莫必烏斯帶切割及輪環結的動態電腦圖形製作在數學算板上的實踐

林保平

臺北市立大學數學系退休副教授

壹、數學算板簡介

數學算板是一個動態數學軟體程式，是作者退休之後獨立製作的動態數學程式，將之前利用 Geometer's Sketchpad（桌上型程式） 及 java Sketchpad（網路程式）上製作的大部分數學物件程式，讀取並融入其中（200 個以上可操作的網路程式範例，參閱(林，民 95)及 http://mathboard.tw），是以 java 語言寫成的。軟體設計的主要目標是提供教師數學教學的設計工具，方便教師教室教學。

數學算板包含了幾何畫板、代數算板、動作的龜行幾何（turtle geometry）、機率與統計等部分。原始構想中，幾何畫板重點放在提供動態歐氏平面幾何的基本圖形構圖功能、基本的幾何變換（平移、旋轉、鏡射、放縮）、可變夾角的平面坐標系統及一元函數的平面圖形繪製上。對於國小數學教學，則包含了電腦數算教具、分數教具（圓分割、線段及長條矩形分割、矩形鉛直及水平分割）。代數算板（林，民 101）則提供了分數係數的多項式運算、國中階段解方程式的教學流程（如配方法、二元及三元一次聯立方程式的解題流程）在教室教學時的展示工具。龜行幾何則包含了驅使龜前進、後退、左轉、右轉、提筆（不畫線）、下筆（畫線）等動作的指令功能。機率與統計則包含了國中階段各種圖表功能（長條圖、直方圖、圓形圖、次數分配表、相對次數分配及累積次數分配表）、簡單機率實驗工具（黑白球、數轉盤、擲骰實驗）的製作。按 (https://www.youtube.com/watch?v=zS0lu72AagU) 參看配方法解一元二次方程式影片。圖 1 展示轉盤與機率實驗程式畫面。

由於早期物件作品包含了立體的正多面體及其展開圖的製作，因此幾何畫板中也加入動態立體坐標架系統（可使用滑鼠自由旋轉）及 3D 構圖的功能，3D 構圖功能與原來的 2D 構圖融合，使用的仍是 java 2D 繪圖功能。我們內建的 3D 系統，將所有 2D 的點都看成 z=0 的 3D 點。在此 3D 系統中，我們建立了可以旋轉的 3D 坐標架，3D 坐標架上製作的 3D 物件，可隨立體坐標架旋轉。3D 坐標架上的平面圖形，也可以透過基軸變換由平面轉換過去。我們也建立了正多面體、阿基米德多面體、輪環多面體頂點製作程式，選取後可選擇製作多面體、球面多面體或輪環面多面體，也提供了多面體展開圖的製作工具（林，民 107）。

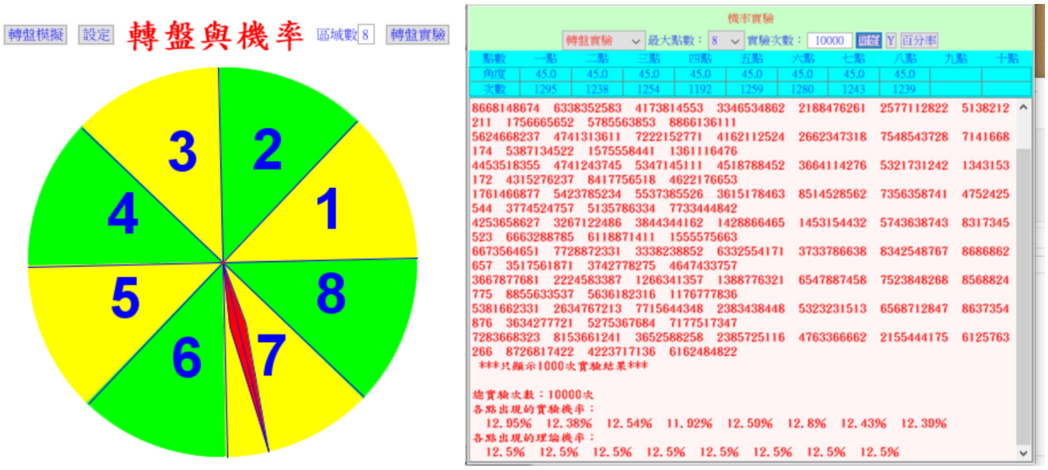


圖 1、轉盤與機率實驗畫面

幾何畫板除了歐氏幾何之外，也內建了與歐氏幾何構圖相應的雙曲幾何圓盤模型(disk model)基本構圖及變換的功能，對他種平面雙曲幾何模型也提供了構圖的對照機制（林，民 106）。相應於多面體，也完成了雙曲多面體球模型(sphere model)中的雙曲正多面體、雙曲阿基米德多面體、雙曲正直角柱及雙曲反向直角柱的作圖功能。圖 2 展示三個雙曲多面體。按鈕 (https://www.youtube.com/watch?v=1Nng8sq02Hk) 可看到這些雙區多面體的動畫，任意雙曲正多面體及雙曲阿基米德多面體都有內建的程式。

對於函數的圖形表徵，我們建立了一元及二元實函數及一元函數的迴轉體繪圖功能，也有 2D 及 3D 的參數函數繪圖程式。部分繪圖程式也加入了常參數，可以在輸入函數時，同時將常數設為參數，繪圖之後，可作動態的常參數模擬。

對於複數及複函數的圖形表徵，我們也製作了許多相關的內建繪圖功能（林，民 108）。除了複數的分數四則運算算器及相關的四則圖形表徵外，如基本複數在複數平面的點、向量及其運算之圖形表徵，

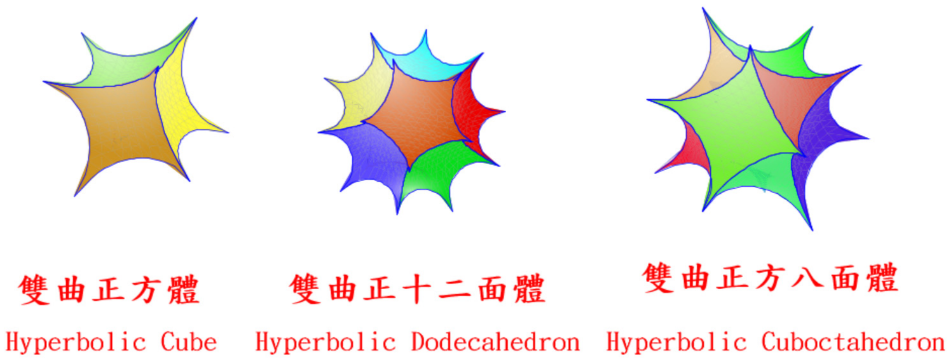


圖 2、3D 球模型的三種雙曲多面體圖形

複變函數映射觀點的 z-平面、w-平面，複變函數的景觀式繪圖、複變函數圖形表徵視為四維空間物件在三維空間上的投影、複變函數的定義域角繪圖在平面、空間及黎曼球面上的圖形表徵，對向量場的圖形表徵、等位線、流線也有一些內建程式，對於四維空間物件，如四維正方體的展開、或其他四維正多面體體的旋轉，投影在三維空間上的二維展示也有內建的程式，圖 3 展示的是四維正方體的旋轉與展開，投影至三維空間的動畫程式截圖，按鈕 (https://youtu.be/WSQ7Z0f-RZU) 參看到四維正方體框架的雙旋轉，按鈕 (https://youtu.be/R5GZ9DXb1e0) 可看到四維正方體展開的動畫影片。

數學算板計畫的目標是提供創作工具，協助數學教師透過選單及構圖功能，建立在教室教學可直接展示運用或引領學生操作探索的電腦教具學具程式（林，民 89），使用者不必使用程式語言。為方便教學流程的控制，數學算板也提供了豐富的按鈕系統，透過各種按鈕的排列組合，教師可將教學設計的內容作適當的流程安排。提供的數學內容，中小學至大學的數學題材都盡力融入。本文將簡單介紹數學算板中的莫必烏斯帶切割、輪環結，及其動態圖形程式，可供教師在教學時使用。

貳、莫必烏斯帶與雙面環帶

一般的曲面，通常都是兩面的，例如球面、輪環面，它們有兩面，展示在外面的面或看不見的內面，內面與外面並不相通。有邊界的多邊形面或曲面，也都是有兩面的。兩面的面，可在兩面塗上顏色，這兩面的顏色會完全隔離或只在邊界交會，在其中一面上爬行的螞蟻，不穿過此面或越過邊界，無法到達另一面。圖 4 展示的是一個長方形面、環狀曲面、及切去一部份的球面及輪環面，它們都是有邊界兩面的面。其中長方形面的背面，我們看不見。

李斯挺（Listing）及莫必烏斯（Möbius）先後獨立發現了只有單面的環帶，我們稱之為莫必烏斯帶（Möbius strip）。圖 5 中左圖呈現的是莫必烏斯帶，右圖呈現的是雙面環帶。讀者可以嘗試在腦海中追蹤左圖的面及右圖的面，看看是否可以想像出它們是單面或雙面的。

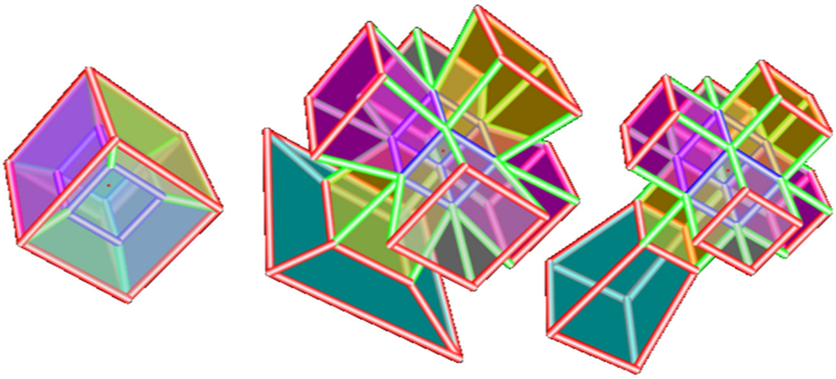


圖 3、四維正方體的展開截圖

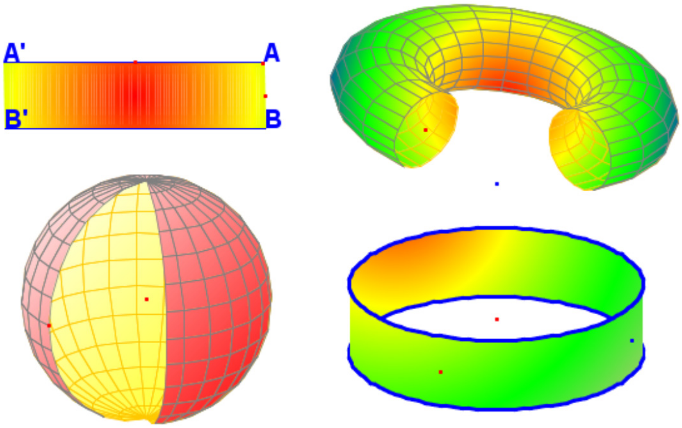


圖 4、兩面的面

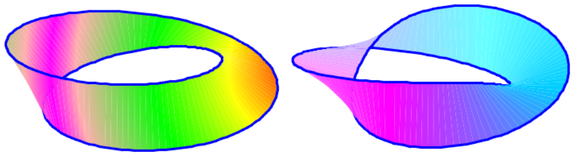


圖 5、左圖為莫必烏斯帶，右圖非莫必烏斯帶

莫必烏斯帶的實物模型很容易製作，取一長方形的長條紙帶，扭轉半圈(half-twist)後將其兩端黏貼，使 A，B 分別與 B’,A’ 重合即可得到。圖 6 由上而下展示其製作過程示意圖。

參、莫必烏斯帶的性質

莫必烏斯帶有 3 個基本的性質：

一、單面的面—

莫必烏斯帶只有單面，相對於雙面的面，一隻螞蟻若在莫必烏斯帶上爬行，牠可以遍訪帶上所有的位置，不需翻越邊界。若我們在實物的紙帶模型上任取一點，在該面上中間部分向紙帶前方畫線，不超出邊界，最終我們可以回到出發點。在我們的電腦模型中，不論是雙面環帶或是單面環帶，我們有選項展示用紅藍兩種顏色畫出的中間線。使用者可以用滑鼠轉動莫必烏斯帶，觀察紅藍兩色的線是否會在同一面上聚於一點。圖 7 展示雙面環帶與單面的莫必烏斯帶上面畫線的狀況。第一列為

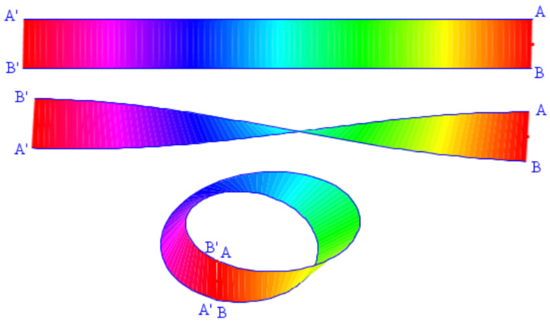


圖 6、將長條紙帶扭轉半圈後黏貼，得到莫必烏斯帶

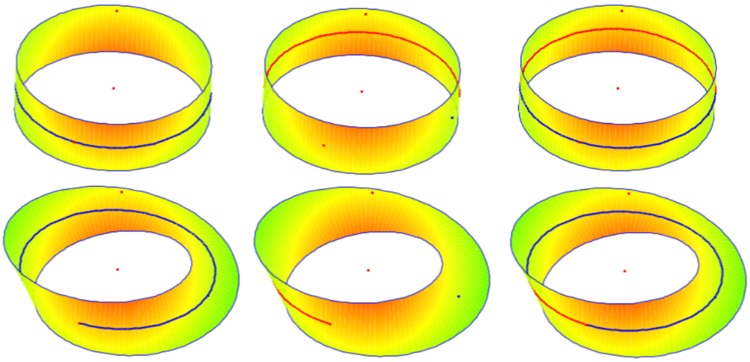


圖 7、第一列為雙面環帶，第二列為單面環帶

雙面環帶，藍色線在外面，紅色線在內面，兩者分別在兩面。第二列為單面環帶，藍色線及紅色線明顯會聚於一點。轉動電腦模型可看得更清楚。

二、一條邊界(boundary)—

莫必烏斯帶的邊界只有一條，但雙面的環帶，其邊界有兩條。數學算板程式可以在邊界上呈現一個小圓及點，並做「邊界追蹤」。邊界追蹤時，小圓及點會在環帶上沿邊界移動，讓使用者觀察小圓經歷的邊界過，如果環帶是雙邊界的話，小圓會先追蹤第一邊界，然後越過越過面到第二邊界追蹤，因為兩邊界並不連接著。若環帶為單邊界，小圓會經歷整個邊界，不必越過面。程式也可獨立展示邊界，此時容易看出邊界的條數。圖 8 展示雙面帶及單面的莫必烏斯帶及獨立展示的邊界。中間行是單面莫必烏斯帶及其邊界，邊界是一條環繞的環線。左右兩行是雙面環帶及其邊界，邊界是兩個獨立的環線。這些環線就是我們後面要討論的紐結(knot)及鏈結(link)。

三、不具方向性（unorientable）—

方向性是歐氏空間曲面的一種特性，主要是觀察曲面是否可以在每一個點上定義出一個一致的法向量(Normal vector)。這樣的法向量可以讓我們使用右手定則訂出一個迴圈的順時鐘方向。也可以說，一個曲面上的圖形，若能透過連續的移動，而改變其順時鐘方向為逆時針方向時（或反之），這個曲面就不具方向性。圖 9 展示頂點為小圓圈的三角形，在莫必烏斯帶上移動時，它的方向性改變。圖中的紅藍綠小圓圈，在莫必烏斯帶曲面上開始迴繞時，

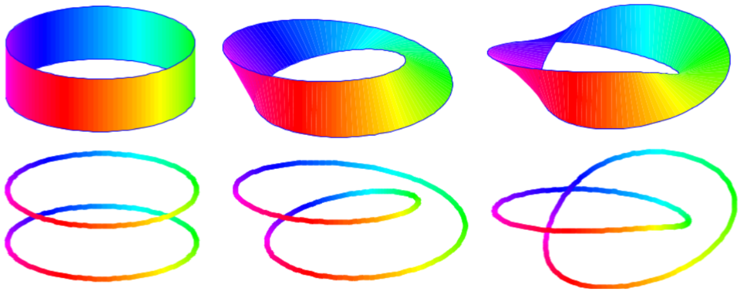


圖 8、雙面環帶、莫必烏斯帶及其邊界

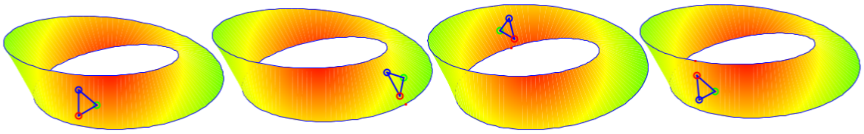


圖 9、莫必烏斯帶上三角形的方向性改變

它是紅綠藍逆時鐘方向排列，但轉一圈後會變成順時鐘方向，因此莫必烏斯帶不具方向性。

四、環帶中的半扭轉數

圖 6 所示製作莫必烏斯帶的「扭轉半圈」，其實是環帶是否莫必烏斯帶的重要構成因素。半扭轉 n 次後再黏貼，若 n 為奇數，所得的環帶都是莫必烏斯帶，若 n 為偶數，所得的環帶就是雙面的環帶。圖 10 展示半扭轉數分別為 2、3、4、5、6、7、8、9 的環帶，第一列是雙面環帶，第二列是莫必烏斯帶，讀者可以試試在腦海中對這些較複雜的環帶，追蹤其為為單面或雙面，單條邊界或兩條邊界。在數學算板中，輸入半扭數，就可以得到這些環帶。透過滑鼠及功能按鈕，也可以探索並展示它們的性質。

圖 11 展示數學算板莫必烏斯帶程式畫面。在此程式中，使用者可以輸入不同的半扭數，得到環帶或莫必烏斯帶，檢驗其性質，或呈現其邊界環線。

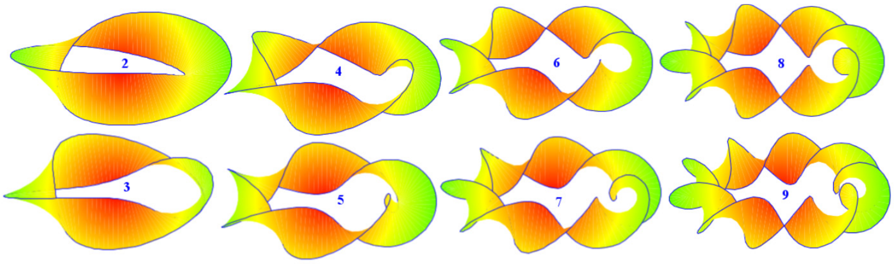


圖 10、半扭轉數分別為 2、3、4、5、6、7、8、9 的環帶，偶數是雙面環帶，奇數是莫必烏斯帶

圖 11、數學算板莫必烏斯帶程式畫面

五、環帶的 1/2 及 1/3 切割

若不做半扭轉(半扭轉數 0)，直接將長方形帶黏貼，我們就得到一個圓柱面環帶。如果我們沿圓柱面環帶中間線或 1/3 及 2/3 線切割或剪開，大家都知道結果會是長度相同的二條半高或三條 1/3 高的的圓柱環帶(圖 12)。

若將半扭轉 1 次的莫必烏斯帶沿 1/2 線剪開，我們會得到怎樣的環帶呢？幾條呢？半扭數是多少呢？沒玩過莫必烏斯帶的人，恐怕都猜不出來，有興趣的讀者可以拿出紙帶及剪刀試試看。圖 13 展示的是莫必烏斯帶沿 1/2 線剪開及拉長的數學算板模擬圖形。它其實是長度為原來 2 倍，高度是原來 1/2 的 4 個半扭轉的一條雙面環帶，切割後的半扭較不易理解，若能做出紙帶模型，較容易看出。

若將 2 半扭轉的雙面環帶沿 1/2 線切開情況又如何呢？圖 14 展示的是切割拉開、拉長的狀況。它們是高為原來 1/2，2 個半扭轉，相扣著的兩條雙面環帶。

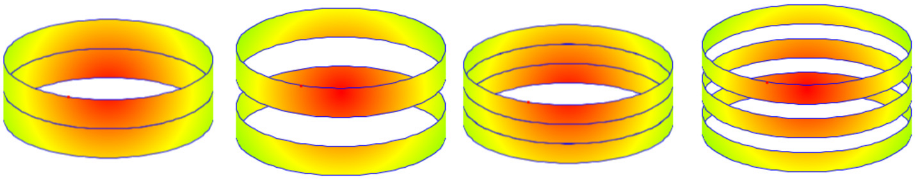


圖 12、將圓柱環帶沿 1/2 線及 1/3 線剪開

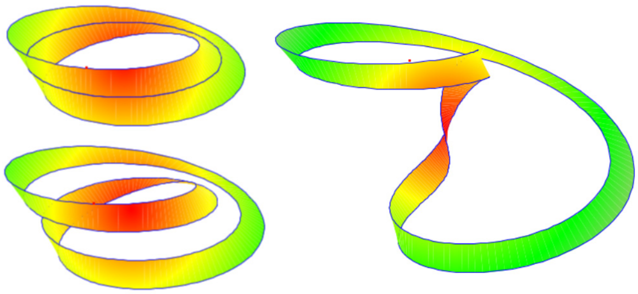


圖 13、一個半扭轉的莫必烏斯帶，沿 1/2 線切割並拉開(左下圖)、拉長(右圖)的圖形

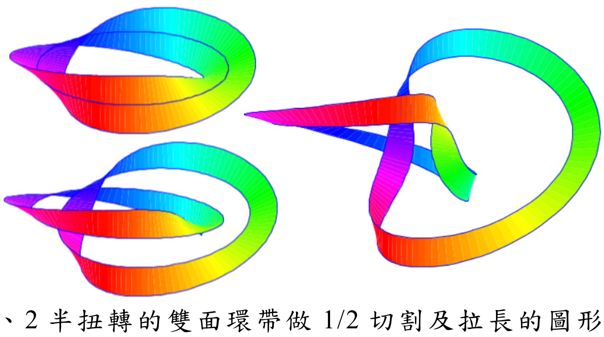


圖 14、2 半扭轉的雙面環帶做 1/2 切割及拉長的圖形

若將環帶切割，使其高度為原環帶的 1/3。它的切割狀況又如何呢？圖 15 展示 1 個半扭轉的莫必烏斯環帶的切割及拉長的圖形。由於莫必烏斯帶只有一條邊界，所以 1/3 切割線其實與 2/3 切割線是同一條(圖 15 左上圖)，因此只需沿 1/3 位置的某點開始切割剪開即可全部剪開。剪開後得到兩條環帶，一為與原來相同但 1/3 高的莫必烏斯帶，它是圖 15 左圖的中間部分環帶。另一為兩倍長、1/3 高但 4 半扭轉的雙面環帶，它是圖 15 左圖所示上方及下方環帶構成的一條環帶。圖 15 右圖是把雙面環帶拉長得到的樣子，中間是莫必烏斯帶。

雙面環帶要剪開使變成高為原來 1/3 的環帶，其剪開後的狀況又如何呢？圖 16 展示 2 半扭的雙面環帶的切割及拉開的圖形。由於雙面環帶的 1/3 切割線，與 2/3 切割線是不同的一條，如圖 16 左圖。因此要分別沿 1/3 及 2/3 切割線分別剪開。這樣可得到三條 2 半扭 1/3 高的雙面環帶，如圖 16 右圖，是相扣的 3 條環帶。

對於 1/2 及 1/3 切割，數學算板均提供了程式，使用者可以自由輸入半扭轉數 n，作切割探索。透過滑鼠可從不同方向觀察切割前後環帶的形狀(本質上是三維物件在二維平面的投影，因為螢幕是二維的)。作 1/2 切割時，剪一次即可，半扭數 m 為奇數時，得到一條半高，2 倍長，半扭數 2(m+1)的雙面環帶。m 為偶數時，得到半高但半扭數相同的雙面環帶。作 1/3 切割，半扭數 m 為奇數時，剪一次即可，因為它是莫必烏斯帶，只有一條邊界，1/3 及 2/3 切割線是同一條，但得到兩條環帶，與原來相同，但高度為原來 1/3 的莫必烏斯帶，另一條高度為原來 1/3，但長度 2 倍，半扭數 2(m+1)的雙面環帶。m 為偶數時，是雙面環帶，在 1/3 及 2/3 線分別切割，共切兩次，可得長度相同、1/3 高、但半扭數相同的環帶。當半扭數 m 較大時，圖形較為複雜，數學算板程式除了提供分別呈

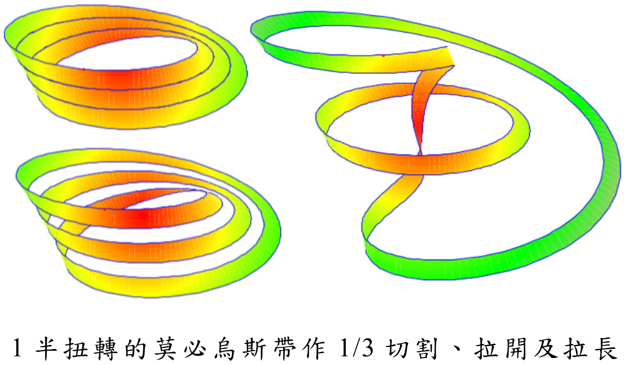


圖 15、1 半扭轉的莫必烏斯帶作 1/3 切割、拉開及拉長的圖形

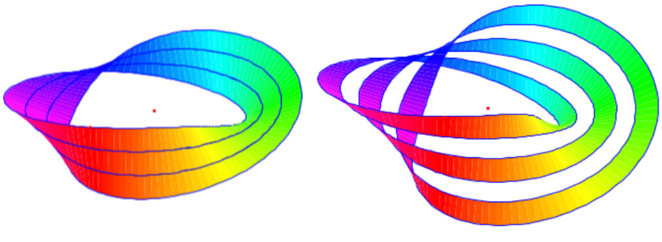


圖 16、2 半扭的雙面環帶做 1/3 切割的圖形

現或隱藏個別環帶的按鈕外，也提供只展示環帶中間線(我們稱之為環線)的圖形按鈕。這個環線其實也可以看成是高度為零的環帶。圖 17 展示半扭數 7 作 1/3 切割的兩條環帶，左圖個別呈現及右圖合併呈現。圖 18 展示半扭數 8，做 1/3 及 2/3 切割時，環帶個別呈現及合併呈現的對照圖。圖 19 展示半扭數 7 的莫必烏斯帶，獨立呈現的環線及合併呈現的環線及環帶。

由於數學算板內建的三維坐標架，可用滑鼠旋轉，從不同的方向來看建立的立體圖形。本文中所呈現的立體圖形，在電腦上都可從各個方向來觀察它們，圖 20 展示半扭數分別為 5、15、20 的環帶作 1/3 切割旋轉後的一個樣貌(各選用不同的色彩)。在數學算板上，對於任意半扭數，1/2 或 1/3 的切割，均可得各種不同樣貌，按 Shift 再用滑鼠拉出虛線方框，可以將方框內的圖形複製至剪貼板，然後貼圖片至畫面上。

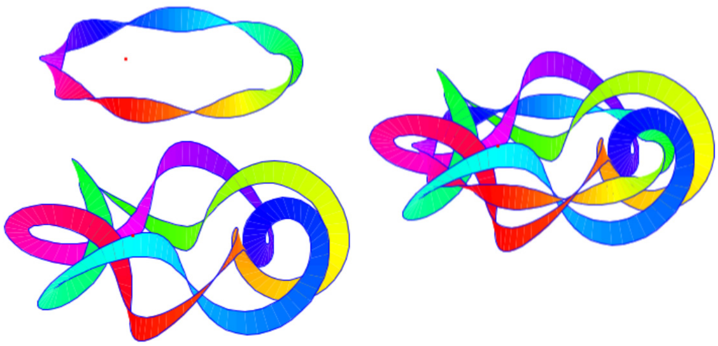


圖 17、半扭數 7 的莫必烏斯帶，作 1/3 線切割，環帶個別呈現(左圖)及合併呈現(右圖)的對照圖

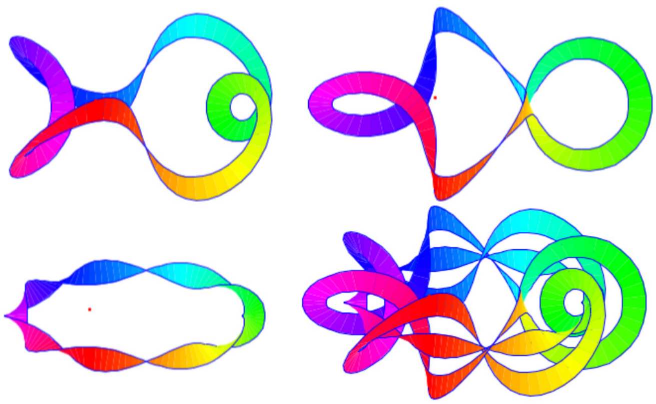


圖 18、半扭數 8 的雙面環帶，在 1/3 線及 2/3 線切割時，環帶個別呈現及合併呈現的對照圖

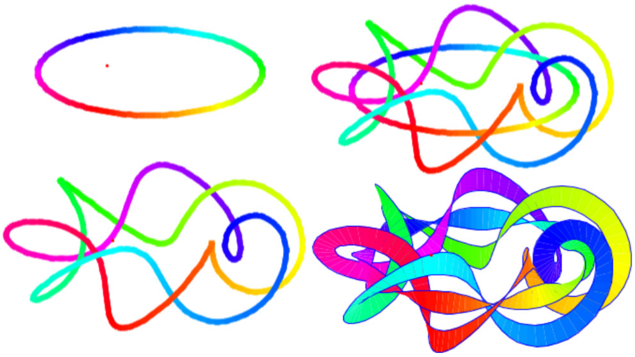


圖 19、半扭數 7 的莫必烏斯帶，作 1/3 線切割，半扭數 7 環線個別呈現及合併呈現的對照圖

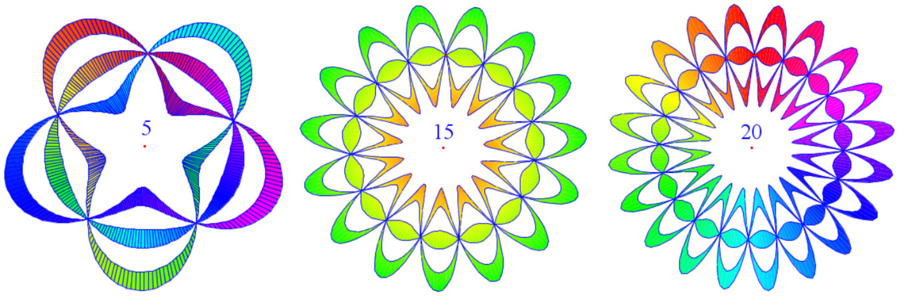


圖 20、半扭數分別為 5、15、20 的 1/3 切割旋轉後的一個樣貌(各選用不同的色彩或斜線修飾)

六、環帶的 1/n 切割

如果我們要將環帶切割，使得到的新環帶高度均為原來環帶的 1/n,我們要如何做呢？其實前述 1/2 及 1/3 切割是環帶切割的基本，所有 1/n 切割都可以回推至這兩種切割。數學算板也建立了協助推理「1/n 切割」結果的模型，其中 n>2。此模型中，半扭數 m 為偶數時，環帶為雙面環帶，對 1/n 及(n-1)/n 線作二個切割，此時，我們得到 3 條與原來環帶半扭轉數相同、長度相同的雙面環帶。其中兩條高度為 1/n，但中間環帶高度為原來的 1-2/n=(n-2)/n，n>3 時，中間的環帶比較寬。半扭數 m 為奇數時，只作 1/n 線切割(因 1/n 與 (n-1)/n 線是同一條，只切割一次)，此時得到的是兩條環帶，其中一條是長度 2 倍高度 1/n 但半扭數(2m+2，其中 m 為原半扭數)增加的雙面環帶，另一條是長度、半扭數不變但高度為原來的(n-2)/n 的莫必烏斯帶。圖 21 展示半扭轉數分別為 0、1、2 的「1/7 切割」的結果圖形。中間的環帶高度為原來的 5/7。讀者可以想像，中間部分環帶再作「1/5 切割」，可得到的中間部分高度為 3/7 的環帶，再將此環帶作 1/3 切割，此時即可得到高度為原來高度 1/7 的環帶組，它的條數，每條的長度(紙帶時)都可推出來。當切割數 n 為奇數時，可回推至 1/3 切割，當 n 為偶數時，可回推至 1/2 切割。

將環帶切割使其高度為原來高度的 1/n，得到的環帶，稱為螺旋環(Paradromic rings)。我們可推得下列結果：

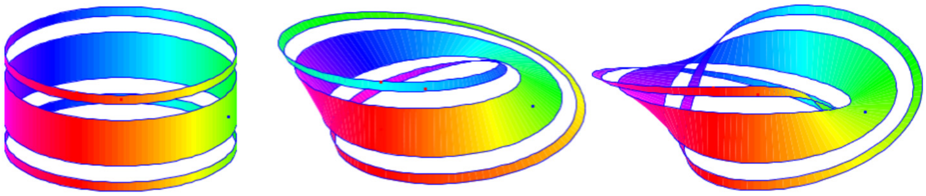


圖 21、半扭轉數分別為 0、1、2 的「1/7 切割」

設一環帶半扭數為 m，分割成高度為 1/n 的環帶，其中 m,n 為正整數

(1) 若 m 為偶數，需切割 n-1 次，得到 n 條半扭數 m，但長度不變的雙面環帶。

(2) 若 m 為奇數時，需切割 $\left[\frac{n}{2}\right]$次，得到 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 條長度 2 倍，半扭數 2(m+1)的雙面環帶，當 n 為奇數時，外加一條半扭數 m 長度相同，且與前述雙面環帶相扣的莫必烏斯帶。

Mathworld 對半扭數為 1 及 2 時的切割，有一些列表的描述。

(https://mathworld.wolfram.com/MoebiusStrip.html)

若將分割出來的螺旋環帶取其中線或將其視為高度為零的環線，就是就可得到下一節中我們會討論的紐結或鏈結，圖 22 展示的是與圖 20 對應的紐結及鏈結，左圖及中圖分別為半扭數 5、15 的莫必烏斯帶對應的紐結，右圖為半扭數 20 的雙面環帶對應的鏈結。

參、莫必烏斯帶與克萊茵瓶

前面討論的莫必烏斯帶是一個不具方向性，邊界只有一條，且只有單面的曲面。克萊茵（Klein 1882）首先提出稱為克萊茵瓶(Klein bottle)的曲面。克萊茵瓶與莫必烏斯帶相同，是只有單面，不具方向性的曲面，但它與球面及輪環面一樣是沒有邊界的。克萊茵瓶其實是四維空間的物件，無法在三維空間呈現，我們呈現的圖形只是四維空間物件在三維空間投影後的二維展示圖形。在四維空間中，克萊茵瓶是不會自我相交的，但它的三維投影會自我相交。圖 23 的左圖展示的就是在三維空間中的克萊茵瓶。圖 23 的右圖展示三維呈現的克萊茵瓶截半的圖形，它其實可以看成是凹入且相交，只有單面的莫必烏斯帶。兩條莫必烏斯帶（上半與下半的克萊茵瓶），就黏貼成了克萊茵瓶。

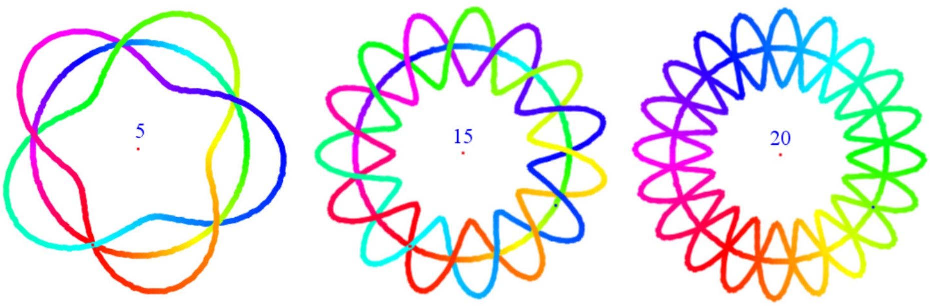


圖 22、與圖 20 相應的環線的一個樣貌

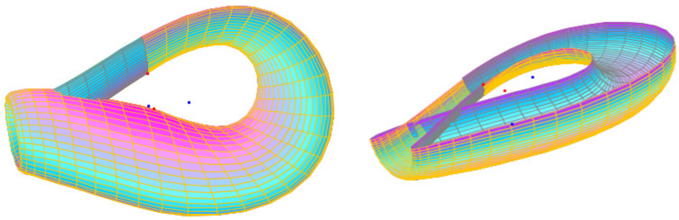


圖 23、克萊茵瓶及莫必烏斯帶(截半且相交的克萊茵瓶)

圖 24 展示數學算板 3D 參數繪圖程式製作的動畫截圖，克萊茵瓶的 3D 圖形製作可以與輪環面類似地，由矩形面包裹成管狀，然後延伸迴轉相交後，管狀面相接而得。在管狀時，仍有內面外面之分，延伸迴轉再延伸後，內面與外面接合，顯示克萊茵瓶與莫必烏斯帶一樣，是單面的曲面。參看 (https://youtu.be/qkh2rW5D2sw)。

圖 26 展示的是數字 8 與數字 8 克萊茵瓶。左圖為數字 8 的環帶，它由兩個圈構成，第一個圈的內面與外面恰為第二個圈的外面與內面，數字 8 萊因瓶可由數字 8 環帶扭轉接合而得，參看 (https://youtu.be/Bhu2YFPIzbA)。

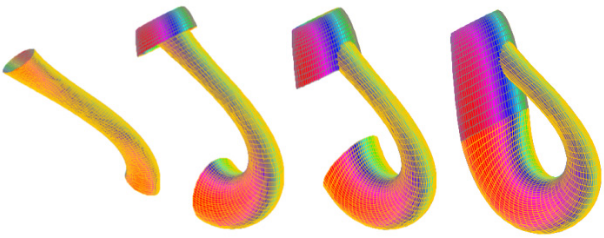


圖 24、克萊茵瓶的繪圖動畫截圖

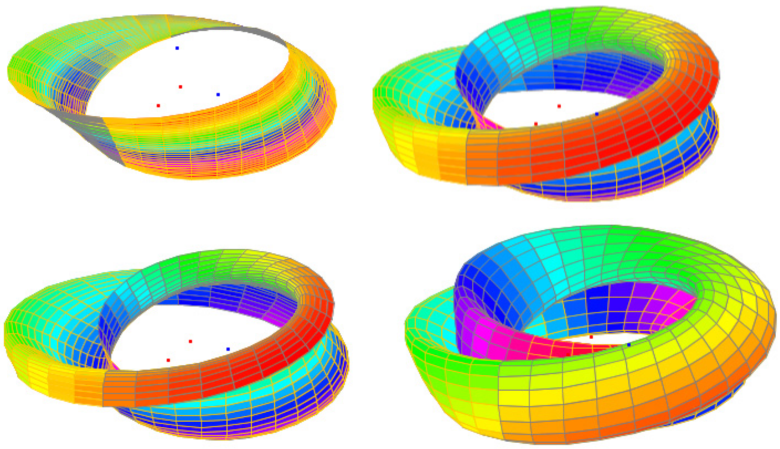


圖 25、莫必烏斯帶與數字 8 克萊茵瓶（由上而下由左而右）

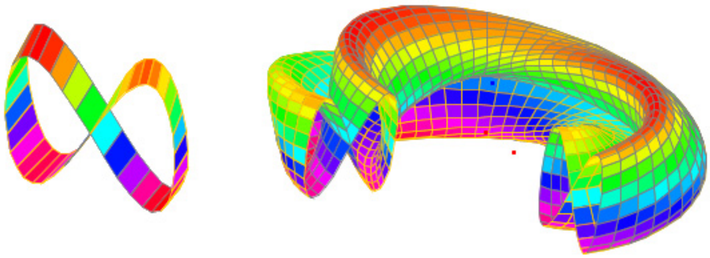


圖 26、數字 8 環帶與截斷的數字 8 克萊茵瓶

肆、紐結、鏈結與輪環結

一、紐結與鏈結

上過童軍課的人都知道繩結（Knot）。繩結是用一條繩子打出來的結，這個結有兩個端點，繩結可以打得很緊，也可以打得很鬆散（方便觀察結是如何打的），它們都表示一個相同的結，它們也通常是可以拆開回復成一條沒有結的繩子。若將繩結兩端黏合後，就是數學家研究的紐結（Mathematical Knot,Knot）。圖 27 中的第 1 及第 3 圖是繩結中最簡單的單結(single knot, overhead knot)的不同樣貌（將第 1 圖兩端點下拉，就是第 3 圖）。將單結的兩端點黏貼就可以得到稱為三葉結(trefoil knot)的最簡單紐結（圖 27 的第 2 及第 4 圖）。

紐結是不可以拆開的，它的嚴格定義就是：空間中的簡單封閉曲線（simple closed curve），它們不自我相交。用有伸縮性的繩子做出來的繩結，兩端黏合後，成為紐結，不論你表面上看起來將這個紐結如何拉扯、伸縮、折疊，只要不拉斷或將繩穿越自己本身，它都代表同一個紐結，前述動作通稱為紐結的變形（deformation），當然，只有鬆散的繩子紐結才可以變形。圖 27 的第 2 及第 4 圖都是三葉結變形的結果，表面上看起來形狀不同，但卻是相同的紐結。若干個不相交紐結的聯集，稱為鏈結（link），每一個紐結就是鏈結的構成部份，只有一個構成部份的鏈結，稱為平凡鏈結（trival link, unlink）。除了平凡鏈結之外，最簡單的鏈結就是霍夫鏈結（Hopf link），前面圖 8 中的右下圖就是霍夫鏈結的圖形，是兩個互相穿越及跨越的環。

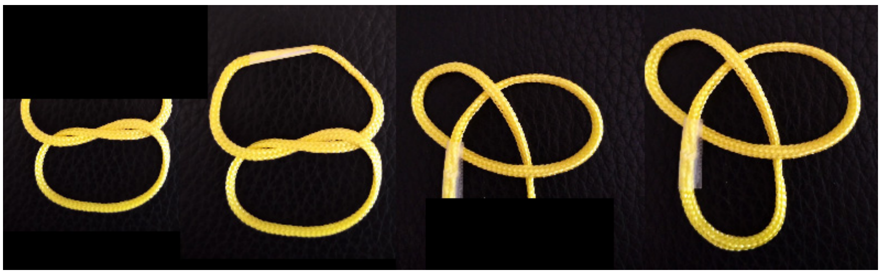


圖 27、第 1、3 圖是繩結的單結，第 2、4 圖：連結單結端點的紐結

二、紐結圖形

描述一個紐結(或鏈結)，有很多方法，最常用的方法就是將紐結（或鏈結）投影在平面上（將看到的樣子拍照或畫在平面上)。這樣得到的圖形就稱為紐結(或鏈結)圖形（knot diagram)。圖 8、圖 18、圖 22 的線狀圖形、圖 27 的第 2 及第 4 圖都是紐結及鏈結圖形的例子。紐結本身並無交點，但紐結圖形會有交點，這些交點稱為結點（crossing)。每個紐結圖形都可以計算個別圖形的結點數，一個紐結的結點數（crossing number)，就是此紐結所有圖形的最少結點數。

兩個結點間的路徑，就是紐結的弧，此弧可能經過其他結點。通過一個結點的弧至少有兩條，一條從上方「跨越」(cross over)，一條由下方「穿越」(cross under)。通過結點的弧若同色時，穿越與跨越不易分辨，因此製作紐結圖形時，有些跨越的弧通過結點時是畫成連續的，穿越的弧是畫成不連續的。圖 28 左圖展示的是網路上（https://en.wikipedia.org/wiki/Trefoil_knot）擷取的這一類紐結圖形。又因曲線繪圖較困難，也有程式呈現紐結圖形時，是以多邊形的樣式呈現的（事實上，所有的電腦曲線圖形都是密集的線段連接而成的)，圖 28 中圖及右圖呈現數學算板多邊形紐結圖形製作程式製作的「多邊形紐結跨越及穿越」的狀態圖。注意：多邊形頂點並非結點，A、B、C 才是它們的結點。

設一弧至少包含三個結點，若此弧的兩端點是被此弧穿越，且此弧跨越兩端點之間的所有其他結點，此弧稱為此紐結圖形的一個橋（bridge)。每個紐結圖形都可以計算個別圖形的橋數，一個紐結的橋數（bridge number)，就是此紐結所有圖形的最少橋數。圖 29 展示三個紐結圖形，左上、左下、及右圖，它們的結點數分別為 4、6、3，它們的橋數分別是 3(ABC、CADD、BCA)、2（BCDEAF、CBFD)、3（ABC、CAB、BCA)。在計算結點數或橋數時，我們會定出一個方向，以便追蹤（trace）整個紐結。

一個紐結的節點數與橋數都是紐結的不變量(invarent)。因此，若某個「紐結圖形」的橋數(或結點數)少於某一「紐結」A 的橋數(或結點數)，則此紐結圖形必非紐結 A 的圖形，它所表示的紐結也不會是 A。

由於觀察紐結或鏈結可以從四面八方來看，不同方向看的樣子的就不太相同（或說是紐結投影至不同平面的圖形看起來不太相同)，所以紐結或鏈結的圖形有各種不同的樣貌，若經過前述拉扯、伸縮、折疊等變形後，變化更多端，但它們都代表相同的紐結或鏈結，圖 29 的三個圖形其實都是同一條空間封閉曲線在不同平面的投影圖形，因此紐結理論(Knot theory)的研究中，最基本也相當困難的問題就是：分辨兩個紐結或鏈結圖形是否代表同一紐結或鏈結。

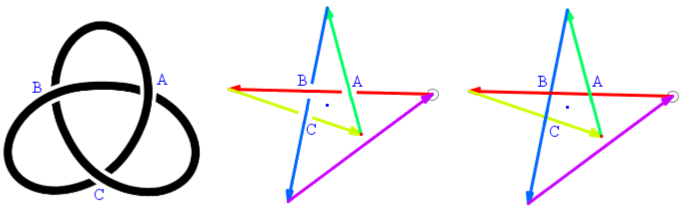


圖 28、左圖：不連續的穿越弧紐結圖形，中圖及右圖：不連續及連續穿越的多邊形紐結圖形

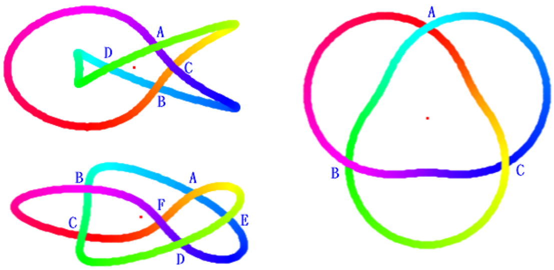


圖 29、三個紐結圖形

三、懷德麥司特移動

分辨兩個紐結圖形是否代表同一個紐結，最簡單的方法就是實驗。用兩條同長度的繩子，按照圖形分別做出對應的紐結（依照圖形上下穿插，最後連接兩端），若一個紐結加以變形之後，能夠形成另一個紐結的樣子，這兩個紐結就是相同的紐結。事實上，前述變形基本上有三類，稱為懷德麥司特移動（Reidemeister moves）：

I ：任一方向結線的扭轉或解開。

II ：加入或移除兩個結點。

III：移動一股結線由上方跨越或由底下穿越一個結點。

圖 30 展示的就是這三類移動，它們是紐結圖形的等價移動。透過懷德麥司特移動，我們可以判斷兩個紐結圖形是否代表同一個紐結。結點數為零的紐結，稱為平凡結（unknot, trival knot）。一個非平凡的紐結，至少有三個結點，亦即沒有結點數為 1 或 2 的紐結。若一個紐結圖形與其鏡射圖形是等價的紐結圖形，亦即它們都表示同一個紐結，此紐結稱為非掌性的（achiral）紐結。因此掌性的(chiral)紐結，像手掌一樣，是非鏡射對稱的（左手掌的鏡射就是右手掌，但不是同一個手掌）。圖 31 展示的是都稱為三葉結的左三葉結（left-handed trefoil）及右三葉結（right-handed trefoil），它們是不同的紐結，無法由等價的移動獲得彼此，亦即三葉結是掌性的紐結。

前面圖 27 的第 2 及第 4 圖是等價的，是右三葉結，圖 29 展示的三個圖形也是等價的，是左三葉結。讀者可以透過實驗或想像等價的移動來驗證。

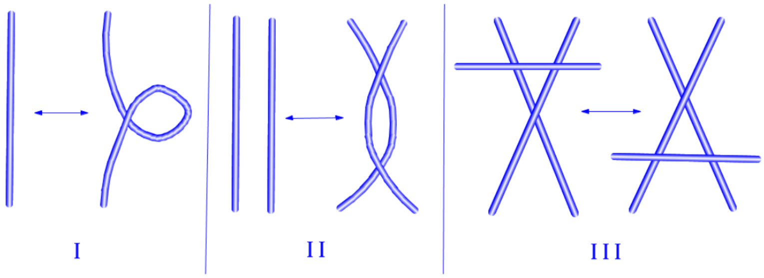


圖 30、紐結的三類等價移動

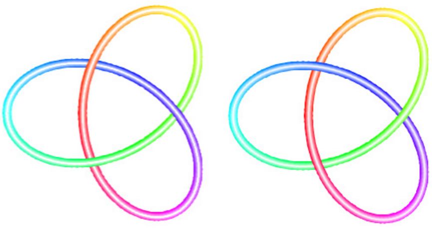


圖 31、左三葉結及右三葉結

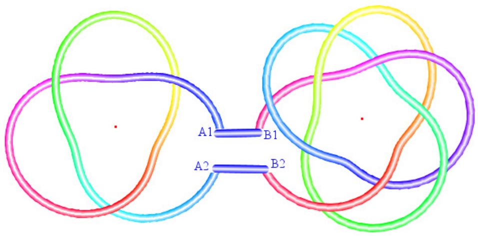


圖 32、兩個紐結的和

四、紐結的和

設 A、B 為兩個紐結，將 A 紐結中的某一段弧剪掉，得到 A1、A2 兩個端點，將 B 紐結中的某段弧剪掉，得到 B1、B2 兩個端點，將 A1、B1 及 A2、B2 連接起來，就得到一個新的紐結，稱為 A 與 B 的和（sum），記為 A＃B。圖 32 展示兩個紐結的和。由於剪掉的弧可以是任何部位，兩個紐結有多種方式去合成。與自然數的質數類似，一個紐結若無法分解成兩個非平凡紐結的和，稱為質結（prime knot），否則稱為合成結（composite knot）。

五、輪環結

前一節中，我們曾討論環帶的邊界，若環帶的邊界只有一條，就是莫必烏斯帶，否則就是雙面環帶（兩邊界環帶），環帶的邊界其實與輪環面(torus)有關。輪環面像是一個游泳圈或甜甜圈一樣，它是空間中一個圓廻繞此圓所在平面上一直線軸而得的空間曲面。圖 33 展示的就是輪環面的圖形，是由圓 A 廻繞共平面的直線 OC 而得的曲面。OC 為輪環面的垂直軸，A 點的廻繞軌跡為一個圓，此圓半徑稱為輪環面的主半徑(major radius)，AB 為圓 A 的半徑，稱為輪環面的副半徑（minor radius）。

圖 34 展示環帶、環帶邊界與輪環面的關係，第一列是環帶，第二列是前一列環帶對應的變界。 由圖中可以看出，環帶的邊界其實就在輪環面上，邊界一方面繞者輪環面旋轉，一方面繞著通過輪環面的垂直軸旋轉。圖中左圖為雙面環帶，中圖及右圖為莫必烏斯帶。

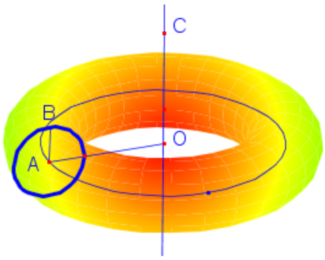


圖 33、輪環面

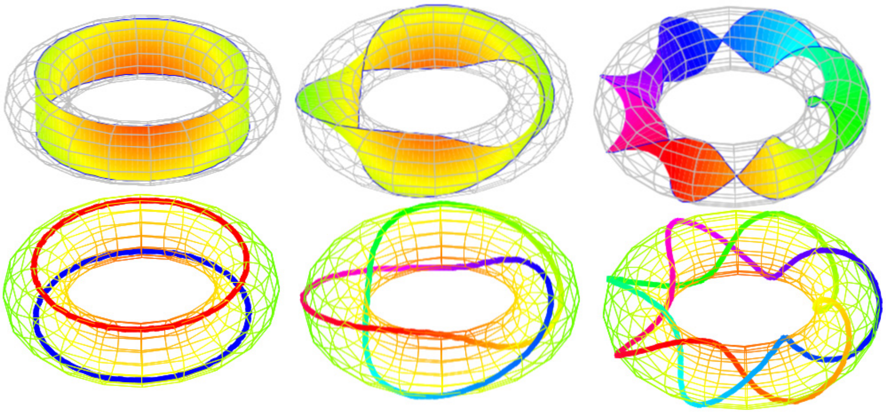


圖 34、半扭數 0、3、7 的環帶及邊界與輪環面的關係

圖 35 展示的是取一條繩子，穿入輪環孔 3、7、15 次，並環繞輪環面中心垂直軸 2 次，然後將繩子接起來的圖形。其實本質上它就是環帶的邊界，畫圖時，只不過是將輪環面縮小一點，以凸顯在外纏繞的形象而已。

圖 34、35 的環線或管狀的繩索與輪環面相貼的線，其實就是畫輪環面上的空間不相交封閉曲線，就是紐結，因為這些空間曲線是在輪環面上的紐結，故稱為輪環結（torus knot）。若一條繩索纏繞輪環面，穿過輪環面中間的孔（或說環繞輪環面）p 次，環繞輪環面垂直軸 q 次，這樣得到的輪環結，記為$T(p,q)$。環帶的邊界因為環繞輪環面垂直的中心軸 2 次，因此是 T（p,2），p 就是半扭數。圖 36 展示 T(39,11)、T（7,19）、T（6,7）三種輪環結，由圖可也看出 p,q 值的大小對圖形的作用。

T（3,2）是除了平凡結之外最簡單的紐結，且是唯一結點數 3 的紐結，它就是三葉結（有兩種左三葉結及右三葉結），其實就是前述將繩結中最間單的單結的兩端點黏貼而得的。前面圖 29 展示的三個紐結圖形，其實就是三葉結的三個圖形。按鈕  (https://youtu.be/SL7yiTal4QQ) 可以看到三葉結在空間旋轉得到的各種圖形的影片，各種圖形的結點數及橋數也許不同，但就三葉結來說，它的結點數為 3，橋數是 2。其實輪環結$T(p,q)$的結點數及橋數分別為 min((p-1)q,(q-1)p) 及 min(p,q)，其中 p>0 且 q>0,（Hoste et. al. 1998, Burde and Zieschang 2002, Schultens 2007），且所

有的輪環結都是質結 (Norwood 1982)，不能分解成兩個非平凡結的和。另外，除平凡結外所有的輪環結都是掌性（非鏡射對稱）的紐結(Murasugi 1996)，亦即它的紐結對稱圖形代表不同的紐結。事實上，$T(p,q)$與$T(q,p)$是等價的（Livingston 1993），圖 37 展示透過垂直輪環將 T(2,3)看成 T(3,2)的方法。其中四個圖形的紐結投影圖都不變，第 1 圖是 T(2,3)，第 2 圖呈現用與原來輪環面垂直的新輪環面取代原輪環面，兩輪環面是垂直互相通過彼此中心的，此時，可以簡單地看出此紐結是穿入輪環孔 3 次的紐結，但此時紐結並未環繞新環面的垂直軸 2 次。第 3 圖展示將新輪環向前平移之結果，第 4 圖獨立展示第三圖輪環面的垂直軸，觀察第 4 圖可看出此時輪環結迴繞軸 2 次，但紐結卻在 1、2、3 三處可能穿透輪環面，我們可將 1 處穿透的弧拉開，使其經由 B 點空白處越過輪環面，2、3 兩處的穿透弧拉至 A 點空白處通過而不穿透輪環面，拉長延伸時，仍維持紐結的弧之間的穿越或跨越狀態，這樣拉長延伸得到的紐結圖形，仍代表原紐結。亦即此紐結就新輪環面來看，是穿過輪環面孔 3 次，繞垂直軸 2 次的紐結，亦即它是 T（3,2）。利用垂直輪環面來看 $T(p,q)$ 與 $T(q,p)$ 的等價，可參看網頁(https://sketchesoftopology.wordpress.com/2011/03/28/pqisqp/)，上面有不錯的圖形描述。

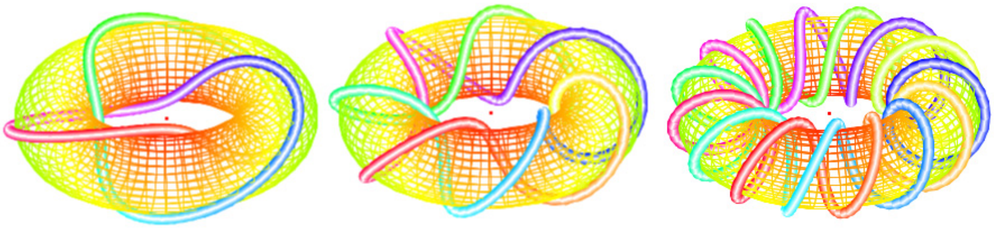
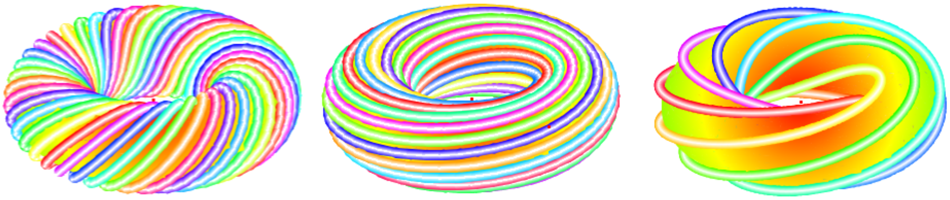


圖 35、另一形式展示的半扭數 3、7、15 的環帶的邊界線



T(39, 11) T(7, 19) T(6, 7)

圖 36、三種輪環結

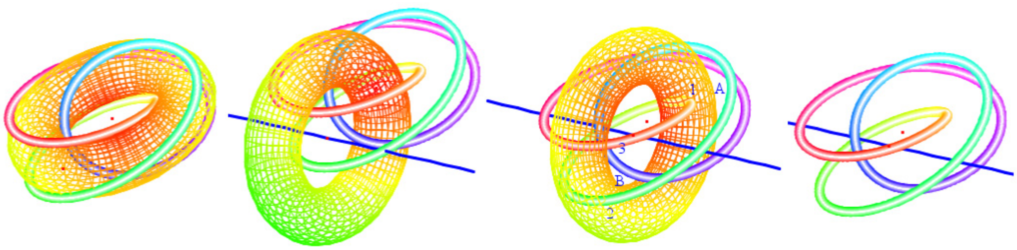


圖 37、透過垂直輪輪環，將 T（2,3）看成 T（3,2）

六、數學算板中的輪環結程式

圖 38 展示的是數學算板的輪環結程式畫面。使用滑鼠在圖形中心 100 光點範圍空白處拖曳可以任意旋轉圖形，從不同的方向觀察不同的紐結圖形，拖曳中心點可以平移整個圖形。程式使用的輪環結參數方程式是：

$$\begin{cases} x = (R - r\sin(pt))\cos(qt) \\ y = (R - r\sin(pt))\sin(qt) \\ z = r\cos(pt) \end{cases} \text{ 其中}$$

$$p^2 + q^2 \neq 0, p, q \in \mathbb{Z}$$

其中 R 為輪環面的主半徑，r 為副半徑。程式中，輸入任意不同時為零的整數 p、q，可以得到輪環結$T(p,q)$，表示此紐結環繞輪環面$|p|$次，環繞輪環面垂直軸$|q|$次的輪環結。當 p 或 q 為± 1時，輪環結為平凡結，它們都與圓等價（圖 38 左 2 圖）。$T(p,-q)$則為$T(p,q)$的紐結鏡像（圖 38 右 2 圖），它們是不同的紐結，因輪環結除平凡結外都是掌性紐結。

又：$T(-p,-q)$ 與 $T(p,q)$ 等價，將$(-p,-q),(p,q)$帶入參數式，參數式不變。設$(p,q) = d$，當$d = 1$時，圖形為紐結，此單一紐結以太陽光譜彩虹的連續漸近顏色呈現。當$d > 1$時，原參數式得出的是重疊的 d 個紐結，本輪環結程式將原重疊的程式做$\frac{2\pi}{d}$的旋轉或其他處理，使其不重疊而成有 d 個相扣紐結的鏈結，鏈結的各成分基本上以不同太陽光譜顏色區分（但「色彩」按鈕有時可以改變它們的顏色），可以分別呈現或同時呈現（用「秀結 n」按鈕）。「下視圖」按鈕呈現一般路網路或書本上呈現的輪環結圖形，圖 39 中的輪環結就是鏈結$T(9,6)$，三個紐結的聯集，以紅藍綠三種不同的顏色呈現。

構成輪環結的圖形的弧有多種形式：管狀、線狀、環帶、弧截面為正多邊形的柱形管。紐結程式有下拉式選擇按鈕可選擇紐結弧的形狀。弧截面正多邊形邊數大於 7 的正多邊形管，可以直接輸入一個數字而得。圖 40 展示各種弧呈現的紐結或鏈結，上方列的弧為管狀、線狀、環帶。下方的弧截面分別為正 3，6，7 邊形。當弧形狀為管或線時，尚可選擇是否同時呈現輪環面。

製作環帶弧或正多邊形截面弧時，需使用沿輪環結移動的坐標架，圖 40 中使用的是弗內特坐標架（Frenet frame），在圖中可看出，輪環結呈現時，有相當多的扭轉。數學算板內建削減扭轉的雙鏡射坐標架（double reflection frame, Wang et.al.

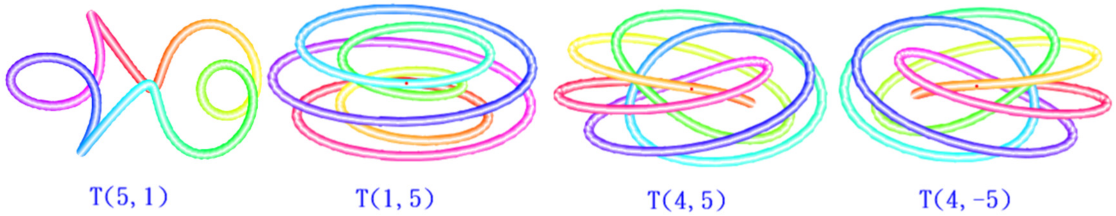


圖 38、左二圖：與圓等價的平凡結，右二圖：鏡射對稱的掌性紐結

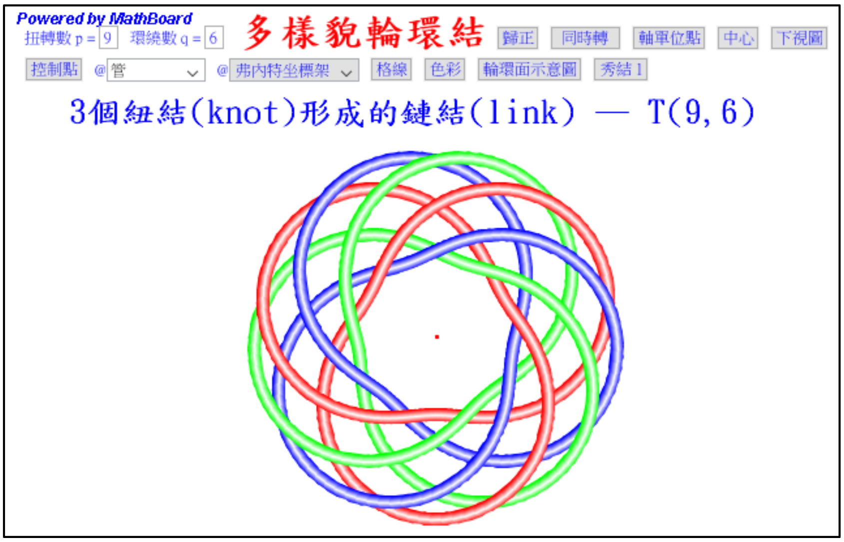


圖 39、輪環結程式畫面

2008)。程式提供選擇使用弗內特或雙鏡射坐標架的選擇框。圖 40 中的輪環結使用前者，圖 41 展示使用後者的對應圖形。可以看出扭轉削減的平順狀態。

按 鈕 (https://youtu.be/l46ltSHErRU) 參看輪環結程式簡介影片。圖 42 展示兩個坐標架在 C 點附近的坐標軸。按鈕 (https://youtu.be/M3UtXZmI9SE) 參看兩種坐標架影片的動態比較，在 A、B、C 三點附近，佛內特坐標架旋轉很多，而雙鏡射坐標架變化平順。對於任意互質的 p,q，數學算板的坐標架程式，均可動態展示輪環結$T(p,q)$上的兩類坐標架。

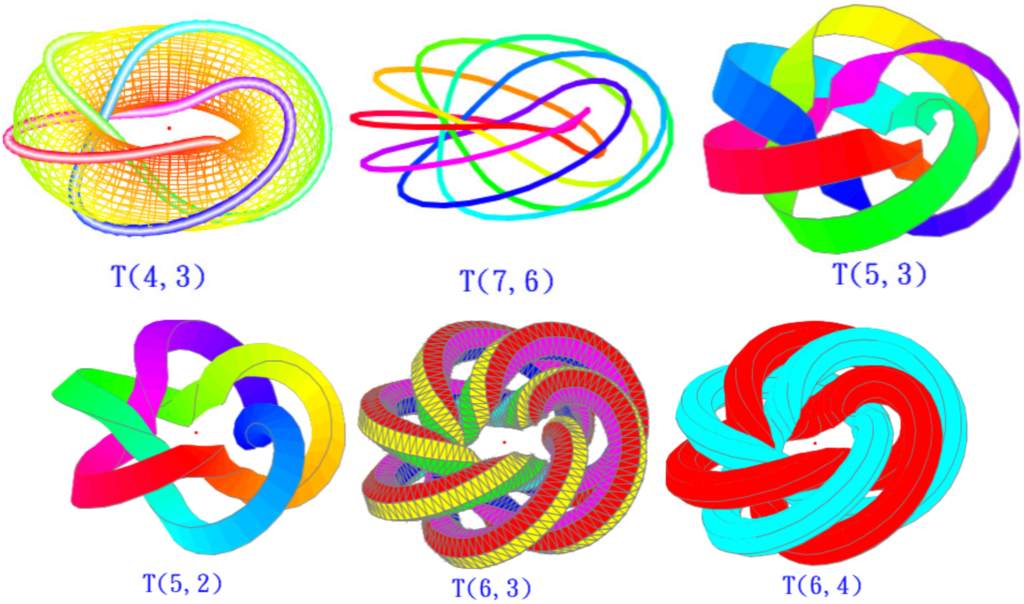


圖 40、不同形狀弧構成的輪環結

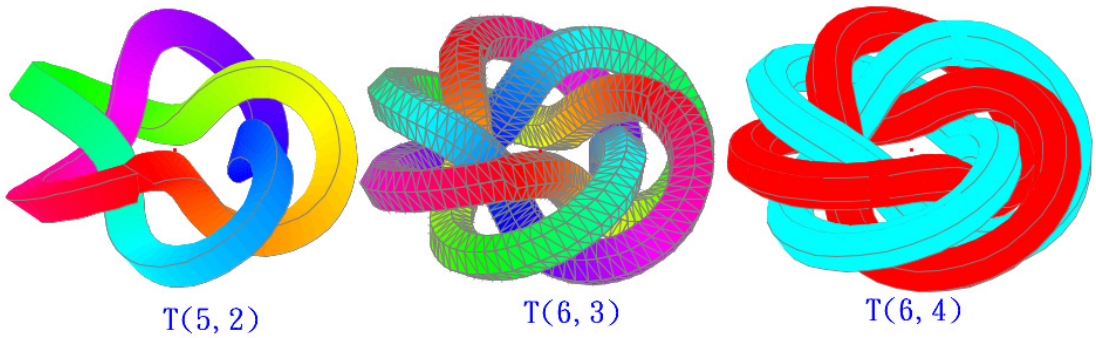


圖 41、與圖 39 對應的雙鏡射坐標架建立的圖形

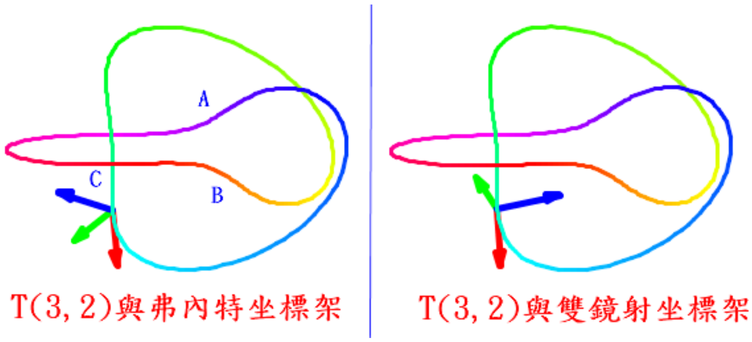


圖 42、弗內特坐標架與雙鏡射坐標架

伍、結語

本文首先介紹數學算板，它的內容可涵蓋自國小至大學的許多數學內容，應是協助數學教學設計的有利工具。然後我們介紹莫必烏斯帶及雙面環帶的一些性質，如單面雙面的曲面、邊界的條數、曲面的方向性等，討論兩類環帶的 1/2、1/3 切割，並推廣至 1/n 切割，並陳述數學算板的上製作的相關動態切割程式，展示切割的圖形。對於同樣是單面曲面的克萊茵瓶及數字 8 克萊茵瓶，也有圖形的簡單展示與說明。由於環帶的邊界正好是輪環結 T(p,2)，我們也順便介紹紐結及鏈結。對於紐結與鏈結我們只討論與輪環相關的紐結基本定義、性質及名詞。對於紐結圖形呈現，我們介紹了數學算板紐結程式，提供截面為管狀、點、線段、及正多邊形的圖形，也展示了許多圖形。由於數學算板是動態的數學內容呈現工具，本文中連結了一些用數學算板程式製作的相關動態影片，這些影片都放置在數學算板的 Youtube 頻道中（ MathBoard, https://www.youtube.com/channel/UCFor-dmj2HW3SqJYM4tHX-Q ），目前為止該頻道包含了 60 多個影片。數學算板的測試版 1.04，也將在本文發佈後，放在在網頁 http://mathboard.tw 上，希望本文對於數學教師及學生能有幫助。

參考文獻

林保平（民 108 已接受）：**複數及複變函數的圖形表徵在數學算板中的實踐**。數學傳播。

林保平（民 107）：多面體的生成及動態模型製作在數學算板上的實踐(上)。**科學教育月刊，第 412 期**，pp31-49。

林保平（民 107）：多面體的生成及動態模型製作在數學算板上的實踐(下)。**科學教育月刊，第 413 期**，pp2-14。

林保平（民 106）：雙曲幾何基本構圖及變換在數學算板中的實踐與應用。**科學教育月刊，第 402 期**，pp16-37。

林保平（民 101）：代數算板及其在代數教學上的應用。**中等教育季刊，第 63 卷第 3 期**，pp137-144。

林保平（民 95）：JavaSketchpad 編輯器在數學科教具學具環境設計上的應用。**科學教育月刊，第 290 期**，pp48-57。

林保平（民 89）：教具學具觀點的數學科電腦輔助教學設計實例。**科學教育研究與發展，第二十期**，pp29-46.。

Burde, G. and Zieschang, H.（2002）. *Knots, 2ndrev. ed.* Berlin: de Gruyter.

Hoste, J., Thistlethwaite, M., and Weeks, J.(1998). *The First* 1701936 *Knots. Math. Intell*. 20, pp33-48, Fall 1998.

Livingston, Charles (1993). *Knot Theory*. Mathematical Association of America. ISBN 0-88385-027-3.

Murasugi, Kunio (1996).*Knot Theory and its Applications*, Birkhäuser. ISBN 3-7643-3817-2

Norwood, Rick (1982). Every Two generator Knot is Prime, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 86, No. 1, pp143-147.

Schultens, J.(2007). Bridge numbers of torus knot. Mathematical *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 3, Nomember 2007, pp621-625.

Wang, W., J¨ uttler, B., Zheng, D., and Liu, Y. (2008). Computation of rotation minimizing frame. ACM Trans. Graph. 27, 1, Article 2 (March 2008). http://doi.acm.org/10.1145/1330511.1330513