解構我的「圓周長」教學

陳玉珊
臺北市立大學 教育系

壹、前言

「為何『圓周長』單元要等到六年級才教?」、「教圓周長，不是只要套套圓周長公式計算就可以了嗎?」、「我覺得動手操作很重要，可是如果每一個活動真的都讓學生動手操作了，時間根本不夠……」，上述疑惑都是學校同事們曾經問過筆者的問題。

圓的概念是國小平面幾何課程的重點(教育部，2008、2018)，但是由於「圓」為曲線，對於國小學童來說，圓周長的測量，不易透過直尺的測量而得到結果，因此在國小「圓周長」教學，現行三家版本(康軒、南一、翰林)的教科書都是提供兩種測量圓周長的方法，一是先在圓周上畫上一記號後再滾動一圈，二是拿繩子緊貼著圓周繞圓一圈，儘管這兩種方法都可以讓學生實際測量出圓周長，但學生在進行具體物操作時，必須得考量該具體物材料的選取，例如圓形圖卡不可過薄過厚、繩子不可過粗…等，以免造成學生在操作時出現過大的誤差，甚至最終只是淪於對公式的背誦罷了。一旦所學為片段的零碎知識，時間一久，學生就容易忘記自己曾經學過什麼，尤其對之後的圓面積教學，更無法有一個脈絡性的連結。因此，如何讓「圓周長」與「圓面積」教學更具有脈絡性的連結，便成了筆者想要重新解構「圓周長」教學的主因。

李源順(2018)提到想要真正了解曲線需要有微積分的概念，筆者透過數學史的啟發，對「圓周長」教學有了不一樣的新思維，恰巧筆者今年任教六年級，藉此機會重新解構自己的「圓周長」教學，嘗試以「無限分割」的方式(隱含逼近概念)實踐在自己的數學課室中，學生的解題過程確實也展現了令人驚豔的表現。為此，筆者認為以「逼近」的概念來進行圓周長的教學，或許能夠為大家提供另一條不同以往的教學新路徑。

貳、相關文獻

一、現行康軒版教科書的編排

國小有關「圓」的教學脈絡，從中年級開始，主要是認識圓，知道圓心、半徑、直徑、圓周為圓的構成要素;到了高年級，才進行圓周長、圓周率與圓面積的教學。筆者任職的學校，六年級的數學課本是選用康軒版本，以下簡單介紹康軒第十一冊教科書在「圓周長」和「圓面積」的教學活動設計。

(一) 圓周長的教學活動設計

現行康軒版教科書針對「圓周長」的教學活動設計，提供了二個活動：第一個活動：「圓周長」，透過具體操作，讓學生測量出圓周的長度，提供測量的方法有二種，其中一種方法，是先在圓周上畫上一記號後再沿著直尺的邊緣滾動一圈，另一種方法，則是拿條繩子緊貼著圓周繞圓一圈，測量完圓周長之後，接著進入第二個活動：「圓周率」，是透過上述兩種方法實測出不同大小圓的圓周長，直接讓學生進行「圓周長÷直徑」的計算，讓學生知道其值並不會因為圓的大小不同而有所改變，且約略都等於 3，之後再直接宣告它稱為「圓周率」，最後推導出公式為「圓周長=直徑×圓周率(3.14)」。

(二) 圓面積的教學活動設計

現行康軒版教科書對於「圓面積」的教學活動設計，同樣編排了二個活動，第一個活動：「非直線邊的平面區域面積」，是採用平方公分板去點數出葉子形狀的不規則平面面積，進一步去估算圓面積，接著進入第二個活動：「圓面積公式」，則是透過將圓分別平分成 8 份扇形、16 份扇形、32 份扇形，再將其拼湊成平行四邊形 or 長方形，進而推導出公式為「圓面積=半徑×半徑×圓周率(3.14)」。

(三) 「圓周長」與「圓面積」的脈絡性連結

當代數學教育理念強調的「概念性理解」，是指所有教學活動與題目的鋪陳，所要帶給學生的**數學概念必須是前後連貫**的，絕不只是單純的活動操作與回答，因為這樣的學習容易淪於程序性知識的問答而已(Hiebert & Carpenter，1992)，換言之，一個好的教學活動設計，是要能夠引發學生學習上的連結。

筆者仔細分析上述教學活動設計，現行教科書所編寫「滾動一圈」或是「拿繩子繞一圈」的圓周長教學活動，與「將圓進行等分切割，再將這些等分切割後的扇形拼湊成平行四邊形 or 長方形」的圓面積教學活動，筆者認為這兩個教學活動彼此獨立，並沒有很強的脈絡性連結。也就是說，現行教科書在「圓周長」與「圓面積」的教學活動設計上，其數學概念是缺乏前後連貫的，因此學生都必須得透過老師的「直接指令」才能夠進行每一個活動，而學生的學習也都是屬於比較被動式的操作。

二、數學史的啟發

當代數學教育的理念，一直都希望能教給學生概念性知識的理解，所以在教學活動的設計，理應重視承先啟後的脈絡性發展，如何讓學生在「圓」的學習上更有感？筆者逆向操作，先從了解圓面積教學的內涵開始，再往前推導圓周長的教學內涵，藉由透過閱讀相關的數學史—中國劉徽的「割圓術」以及西方阿基米德的「窮舉逼近法」，發現「圓」概念的教學，從「逼近」的角度切入似乎是一個值得嘗試的選擇。

(一) 圓面積

礙於篇幅限制，筆者只列出中西方各一個最著名的圓面積公式的推導方法。

1. 劉徽的「割圓術」

有關「圓」的數學史，就不得不提到曹魏有名的數學家—劉徽，劉徽的「割圓術」：割之彌細，所失彌少。割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣！觚面之外，猶有餘徑，以面乘餘徑，則冪出弧表。若夫觚之細者，與圓合體，則表無餘徑。表無餘徑，則冪不外出矣。以一面乘半徑，觚而裁之，每輒自倍，故以半周乘半徑而為圓冪。其中將圓內接正多邊形「割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣」，無疑是涉及無限概念的一種推論，只要不斷切割下去，圓內接正多邊形最終一定完全與圓周疊合在一起（洪萬生，2004），如圖 1。

2. 阿基米德—窮舉逼近法

阿基米德則是將歐幾里得提出的「逼近」概念作了有效的運用，他發現隨著圓外切多邊形和內接多邊形的邊數增加，多邊形將會越來越接近圓(如圖 2)，此方法就是數學史上有名的「窮舉逼近法」(維基百科，2019)。

根據上述兩個數學史的例子，不論是中國劉徽的割圓術，或是西方阿基米德的窮舉逼近法，都是用「逼近」的方法來求得圓面積，因此筆者認為，從「逼近」的概念引導學生學習圓面積的教學方式確實可行。

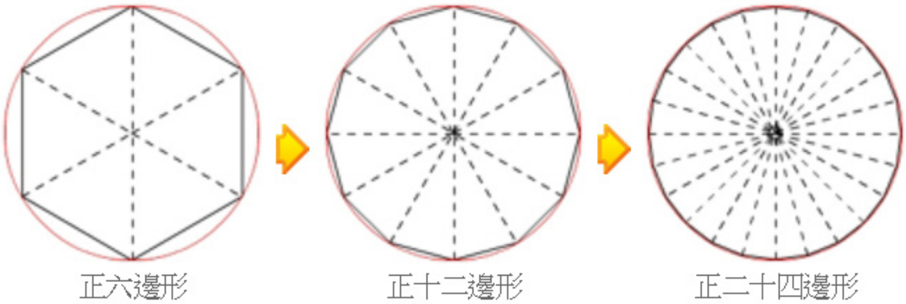

圖 1、劉徽的割圓術

圖 2、阿基米德的窮舉逼近法

(二) 圓周長

圓周長，顧名思義，就是圓的周界長度，按照知識發展的常理，我們對於事物的認識是，先從直觀經驗開始，再歸納或猜出規律，最後提出證明而完成。以往我們所學到的圖形邊，都是直線邊，所以對於直線邊的測量，小學生最常使用的測量工具便是直尺，然而對於一般的曲線， 我們就可在其上取多個點，連成折線，計算折線的長度(如圖 3)。如果所取的點之個數趨近於無窮大並且每一小段都趨近於 0，如果折線的長度存在有極限值，那麼這個極限就定義為曲線的長度(蔡聰明，2000)。

圖 3、在曲線上取有限多個點，連成折線，計算折線的長度

根據上述，可知圓周長和圓面積的教學，兩者都隱含微積分「逼近」的概念。礙於篇幅限制，本文只聚焦在解構的「圓周長」教學。

參、教材設計與教學實踐

透過文獻，讓筆者對「圓」的教學有了新的體認，原來不管是「圓周長」還是「圓面積」的教學，絕不只是要教學生學會圓周長的計算而已，更重要的是為日後「不規則圖形的周長與面積」之前置作業，也就是說，我們在教學生如何導出「圓周長＝直徑×圓周率(3.14)」公式的過程中，如何將「逼近」的概念教給學生?更具體來說，我們是如何引導學生從「求曲線」去產生「逼近」的概念，因為當學生有了「逼近」的概念之後，學生才能去感受到「所有不規則圖形中的曲線，只要透過無限份數的切割，切割後的曲線都將會逼近於直線」。

一、教材設計思考

以學生學習為中心的教學，其中有一個很重要的精神，就是希望學生在學習新概念的同時，都要能夠與舊經驗連結，因此在進行圓周長教學之前，筆者會先**刻意要求**每一位同學都必須先自備一個**任意大小**的圓形圖卡，且該圓形圖卡中不能有圓心的痕跡，也就是說這個圓形圖卡不能是透過圓規畫出來的，企圖透過「任意圓形圖卡」的各種測量結果，讓學生<u>自行算出</u>並<u>發現</u>不管是大圓還是小圓，其圓周長和直徑的比值都會接近 3，而這比值稱為「圓周率π」，進而最後能夠推導出圓周長公式：圓周長＝直徑×圓周率(3.14)。

二、教學實踐

本次圓周長教學，學生手邊只有大小不一的圓形圖卡、直尺等工具，藉由老師的提問，引發學生思考可能的解題策略。老師(即筆者)有三點任務要求：

1. 解題策略越多種越好。
2. 發表解題策略時，務必說明所依據的

數學論點。

3. 寫出合理的算式及算出答案，並清楚的說明。

(一) 活動一：連結舊經驗—先找出圓的構成要素(0.5 節)

教學片段 1：第一組學習表現（T 表示教師，S12 表示 12 號同學），如圖 4。

T：「請各位同學拿出手上的**大小不一的圓形圖卡**，告訴我，當你拿到這張圓形圖卡時，你會**想要知道什麼樣的訊息**，以及這些訊息該怎麼得知?此時你的**手邊只有直尺而已**唷…」

S12：「我們會想知道直徑、半徑、圓周、圓心…」

T：「這些訊息我們可以怎麼知道呢?」

S12：「直徑，就是把圓摺一半。半徑，是直徑÷2，就是把圓再對摺一次的意思。圓周，就是拿尺放在桌上、或是圓滾一圈的長度。圓心，就是把圓垂直對摺，交錯的點就是圓心。」

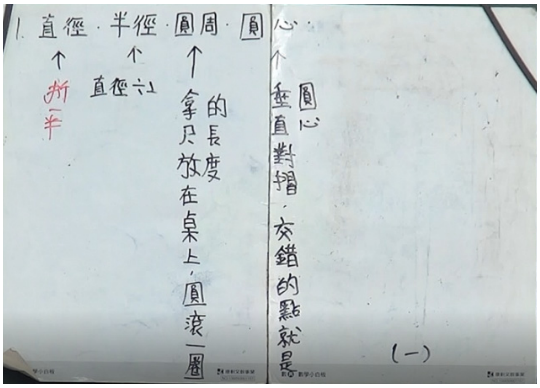

圖 4、第一組的解題策略

根據教學片段 1，筆者以本活動一先引起學生「回想」中年級時曾學過圓的舊經驗，企圖引導學生透過「摺紙」的方式尋找圓的構成要素(直徑、半徑、圓心、圓周)，作為活動二的前置作業。

(二) 活動二：找出圓周長(1~1.5 節)

教學片段 2：（T 表示教師，S8 表示 8 號同學），如圖 4。

T：「除了第一組的這個方法，**還有沒有其它的方法呢?**…」

S21：「老師，可以用繩子嗎?…」

T：「我們手邊目前**只有圓形圖卡和直尺而已**唷…」

SS：(全班開始陷入沉思…)

S8：「(突然大叫)我想到了…我們可以**把圓對摺很多次**，圓攤開來之後，就會發現**每一小段的圓周就會很像直線**，這樣就可以用尺量了…」

T：「你是怎麼想到的呢?…」

S8：「我突然想到五年級時學多邊形時，**越多邊形就會越像圓形**，所以我就把圓形想作是一個正多邊形，只是**它的邊有很多、無限多**而已…」

1. 第一組的解題策略：

學生先將圓形圖卡畫 64 等份(學生是採用對半畫的方式)，此圓就有 64 個小扇形，每一個小扇形的弧長都很接近

直線，再用尺量出每一個小扇形的弧長約有 0.9cm，最後將每一等份的長度(2.1 cm)乘以 64，算出的結果即為圓周長，如圖 5、圖 6。算式如下：

$$0.9\times64=57.6$$

每一個小扇形的弧長約 0.9 cm，有 64 個，所以圓周長為 57.6 cm

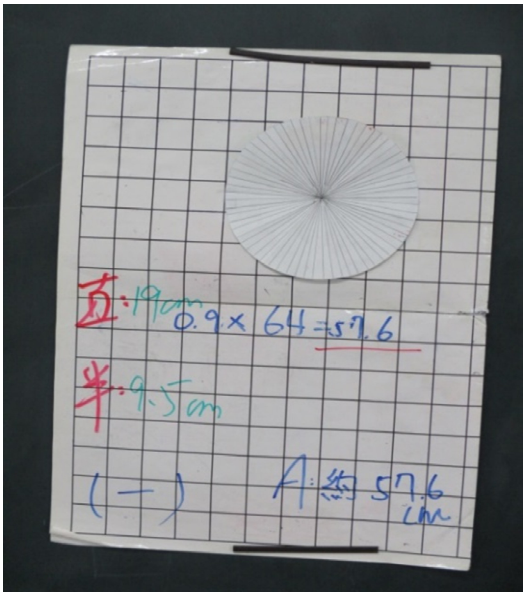

圖 5、第一組的解題策略

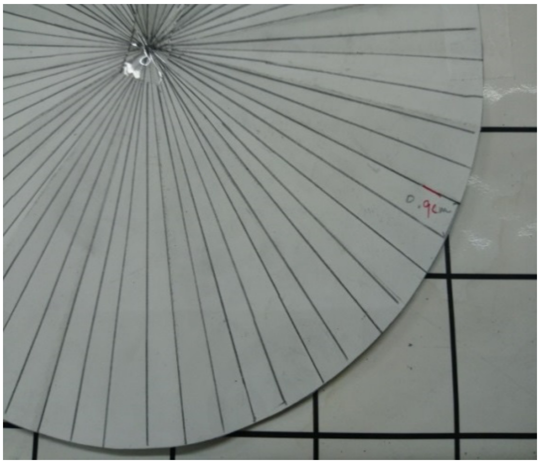

圖 6、每一段小弧長約 0.9 cm

2. 第二組的解題策略：

學生先將圓形圖卡對摺成 32 等份(因為圓形圖卡的紙有點厚度，最多只能摺出 32 等份)，將該圖卡攤開後即可發現此圓有 32 個小扇形，每一個小扇形的弧長都很接近直線，再用尺量出每一個小扇形的弧長約有 2.1cm，最後將每一等份的長度(2.1 cm)乘以 32，算出的結果即為圓周長，如圖 7、圖 8。算式如下：

$$2.1\times32=67.2$$

每一個小扇形的弧長約 2.1 cm，有 32 個，所以圓周長為 67.2 cm

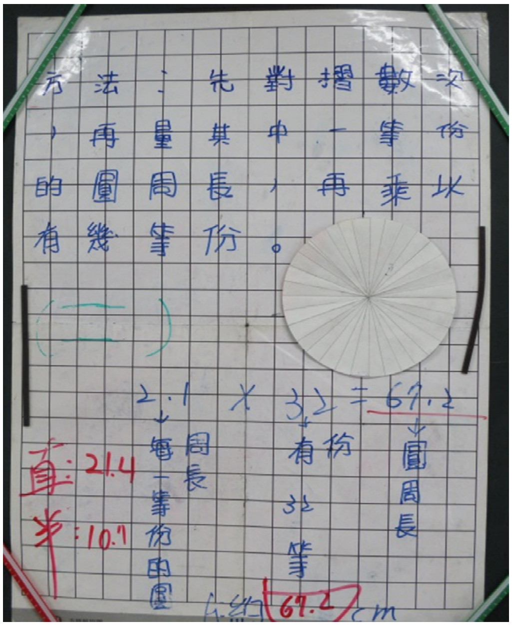

圖 7、第二組的解題策略

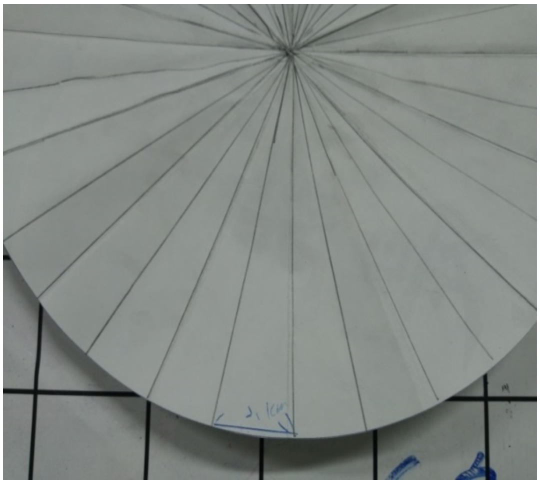

圖 8、每一段小弧長約 2.1 cm

3. 第三組的解題策略：

學生先將圓對摺成八等份，先將每一個 $\frac{1}{8}$ 圓的扇形弧長，再以每 0.5 cm 畫一小段，總共可畫出 11 小段，畫完之後還有剩 0.2 cm，也就是每一個$\frac{1}{8}$圓的扇形弧長是由 11 個 0.5 cm +1 個 0.2 cm 組成， 如圖 9、圖 10。算式如下：

$0.5\times11=5.5$

每一個$\frac{1}{8}$圓的扇形弧長，有 11 個完整的 0.5 cm (紅、藍色)，共 5.5 cm

$5.5\times8=44$

整個圓中，完整的 0.5 cm，共 44 cm

$0.2\times1=0.2$

每一個$\frac{1}{8}$圓的扇形弧長，須再補足 1 個 0.2 cm (黑色)

$0.2\times 8=1.6$

整個圓中，不完整的小線段，共 1.6 cm

$44+1.6=45.6$

整個圓的圓周長

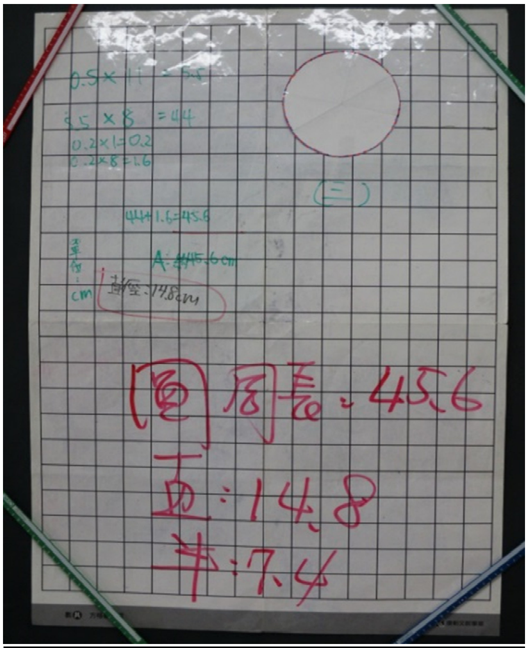

圖 9、第三組的解題策略

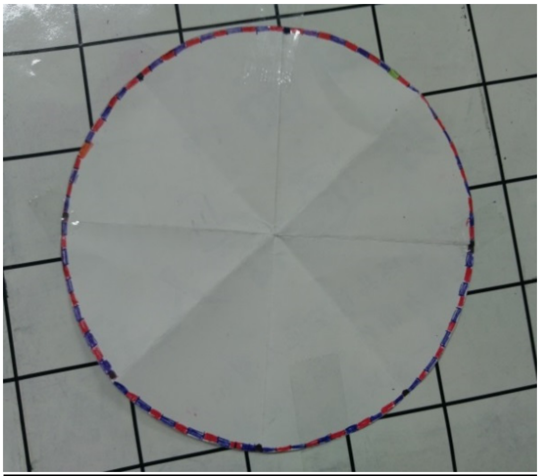

圖 10、紅 0.5 cm、藍 0.5 cm、黑 0.2 cm

4. 第四組的解題策略：

學生先將圓形圖卡對摺成 16 等份，將該圖卡攤開後即可發現此圓有 16 個小扇形，每一個小扇形的弧長都很接近直線，再用尺量出每一個小扇形的弧長約有 3cm，最後將每一等份的長度(3 cm)乘以

16，算出的結果即為圓周長，如圖 11、圖 12。算式如下：

3×16=48

每一個小扇形的弧長約 3 cm，有 16 個，所以圓周長為 48 cm

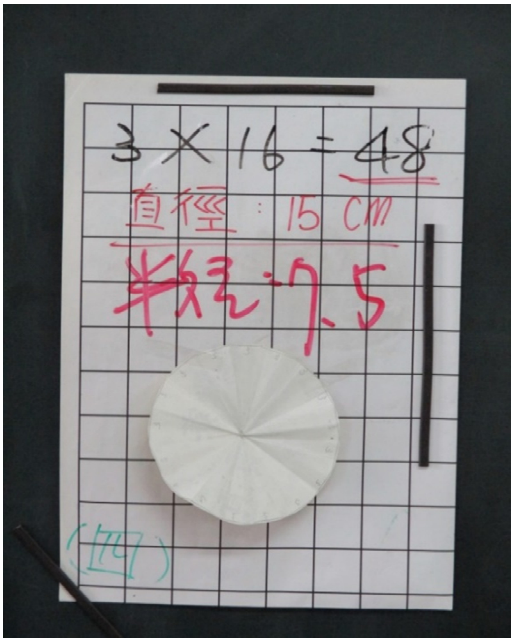

圖 11、第四組的解題策略

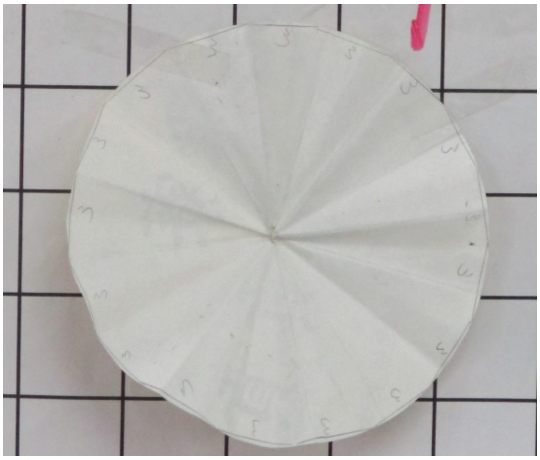

圖 12、每一段小弧長約 3 cm

根據教學片段 2，筆者以「還有沒有其它的方法呢?」、「只有圓形圖卡和直尺而已」的問題，企圖讓學生在有限的工具之下，跳脫課本所提供的方法，並起動學生透過摺紙的方式與舊經驗的連結(五年級學過多邊形)。

上述分析顯示每一組同學能夠在此次進行「圓周長」概念的教學過程中，雖然做法上不盡相同，但都能去直覺感受無限切割的「逼近概念」，並能往該方向前進。且同學在說明「如何用直尺求得圓周長」的解題過程中，能夠以「我們可以把圓對摺很多次…每一小段的圓周就會很像直線…」的發現，此充分顯示全班學生透過此次教學，呈現了他們已經具備了數學微積分：「所有不規則圖形中的曲線，只要透過無限份數的切割，切割後的曲線都將會接近直線」的逼近概念。

(三) 活動三：找圓周率(0.5 節)

教學片段 3：第二組學習表現（T 表示教師，S9 表示 9 號同學），如圖 13。

T：「現在大家圓周長都知道了，請問從各組所求得的圓周長，這些圓周長的數據之間有沒有存在著什麼樣的關係或規律呢?」

S9：「我們發現每一組所算出來的周長，如果去除以那個圓的直徑，發現每一組除出來的商都幾乎是 3 點多...，也就是圓周長是直徑的 3 點多倍...」

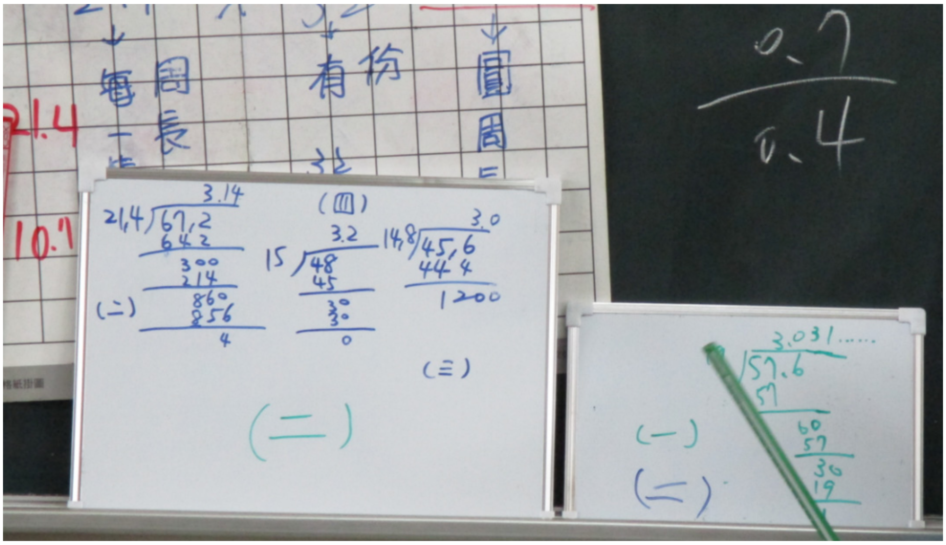

圖 13、圓周率約是 3

根據教學片段 3，筆者以「這些圓周長的數據之間有沒有存在著什麼樣的關係或規律呢?」的問題，引導學生進行觀察與探究。

上述分析顯示第二組同學能夠在此次進行「圓周率」概念的教學過程中，去觀察兩個數量之間的「倍數關係」，並能往建立規則(尋找定值)的方向前進，且第二組同學在說明「圓周長是直徑的 3 倍多」的解題過程中，能夠對「3.031、3.14、3.0 和 3.2」這些數字的發現，說明他們已能夠進行圓周率的推論。此充分顯示第二組學生透過此次教學，呈現了他們已經具備了找規則(尋找定值)的能力。

(四) 活動四：最後導出圓周長公式(0.5 節)

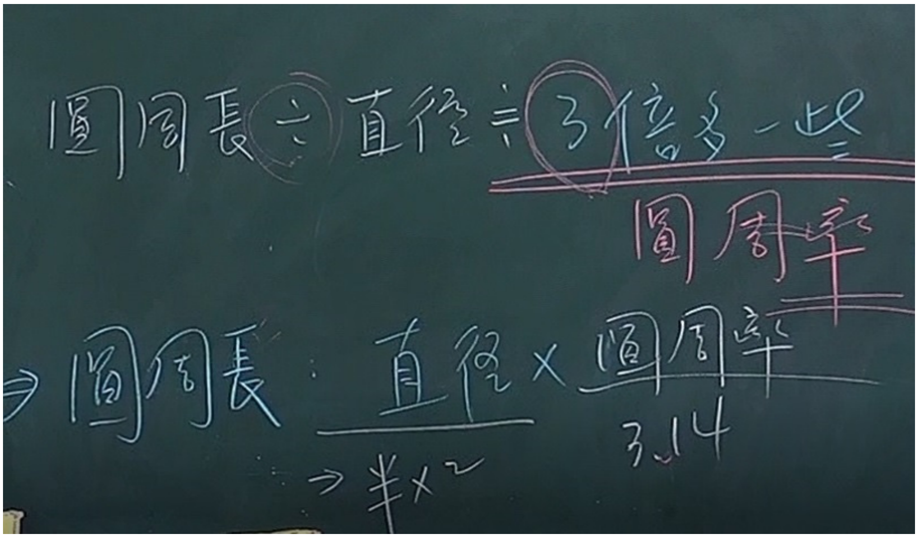

圖 14、圓周長公式

肆、結論

根據上述分析，筆者認為本次教學確實能夠培養學生「逼近」的概念。

雖然現行教科書編排測量圓周長的方法是我們一般比較常見的方法，但是每一個活動的操作以及活動間的連結，都得依賴老師的直接指令才能進行，學生缺乏主動且深入的思考與探究，而學生的解題策略也顯得較為單一不夠多元。筆者認為此次解構圓周長的教學，優點有以下五點：

一、學生可連結中年級曾經學過圓的基本構成要素有圓心、直徑、半徑、圓周，引發學生對於圓周長的求知需求。

二、學生為了想要知道圓周長(需求感)，在受限於只有直尺的情況下，腦中會不斷進行思考，在思考的過程中就會去回想到五年級曾經學過的「多邊形」概念，最後會發現「將曲線(圓周長)進行無限切割，那麼切割後的每一段小曲線會接近直線」，進而產生「逼近」的概念。

三、學生的解題策略比較多元化。

四、圓周率以及圓周長公式將會由學生自行導出，讓學生學習數學更有感。

五、對日後圓面積的學習會更有脈絡性。

透過這一次的解構，解開了筆者的疑惑，為什麼我們要花這麼多的時間來教「圓」？原來是**為了教導學生有「逼近」的概念，而這「逼近」是學微積分非常重要的關鍵概念，換言之，未來要教「不規則圖形」的周長或面積時，「圓」的教學就是啟蒙例**。教學是為日後求「不規則圖形」最重要的教學，就是要教學生對於非直線邊的**過程**中，如何將「逼近」的概念教給學生?更具體來說，我們是如何引導學生從「求不規則圖形面積」去產生「逼近」的概念，因為當學生有了「逼近」的概念之後，學生才能去感受到「**無限多邊形，最後都會逼近於圓形；也或者從另一個角度來看，所有不規則圖形中的曲線，只要透過無限份數的切割，切割後的曲線都將會逼近於直線**」。

有了數學史的啟發，原來以「逼近」的概念來教圓周長，確實是另一條可行的路徑。

參考文獻

李源順(2018)。**數學這樣教：國小數學感教育**。台北：五南圖書出版股份有限公司。

洪萬生(2004)。三國 π 裏袖乾坤–劉徽的數學貢獻。**《科學發展》**，**384** 期，68 ~ 74 頁。

康軒文化(2019)。**國小數學第十一冊**。新北市：康軒文化事業有限公司。

蔡聰明(2000)。數學發現趣談。臺北市：三民。

教育部(2008)。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。台北市：教育部。

教育部(2018)。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程綱要正式版。

維基百科(2019)。阿基米德。取自：https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%98%BF%E5%9F%BA%E7%B1%B3%E5%BE%B7。

Hiebert& Carpenter(1992).Learning and teaching with understanding.In Grouws,D.A.(Ed). Handbook of research on mathematics teaching and learning.MacMillan.