$\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\right]=\left[\sqrt[3]{8n+3}\right]=\left[\sqrt[3]{8n+4}\right]$的一個初等證明

許閔揚

彰化縣立彰化藝術高級中學

壹、前言

在參考資料[3]中，彰師大陳國傑老師以數論的方式證明了 Ramanujan 等式 $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$，其中 $n\geq 0$，n是整數，$\left[x\right]$是小於或等於x的最大整數。之後李錦鎣老師用微積分詳細地討論這個等式並推廣出一系列結果[1][2]，其中他給出了下列等式 $\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\right]=\left[\sqrt[3]{8n+3}\right]=\left[\sqrt[3]{8n+4}\right]$並證明，對於這個屬於初等數論的等式，我們用陳國傑老師在文章[3]的技巧，也找出了一個數論方式的證明。

貳、證明$\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\right]=\left[\sqrt[3]{8n+3}\right]=\left[\sqrt[3]{8n+4}\right]$

在證明之前，我們需要以下兩個預備定理。

預備定理 1: $n+\dfrac{1}{6}<\sqrt[3]{n^3+n^2}$ ，n是一個正整數。

證明：很明顯，

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{n^3+n^2}>n+\frac{1}{6}\\
\Leftrightarrow\ & n^3+n^2>\left(n+\frac{1}{6}\right)^3\\
\Leftrightarrow\ & n^3+n^2-(n+\frac{1}{6})^3>0\\
\Leftrightarrow\ & n^2-\frac{1}{6}n-\frac{1}{108}>0\\
\Leftrightarrow\ & \left(n-\frac{1}{12}\right)^2>\frac{7}{432}\text{。}
\end{aligned}$$

因最後一式對所有正整數n均成立，得證。

預備定理 2： $\sqrt[3]{n^3+2n^2+n} > n+\frac{1}{2}$ ， n是一個正整數。

證明：很明顯，

$$\sqrt[3]{n^3+2n^2+n} > n+\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ n^3+2n^2+n > (n+\frac{1}{2})^3$$

$$\Leftrightarrow\ n^3+2n^2+n-(n+\frac{1}{2})^3 > 0$$

$$\Leftrightarrow\ n^2+\frac{1}{2}n-\frac{1}{4} > 0$$

$$\Leftrightarrow\ \left(n+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{5}{16} > 0 \text{。}$$

因最後一式對所有正整數n均成立，得證。

定理 1： $\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\right]=\left[\sqrt[3]{8n+3}\right]=\left[\sqrt[3]{8n+4}\right]$ $, n\ge 0$ ， n是整數。

證明：

$n=0$時，定理明顯成立，因此以下我們考慮$n\ge 1$的情形。

首先對於任一整數m，$m^3\equiv i\ (mod\ 8)$, $i=0,1,3,5,7.$， 因此我們可以找到一個整數k使得

$$k^3\le 8n+3<8n+4<(k+1)^3 \qquad (1)$$

另一方面，我們要證明下列不等式:

$$\sqrt[3]{8n+3}<\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}<\sqrt[3]{8n+4} \qquad (2)$$

(2)式成立

$$\Leftrightarrow 8n+3<2n+1+3\sqrt[3]{n^3+n^2}+3\sqrt[3]{n^3+2n^2+n}<8n+4$$

$$\Leftrightarrow 6n+2<3\sqrt[3]{n^3+n^2}+3\sqrt[3]{n^3+2n^2+n}<6n+3$$

$$\Leftrightarrow 2n+\frac{2}{3}<\sqrt[3]{n^3+n^2}+\sqrt[3]{n^3+2n^2+n}<2n+1 \tag{3}$$

由預備定理 1，得

$$n+\frac{1}{6}<\sqrt[3]{n^3+n^2}<n+\frac{1}{3} \tag{4}$$

另一方面，由預備定理 2，得

$$n+\frac{1}{2}<\sqrt[3]{n^3+2n^2+n}<n+\frac{2}{3} \tag{5}$$

由(4)(5)可得(3)，又(3)等價於(2)，由(1)(2)即可得到

$$\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\right]=\left[\sqrt[3]{8n+3}\right]=\left[\sqrt[3]{8n+4}\right]。$$

參、結語

本文所探討的問題屬於初等數論，當我們閱讀李錦鎣老師在數學傳播的文章時，我們就思考能否有個不用微積分的證明方式？ 幸運的是，在學習了參考資料[3]的技巧後，我們順利的找到了。在參考資料[1][2]中李錦鎣老師發現並證明了許多類似的等式，有興趣的讀者也可以嘗試看看是否有其他的證明方式。

參考文獻

1.李錦鎣(2015, 9)。**等式$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right]=\left[\sqrt{9n+8}\right]$成成立嗎?**。數學傳播季刊第 155 期。

2.李錦鎣(2016, 3)。**等式$\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\right]=\left[\sqrt[3]{8n+4}\right]$不是一個孤立的等式**。數學傳播季刊第 157 期。

3.Kuo-Jye Chen（2014）：On a problem proposed by Ramanujan , 2014 彰化師範大學自然科學 研討會會議手冊。http://science.ncue.edu.tw/journal/article/1-2-7.pdf