y[(x^2-4)^2-(y^2-1)^2]=0$$
$$\Longrightarrow 64y(x^2+y^2-5)(x^2-y^2-3)=0$$

所以$P(x,y)$落在$y=0$或$x^2+y^2-5=0$或$x^2-y^2-3=0$的圖形上。-----(❖)

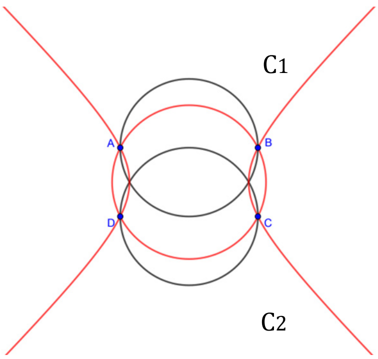
然而並不是所有的點都會滿足$\angle APB=\angle CPD$（$\because$ 平方會增根）

$P(x,y)$須滿足(✡)中分子要同正或同負或同為0，

故$[x^2-4+(y-1)^2][x^2-4+(y+1)^2]\geq 0$，

即同時在兩圓C1：$x^2+(y-1)^2=4$，C2：$x^2+(y+1)^2=4$的內部或外部，

而(❖)中$x^2+y^2-5=0$與兩圓C1、C2交於$(\pm2,\pm1)$，及$x^2-y^2-3=0$與兩圓C1、C2交於$(\pm\sqrt{3},0)$，如圖十。



圖十

若要同時在兩圓外部，則$|x| \geq 2$，
即P的軌跡為T1、T2、T3的聯集，其中T1：$y = 0$，T2： $x^2 + y^2 - 5 = 0$ 但$|x| \geq 2$，
T3：$x^2 - y^2 - 3 = 0$但$|x| \geq 2$。

以上定理 2 得證。

(二) 矩形(長$= \mathbf{4}$，寬$= \mathbf{2}$)中$\angle \mathbf{APB} + \angle \mathbf{CPD} = \mathbf{180°}$的軌跡

推論 2.

矩形ABCD中，A$(-2,1)$，B$(2,1)$，C$(2,-1)$，D$(-2,-1)$，滿足$\angle \mathrm{APB} + \angle \mathrm{CPD} = 180°$的P點軌跡為T2′、T3′的聯集，其中：
T2′： $x^2 + y^2 - 5 = 0$，但$|x| < 2$
T3′： $x^2 - y^2 - 3 = 0$，但$|x| < 2$

證明：

在(✡)中分子若為異號，表示$\cos(\angle \mathrm{APB}) = -\cos(\angle \mathrm{CPD})$，即$\angle \mathrm{APB} + \angle \mathrm{CPD} = 180°$，其須滿足$|x| < 2$，可得推論 2。

(三) 任意矩形中$\angle \mathbf{APB} = \angle \mathbf{CPD}$的軌跡

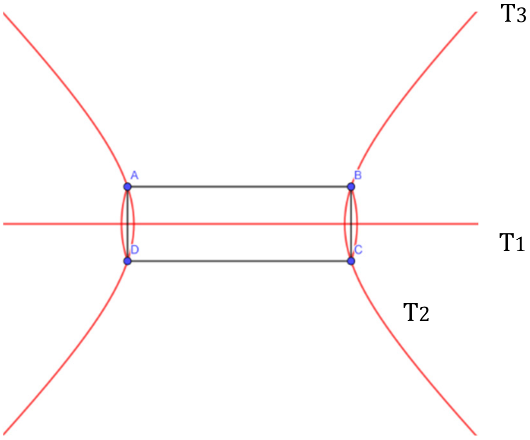
考慮長寬任意的矩形，設A$(-\mathrm{k}, 1)$，B$(\mathrm{k}, 1)$，C$(\mathrm{k}, -1)$，D$(-\mathrm{k}, -1)$，其中$\mathrm{k} > 0$。

定理 3.

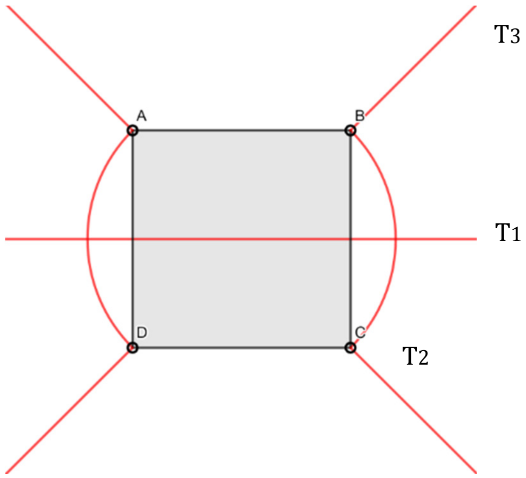
矩形 ABCD 中，A(-k,1)，B(k,1)，C(k,-1)，D(-k,-1)，滿足∠APB=∠CPD 的 P 點軌跡為 T1、T2、T3 三集合的聯集，其中：
T1：y=0
T2：$x^2+y^2=k^2+1$，但$|x| \geq k$
T3：$x^2-y^2=k^2-1$，但$|x| \geq k$

由 k 的值分成三種情形：

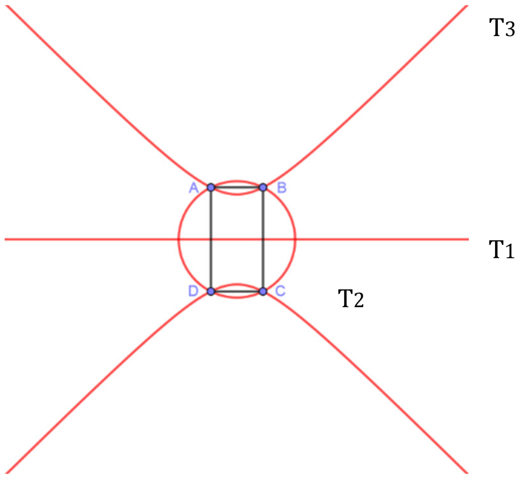
1.　$k > 1$



2.　$k = 1$



3.　$0 < k < 1$



證明：

設$P(x,y)$滿足$\angle APB=\angle CPD$，相同的討論手法可得

$$\frac{x^2-k^2+(y-1)^2}{\sqrt{[(x+k)^2+(y-1)^2][(x-k)^2+(y-1)^2]}}=\frac{x^2-k^2+(y+1)^2}{\sqrt{[(x-k)^2+(y+1)^2][(x+k)^2+(y+1)^2]}},$$

及$16k^2y(x^2+y^2-k^2-1)(x^2-y^2-k^2+1)=0$，

即$P(x,y)$落在 $y=0$ 或 $x^2+y^2=k^2+1$ 或 $x^2-y^2=k^2-1$的圖形上。-----(＊)

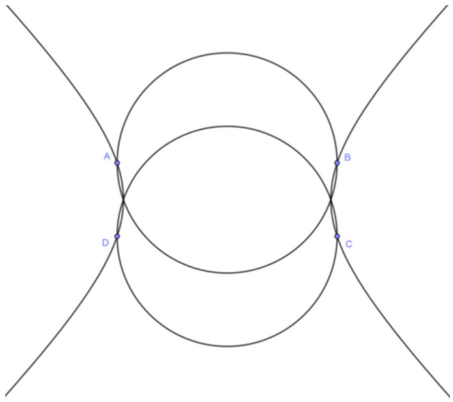
同樣要滿足$P(x,y)$同時在兩圓 C_1^k： $x^2+(y-1)^2=k^2$，C_2^k： $x^2+(y+1)^2=k^2$

的內部或外部。相同的討論，$x^2+y^2=k^2+1$ 須滿足$|x|\geq k$。

而(＊)中，$x^2-y^2=k^2-1$與兩圓C_1^k、C_2^k 交於$(\pm k，\pm 1)$及$(\pm\sqrt{k^2-1}，0)$。

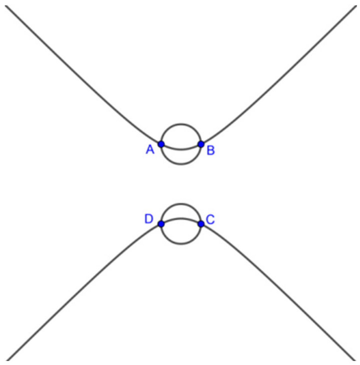
由k的值分三種情形討論：

1. $k>1$，則$x^2-y^2=k^2-1$是左右開的雙曲線，若同時要在兩圓C_1^k、C_2^k的外部，則$|x|\geq k$，如圖十一。



圖十一

2. $k=1$，則$x^2-y^2=0$，是正方形ABCD的對角線，情形如定理 1。
3. $0<k<1$，則$x^2-y^2=k^2-1$是上下開的雙曲線，若要同時在兩圓C_1^k、C_2^k的外部，則$|x|\geq k$，如圖十二。



圖十二

以上定理 3 得證。

(四) 任意矩形中∠APB + ∠CPD = 180°的軌跡

推論 3.

矩形ABCD中，$A(-k,1)$，$B(k,1)$，$C(k,-1)$，$D(-k,-1)$，滿足 ∠APB + ∠CPD = 180°的P點軌跡為T2′、T3′的聯集，其中：

T2′： $x^2+y^2=k^2+1$，但$|x|<k$。

T3′： $x^2-y^2=k^2-1$，但$|x|<k$。

三、等腰梯形的等角曲線

(一) 利用正切差角公式處理等腰梯形中∠APB = ∠CPD的軌跡

考慮等腰梯形ABCD，其中$\overline{AB}//\overline{CD}$，且$\overline{AD}=\overline{BC}$。

定理 4.

梯形 ABCD 中，$A(-a,1)$，$B(a,1)$，$C(b,-1)$，$D(-b,-1)$，其中 a>0 且 b>0，$P(x,y)$滿足∠APB=∠CPD 的$P(x,y)$軌跡會落在曲線族Γ1 及Γ2上，其中：

Γ_1：$(a-b)y(x^2+y^2-1+ab)-(a+b)(x^2-y^2+1-ab)=0$

Γ_2：$(a+b)y(x^2+y^2-1-ab)-(a-b)(x^2-y^2+1+ab)=0$

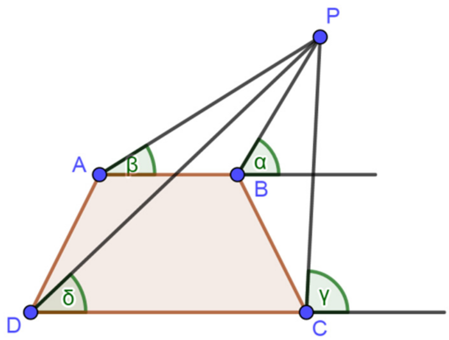
證明：

分二種情形考慮，P點在$\overleftrightarrow{AB}$,$\overleftrightarrow{CD}$的同側或異側。設$A(-a,1)$，$B(a,1)$，$C(b,-1)$，$D(-b,-1)$，$P(x,y)$ 。

設$\overline{PB}$與$\overleftrightarrow{AB}$的夾角為α，$\overline{PA}$與$\overleftrightarrow{AB}$的夾角為β，

$\overline{PC}$與$\overleftrightarrow{CD}$的夾角為γ，$\overline{PD}$與$\overleftrightarrow{CD}$的夾角為δ。

1. 同側，如圖十三。



圖十三

$\angle APB = \angle CPD$，可推得$\alpha - \beta = \gamma - \delta$，由tan的差角公式

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan(\gamma - \delta) \Rightarrow \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\tan\gamma - \tan\delta}{1 + \tan\gamma\tan\delta}$$

利用直線與x軸正向所夾的斜角θ取tan值會等於該直線的斜率，代入上式：

可得 $$\frac{\left(\frac{y-1}{x-a}\right) - \left(\frac{y-1}{x+a}\right)}{1 + \left(\frac{y-1}{x-a}\right)\left(\frac{y-1}{x+a}\right)} = \frac{\left(\frac{y+1}{x-b}\right) - \left(\frac{y+1}{x+b}\right)}{1 + \left(\frac{y+1}{x-b}\right)\left(\frac{y+1}{x+b}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2a(y-1)}{x^2-a^2}}{1 + \frac{(y-1)^2}{x^2-a^2}} = \frac{\frac{2b(y+1)}{x^2-b^2}}{1 + \frac{(y+1)^2}{x^2-b^2}}$$

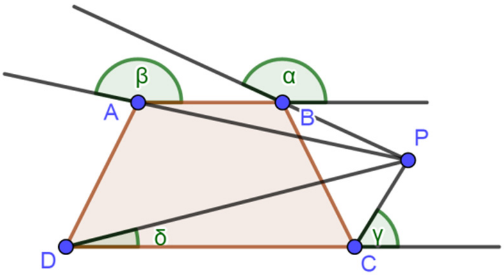
$$\Rightarrow \frac{2a(y-1)}{x^2 - a^2 + (y-1)^2} = \frac{2b(y+1)}{x^2 - b^2 + (y+1)^2}$$

$$\Rightarrow a(y-1)[x^2 - b^2 + (y+1)^2] - b(y+1)[x^2 - a^2 + (y-1)^2] = 0$$

$$\Rightarrow (y^2 - 1)(ay + a - by + b) + y[a(x^2 - b^2) - b(x^2 - a^2)] - a(x^2 - b^2) - b(x^2 - a^2) = 0$$

$$\Rightarrow (a - b)y[x^2 + y^2 - 1 + ab] - (a + b)[x^2 - y^2 + 1 - ab] = 0$$

2. 異側，如圖十四。



圖十四

$\angle APB = \angle CPD$，可推得$\beta - \alpha = \gamma - \delta$

由tan 的差角公式可得 $\tan(\beta - \alpha) = \tan(\gamma - \delta)$

$\Rightarrow -\tan(\alpha - \beta) = \tan(\gamma - \delta)$

如同 1.的手法，可得

$(a + b)y(x^2 + y^2 - 1 - ab) - (a - b)(x^2 - y^2 + 1 + ab) = 0$

以上定理 4 得證。

(二) 關於等腰梯形的推論

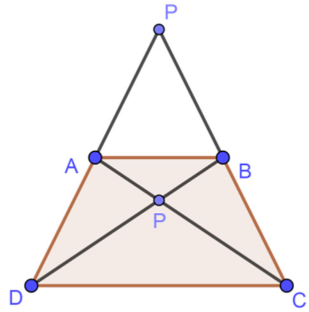
推論 4.

當$a=b=k$時，Γ1 為$x^2-y^2=k^2-1$，Γ2 為$y(x^2+y^2-1-k^2)=0$，此特例是定理 3 的情況，此推論得以驗證之前的定理是正確的。

(三) 等腰梯形等角曲線的延伸性質

$a=1$，$b=2$，即$A(-1,1)$, $B(1,1)$, $C(2,-1)$, $D(-2,-1)$所形成的等腰梯形，我們觀察Γ1、Γ2的特性，得到以下性質：

1. 梯形ABCD，兩對角線的交點$(0,\frac{1}{3})$，兩腰延長線的交點$(0,3)$皆滿足$\angle APB=\angle CPD$，如圖十五。



圖十五

2. Γ1：$(a-b)y(x^2+y^2-1+ab)-(a+b)(x^2-y^2+1-ab)=0$

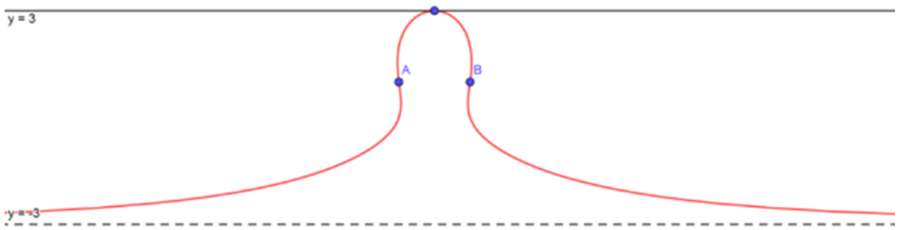
   可整理成 $(y+3)x^2=-y^3+3y^2-y+3=(y^2+1)(3-y)$

   其中y必須滿足$(y+3)(3-y)\geq 0$，但$y+3\neq 0$

   即其圖形在$-3<y\leq 3$的範圍內，且$y=-3$ 是其漸近線。

   由於$x^2=\frac{(y^2+1)(3-y)}{y+3}$，利用GeoGebra，可得Γ1的簡圖為圖十六，

   且Γ1 會過$A(-1,1)$, $B(1,1)$兩點及$(0,3)$。



圖十六

3. Γ2：$(a+b)y(x^2+y^2-1-ab)-(a-b)(x^2-y^2+1+ab)=0$

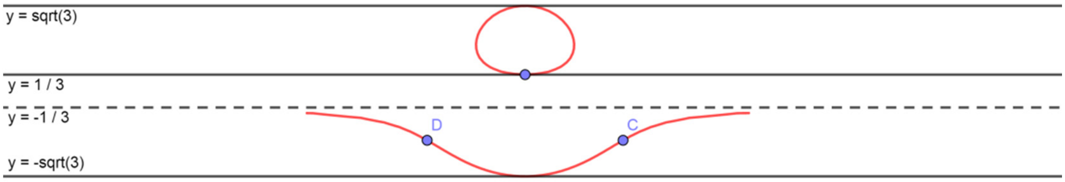
   可整理成 $(3y+1)x^2=-3y^3+y^2+9y-3=(y^2-3)(1-3y)$

y 必須滿足$(3y+1)(y^2-3)(1-3y)\geq 0$，但$3y+1\neq 0$，

即其圖形在 $-\sqrt{3}\leq y<-\frac{1}{3}$ ，$\frac{1}{3}\leq y\leq\sqrt{3}$ 的範圍內，且$y=-\frac{1}{3}$ 是其漸近線。

由於$x^2=\frac{(y^2-3)(1-3y)}{(3y+1)}$，

可得Γ2 的簡圖為圖十七，Γ2 會過$C(2,-1), D(-2,-1)$兩點及$(0,\frac{1}{3})$。



圖十七

4. 我們觀察出Γ1、Γ2 的圖形近似於(形似)德・斯路斯蚌線：

$(x-1)y^2=-x^3+(t+1)x^2$。

德・斯路斯蚌線是一個平面曲線族，在極坐標的方程式為：

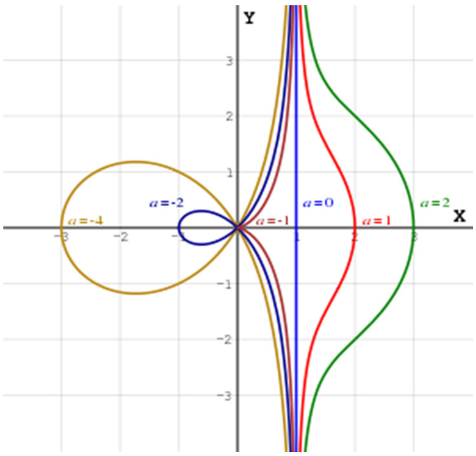
$$r=\sec\theta+t\cos\theta$$

而$r=\frac{1}{\cos\theta}+t\cos\theta$，可推得$r\cos\theta=1+t\cos^2\theta$，

利用$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，可換成 $x=1+t\left(\frac{x^2}{r^2}\right)$

$\Rightarrow (x-1)(x^2+y^2)=tx^2$

$\Rightarrow (x-1)y^2=-x^3+(t+1)x^2$



▲德・斯路斯蚌線　　$r=\sec\theta+a\cos\theta$

說明：

由 2. 的討論，Γ_1可表示成

$$(y+3)x^2=-y^3+3y^2-y+3\ =-(y+4)^3+15(y+4)^2-73(y+4)+119$$

將Γ_1的圖形對稱於$y=x$，可變成

$\Gamma_1{}'$：$(x+3)y^2=-(x+4)^3+15(x+4)^2-73(x+4)+119$

再將$\Gamma_1{}'$的圖形往右平移4單位，可變成

$\Gamma_1{}''$：$(x-1)y^2=-x^3+15x^2-73x+119$

當 $|y|$ 夠大時，$\Gamma_1{}''$形似於$\mathrm{t}=14$的德・斯路斯蚌線：$(x-1)y^2=-x^3+15x^2$。

同樣地，Γ_2可表示成

$$3\left(y+\tfrac{1}{3}\right)x^2=-3y^3+y^2+9y-3\ =-3\left(y+\tfrac{4}{3}\right)^3+13\left(y+\tfrac{4}{3}\right)^2-\tfrac{29}{3}\left(y+\tfrac{4}{3}\right)-\tfrac{55}{9}，$$

即 $\left(y+\frac{1}{3}\right)x^2=-\left(y+\frac{4}{3}\right)^3+\frac{13}{3}\left(y+\frac{4}{3}\right)^2-\frac{29}{9}\left(y+\frac{4}{3}\right)-\frac{55}{27}$。

將Γ_2的圖形對稱於$y=x$，可變成

$$\Gamma_2{}'：\left(x+\frac{1}{3}\right)y^2=-\left(x+\frac{4}{3}\right)^3+\frac{13}{3}\left(x+\frac{4}{3}\right)^2-\frac{29}{9}\left(x+\frac{4}{3}\right)-\frac{55}{27}$$

再將$\Gamma_2{}'$的圖形往右平移$\frac{4}{3}$單位，可變成

$$\Gamma_2{}''：(x-1)y^2=-x^3+\tfrac{13}{3}x^2-\tfrac{29}{9}x-\tfrac{55}{27}$$

當$|y|$ 夠大時，$\Gamma_2{}''$形似於 $\mathrm{t}=\frac{10}{3}$ 的德・斯路斯蚌線：$(x-1)y^2=-x^3+\frac{13}{3}x^2$。

接著對於所有$\mathrm{a}\neq\mathrm{b}$，我們討論Γ_1及Γ_2。

定理 5.

對於所有 $\mathrm{a}\neq\mathrm{b}$ 的曲線Γ_1及Γ_2，將其圖形對稱於$y=x$，並做適當的平移，當 $|\mathrm{y}|$ 夠大時，其圖形會形似於德・斯路斯蚌線：$(x-1)y^2=-x^3+(t+1)x^2$，

對於Γ_1，$\mathrm{t}=2-4\left(\frac{\mathrm{a+b}}{\mathrm{a-b}}\right)$，對於$\Gamma_2$，$\mathrm{t}=2-4\left(\frac{\mathrm{a-b}}{\mathrm{a+b}}\right)$。

證明：

Γ_1：$(\mathrm{a}-\mathrm{b})y(x^2+y^2-1+\mathrm{ab})-(\mathrm{a}+\mathrm{b})(x^2-y^2+1-\mathrm{ab})=0$

將Γ_1整理成

$$[(\mathrm{a}-\mathrm{b})y-(\mathrm{a}+\mathrm{b})]x^2=-(\mathrm{a}-\mathrm{b})y^3-(\mathrm{a}+\mathrm{b})y^2-(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{ab}-1)y+(\mathrm{a}+\mathrm{b})(1-\mathrm{ab})$$

左右同除以$(\mathrm{a}-\mathrm{b})$：

$$\left(y-\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}\right)x^2=-y^3-\left(\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}\right)y^2-(\mathrm{ab}-1)y+\frac{(\mathrm{a}+\mathrm{b})(1-\mathrm{ab})}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}$$

$$=-\left[y-\left(\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}-1\right)\right]^3-3y^2\left(\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}-1\right)+3y\left(\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}-1\right)^2-\left(\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}-1\right)^3$$

$$-\left(\frac{a+b}{a-b}\right)y^2-(ab-1)y+\frac{(a+b)(1-ab)}{a-b},$$

$$=-\left[y-\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}+1\right]^3+\left[3-4\left(\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}\right)\right]\left[y-\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}+1\right]^2+c1\left[y-\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}+1\right]+c0$$

其中$c1$、$c0$可用a、b表示。

將Γ1的圖形對稱於$y=x$，可變成

$$\Gamma1'：\left(x-\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}\right)y^2=-\left[x-\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}+1\right]^3+\left[3-4\left(\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}\right)\right]\left[x-\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}+1\right]^2$$

$$+c1\left[x-\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}+1\right]+c0$$

再將Γ1′的圖形往右平移$\left(1-\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}\right)$單位，可變成

$$\Gamma1''：(x-1)y^2=-x^3+\left[3-4\left(\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}\right)\right]x^2+c1x+c0$$

Γ1″形似於$\mathrm{t}=2-4\left(\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}\right)$的德・斯路斯蚌線。

$$\Gamma2：(\mathrm{a}+\mathrm{b})y(x^2+y^2-1-\mathrm{ab})-(\mathrm{a}-\mathrm{b})(x^2-y^2+1+\mathrm{ab})=0$$

將Γ2整理成

$$[(\mathrm{a}+\mathrm{b})y-(\mathrm{a}-\mathrm{b})]x^2=-(\mathrm{a}+\mathrm{b})y^3-(\mathrm{a}-\mathrm{b})y^2+(\mathrm{a}+\mathrm{b})(\mathrm{ab}+1)y+(\mathrm{a}-\mathrm{b})(1+\mathrm{ab})$$

左右同除以$(\mathrm{a}+\mathrm{b})$：

$$\left(y-\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}\right)x^2=-y^3-\left(\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}\right)y^2+(\mathrm{ab}+1)y+\frac{(\mathrm{a}-\mathrm{b})(1+\mathrm{ab})}{\mathrm{a}+\mathrm{b}},$$

$$=-\left[y-\left(\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}-1\right)\right]^3-3y^2\left(\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}-1\right)+3y\left(\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}-1\right)^2-\left(\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}-1\right)^3$$

$$-\left(\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}\right)y^2+(\mathrm{ab}+1)y+\frac{(\mathrm{a}-\mathrm{b})(1+\mathrm{ab})}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}$$

$$=-\left[y-\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}+1\right]^3+\left[3-4\left(\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}\right)\right]\left[y-\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}+1\right]^2+d1\left[y-\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}+1\right]+d0$$

其中d1、d0可用a、b表示。

將Γ2的圖形對稱於$y=x$，可變成

$$\Gamma2'：\left(x-\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}\right)y^2=-\left[x-\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}+1\right]^3+\left[3-4\left(\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}\right)\right]\left[x-\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}+1\right]^2$$

$$+d1\left[x-\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}+1\right]+d0$$

再將$\Gamma2'$的圖形往右平移$\left(1-\frac{\mathrm{a-b}}{\mathrm{a+b}}\right)$單位，可變成

$\Gamma2''$：$(x-1)y^2=-x^3+\left[3-4\left(\frac{\mathrm{a-b}}{\mathrm{a+b}}\right)\right]x^2+d1x+d0$

$\Gamma2''$近似於$\mathrm{t}=2-4\left(\frac{\mathrm{a-b}}{\mathrm{a+b}}\right)$的德・斯路斯蚌線。

以上定理 5 得證。

四、任意四邊形的等角曲線

(一) 利用正切差角公式處理任意四邊形中$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{CPD}$的軌跡

考慮任意四邊形ABCD，設A(a1, a2)，B(b1, b2)，C(c1, c2)，D(d1, d2)，$\mathrm{P}(x,y)$。

定理 6.

四邊形 ABCD，A(a1, a2)，B(b1, b2)，C(c1, c2)，D(d1, d2)。

令以$\overline{\mathrm{AB}}$為直徑的圓之函數$\mathrm{F1}(x,y)$ 及以$\overline{\mathrm{CD}}$為直徑的圓之$\mathrm{F2}(x,y)$

$$\mathrm{F1}(x,y)=(x-\mathrm{a1})(x-\mathrm{b1})+(y-\mathrm{a2})(y-\mathrm{b2})$$

$$\mathrm{F2}(x,y)=(x-\mathrm{c1})(x-\mathrm{d1})+(y-\mathrm{c2})(y-\mathrm{d2})$$

令過 A、B 兩點的直線之函數$\mathrm{L1}(x,y)$ 及過 C、D 兩點的直線之函數$\mathrm{L2}(x,y)$

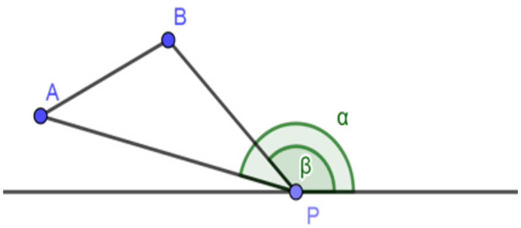
$$\mathrm{L1}(x,y)=(\mathrm{b2}-\mathrm{a2})x+(\mathrm{a1}-\mathrm{b1})y+(\mathrm{a2b1}-\mathrm{a1b2})$$

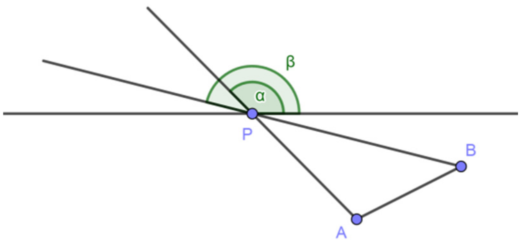
$$\mathrm{L2}(x,y)=(\mathrm{d2}-\mathrm{c2})x+(\mathrm{c1}-\mathrm{d1})y+(\mathrm{c2d1}-\mathrm{c1d2})$$

若$\mathrm{P}(x,y)$滿足$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{CPD}$，則P(x, y)落在曲線$\frac{\mathrm{L1}(x,y)}{\mathrm{F1}(x,y)}=\pm\frac{\mathrm{L2}(x,y)}{\mathrm{F2}(x,y)}$ 上。

證明：

設$\overleftrightarrow{\mathrm{AP}}$與過P的水平線夾角為α，$\overleftrightarrow{\mathrm{BP}}$與過P的水平線夾角為β，如圖十八。





圖十八

可得 $\tan\angle\mathrm{APB}=\pm\tan(\alpha-\beta)=\pm\frac{\frac{y-\mathrm{a2}}{x-\mathrm{a1}}-\frac{y-\mathrm{b2}}{x-\mathrm{b1}}}{1+\left(\frac{y-\mathrm{a2}}{x-\mathrm{a1}}\right)\left(\frac{y-\mathrm{b2}}{x-\mathrm{b1}}\right)}=\pm\frac{(y-\mathrm{a2})(x-\mathrm{b1})-(y-\mathrm{b2})(x-\mathrm{a1})}{(x-\mathrm{a1})(x-\mathrm{b1})+(y-\mathrm{a2})(y-\mathrm{b2})}$

$$=\pm\frac{(\mathrm{b2}-\mathrm{a2})x+(\mathrm{a1}-\mathrm{b1})y+(\mathrm{a2b1}-\mathrm{a1b2})}{(x-\mathrm{a1})(x-\mathrm{b1})+(y-\mathrm{a2})(y-\mathrm{b2})}$$

令分母 $(x-\mathrm{a1})(x-\mathrm{b1})+(y-\mathrm{a2})(y-\mathrm{b2})=\mathrm{F1}(x,y)$

　分子 $(b_2-a_2)x+(a_1-b_1)y+(a_2b_1-a_1b_2)=L_1(x,y)$

我們可知$F_1(x,y)=0$是以$\overline{AB}$為直徑的圓，$L_1(x,y)=0$是過A、B兩點的直線。

同理可得

$$\tan\angle CPD=\pm\frac{\frac{y-c_2}{x-c_1}-\frac{y-d_2}{x-d_1}}{1+\left(\frac{y-c_2}{x-c_1}\right)\left(\frac{y-d_2}{x-d_1}\right)}=\pm\frac{(y-c_2)(x-d_1)-(y-d_2)(x-c_1)}{(x-c_1)(x-d_1)+(y-c_2)(y-d_2)}$$

$$=\pm\frac{(d_2-c_2)x+(c_1-d_1)y+(c_2d_1-c_1d_2)}{(x-c_1)(x-d_1)+(y-c_2)(y-d_2)}$$

令分母 $(x-c_1)(x-d_1)+(y-c_2)(y-d_2)=F_2(x,y)$

　分子 $(d_2-c_2)x+(c_1-d_1)y+(c_2d_1-c_1d_2)=L_2(x,y)$

我們可知$F_2(x,y)=0$是以$\overline{CD}$為直徑的圓，$L_2(x,y)=0$是過C、D兩點的直線。

當$\angle APB=\angle CPD$時，則$\tan\angle APB=\tan\angle CPD$，可得$\frac{L_1(x,y)}{F_1(x,y)}=\pm\frac{L_2(x,y)}{F_2(x,y)}$。

以上定理 6 得證。

(二) 關於任意四邊形的推論

推論 5.

　　若$P(x,y)$滿足$\angle APB+\angle CPD=90°$，則$P(x,y)$落在曲線 $\frac{L_1(x,y)}{F_1(x,y)}\times\frac{L_2(x,y)}{F_2(x,y)}=\pm1$ 上。

證明：

　$\tan\angle APB\times\tan\angle CPD=\tan\angle APB\times\cot\angle APB=1$

即$(\pm\frac{L_1(x,y)}{F_1(x,y)})\times(\pm\frac{L_2(x,y)}{F_2(x,y)})=1$，得證。

參、參考文獻

德・斯路斯蚌線－維基百科。

吳張祺，林昱劭。四邊形上的「等角分點」。中華民國第四十六屆中小學科展。

肆、致謝

特別感謝指導老師：龔詩尹老師、楊昌宸老師。