從漏斗鏡看到正多面體結構

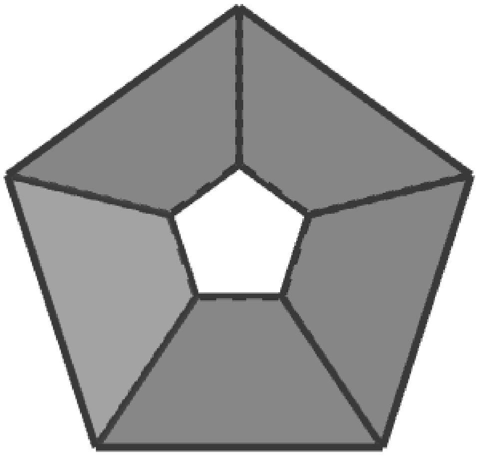
李政憲 [1*] 王儷娟 [2] 袁靜娟 [3]

[1] 新北市林口國民中學
[2] 臺南市立仁德文賢國民中學
[3] 臺中市立光榮國民中學

壹、前言

德國吉森的數學博物館的網頁[1]資料中看見一個令人感興趣的體驗活動(圖一)，形狀是一個被截了尖角的五角錐漏斗鏡如圖二

圖一



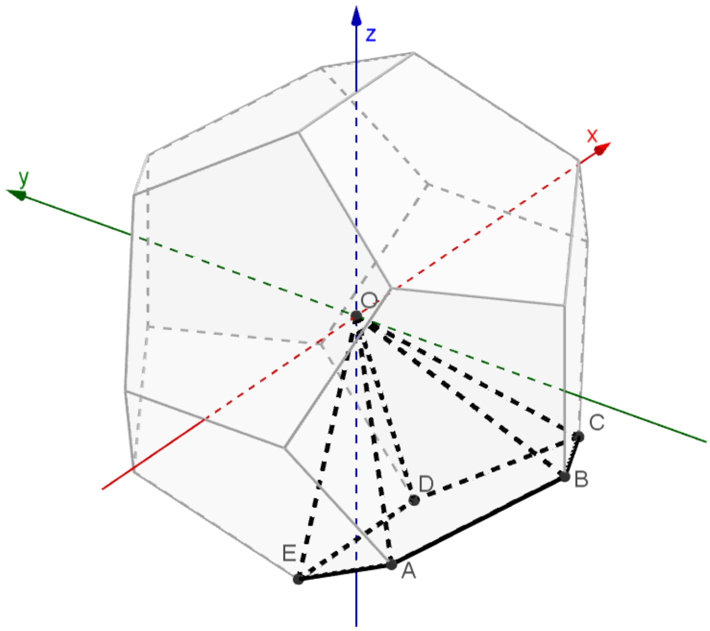
圖二

這個作品周圍是由五個梯形的鏡子構成，人如果從後方正五邊形的洞口探頭就可以看到五個不同角度的鏡像；仔細觀察圖一的底部又好像看到了正十二面體其中六個五邊形的面，不禁讓人好奇，這個五角錐的漏斗鏡到底和正十二面體有甚麼關係呢？

貳、本文

如果我們以正十二面體的形心為原點 O(0,0,0)且將正十二面體拆解為 12 個五角錐，且這些五角錐均以正五邊形的面為底面，並以五個等腰三角形（O 點為共同頂點）為側面所構成（如圖三）。[2]

*為本文通訊作者



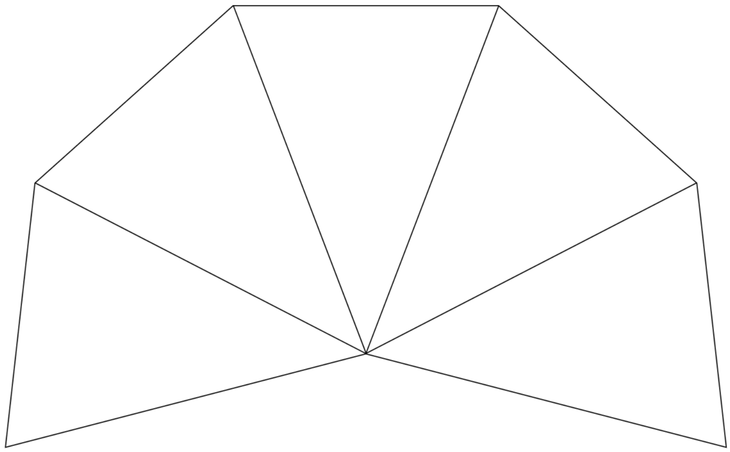
圖三

若五角錐 O-ABCDE 的底面正五邊形 ABCDE 的頂點座標分別為 A(-1,-1,-1)、B(0,-φ,-1/φ) 、C(1,-1,-1) 、D(1/φ,0,-φ) 、E(-1/φ,0,-φ)

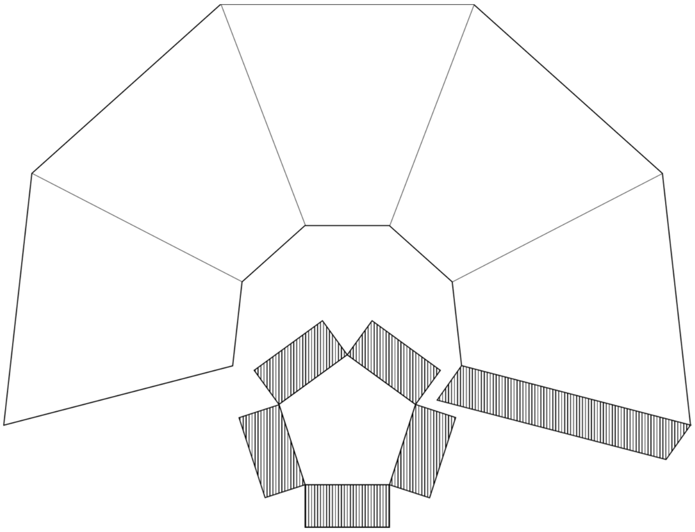
可得$\overline{AB}=\sqrt{1^2+(1-\varphi)^2+\left(1-\frac{1}{\varphi}\right)^2}=\sqrt{\left(\varphi+\frac{1}{\varphi}-1\right)^2}=\sqrt{5}-1$

$\overline{OA}=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

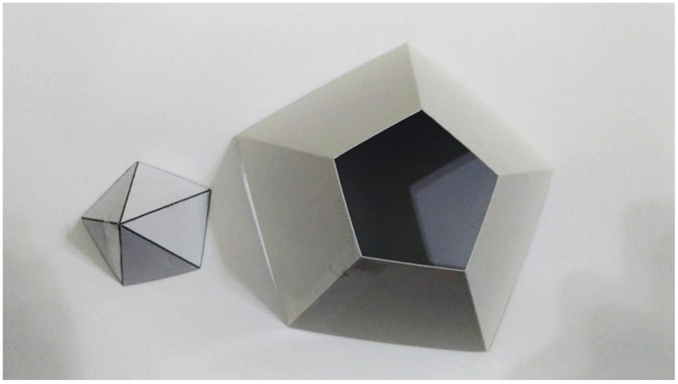
五角錐 O-ABCDE 的側面展開圖是五個等腰三角形，如圖四，而截了尖角的五角錐漏斗鏡展開圖，如圖五，其中的正五邊形用意為幫助穩固五角錐的形狀，如果利用鏡面紙製作即可完成圖六的成像，結果如圖七至圖九。



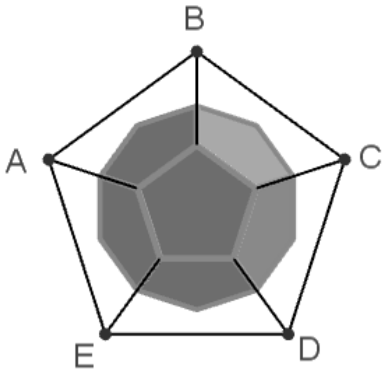
圖四



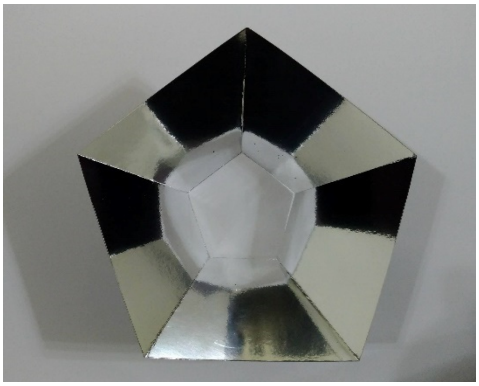
圖五



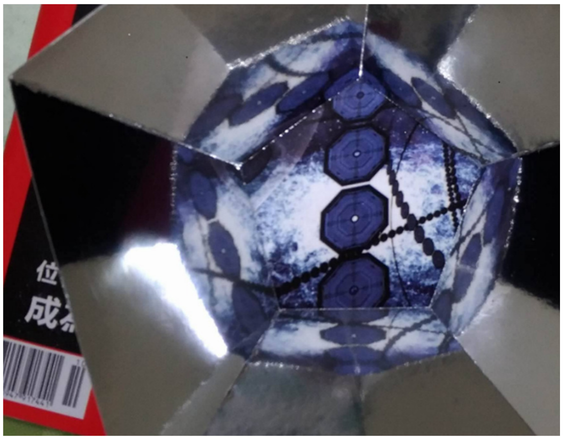
圖六



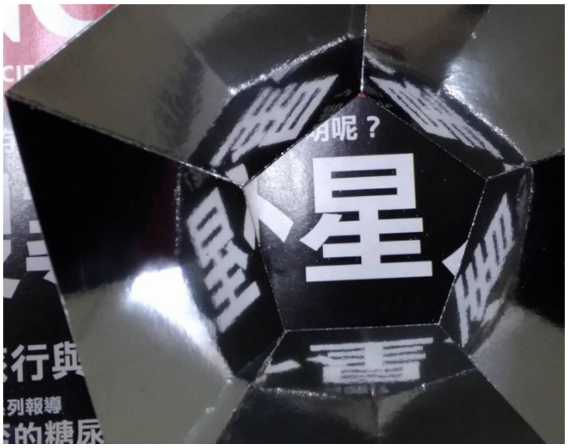
圖七-1



圖七-2

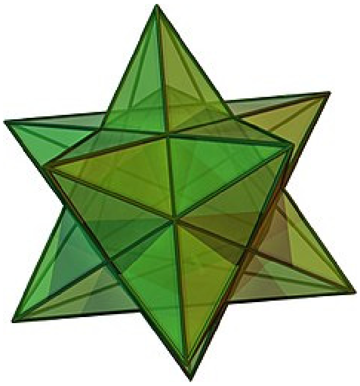


圖八

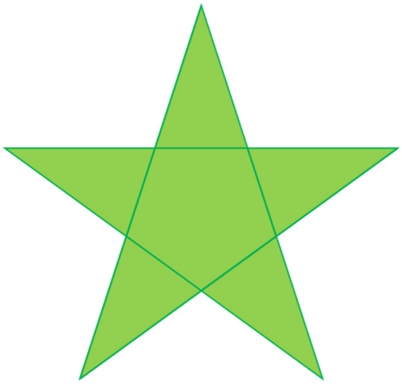


圖九

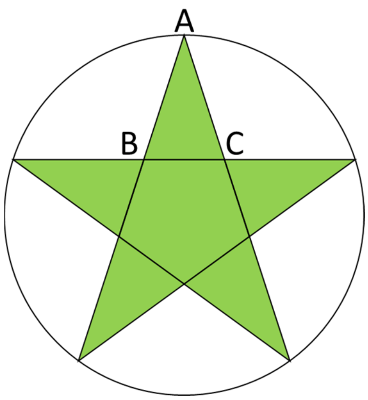
接著我們作點變化，想在五角錐的漏斗鏡中是否可能呈現小星形十二面體(圖十)呢？觀察圖十我們可以發現小星形十二面體有十二個五角星的面如圖十一。



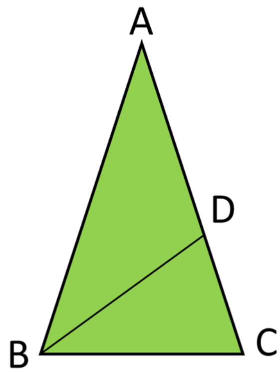
圖十　圖片來源：維基百科



圖十一



圖十二



圖十三

由圖十二可知△ABC 為等腰三角形且∠A=36°，若在$\overline{AB}$上取一點 D 使得$\overline{BC} = \overline{BD}$則△ABC~△BCD（如圖十三）

$\overline{AB}:\overline{BC} = \overline{BC}:\overline{CD}$

假設$\overline{BC}$=1，$\overline{AB}$=x

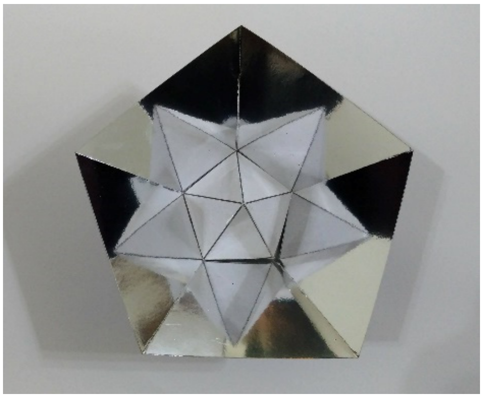
x:1=1:(x-1)

$x^2 - x - 1 = 0$

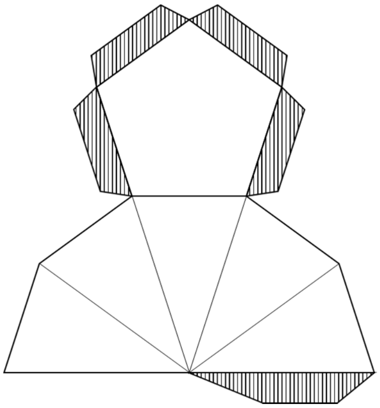
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\text{不合}\right)$$

$\therefore x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$即$\overline{AB}:\overline{BC}$的比值恰好為黃金比例。

因此要在五角錐的漏斗鏡中呈現小星形十二面體，只要在內部放入一個五角錐，但是其側面的等腰三角形腰長與底邊長的比值必須為$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$約為 1.618 即可（如圖十四）。製作展開圖如圖十五，我們藉由動手做體會了數學之美！



圖十四



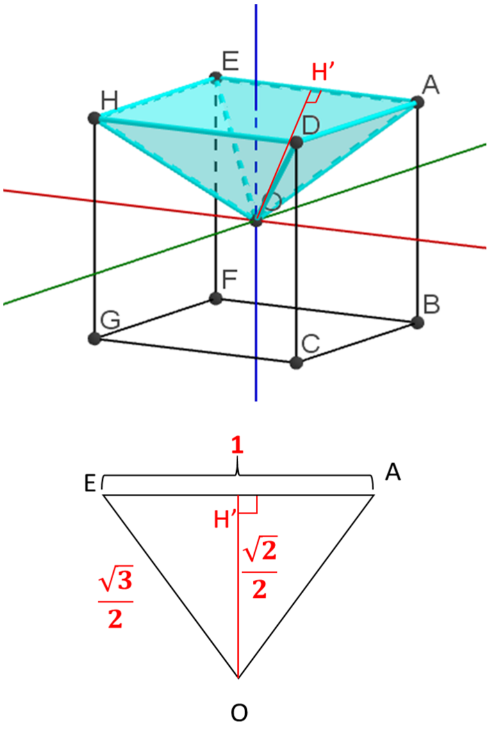
圖十五

在藉由上述討論了解漏斗鏡的結構與種種變化後，接下來我們突發奇想，想探討是否有其他的多面體作品，也利用漏斗鏡原理製作，不過卻有不同的結構與效果呢？於是乎我們就從最常見也容易製作的正方體開始作起，計算從中心點連到其中一面四個頂點的四角錐邊長比例。

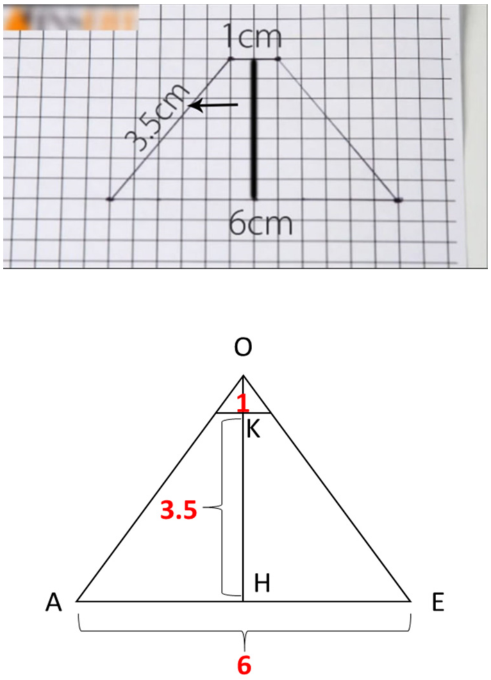
如圖十六，若 O-AEHD 為正方體內的六分之一四角錐，且正方體的邊長為 1，我們可以算得此錐體側面等腰三角形的底邊長上的高$\overline{OH'}$與底邊長$\overline{AE}$的比值為$\frac{\sqrt{2}}{2}$，約為 0.707，而這個比值又有什麼特殊的作品可以應用呢？

根據我們在網路上搜尋「全息投影」製作的連結[3]，所謂的全息投影，指的是通過光的干涉和衍射原理，來記錄並再現物體的三維信息，讓物體可以藉由 2D 的投影在特製的投影元件反射或折射後，產生 3D 的效果並以裸眼觀看；而根據網頁上所提供的製作方式，我們要製作一個上底為 1，下底為 6，且高度為 3.5 的等腰梯形（如圖十七）作為投影的基本元件，並以四個基本元件組合為一個錐台置於手機的全息投影影片上作為投影元件；於是我們延長此等腰梯形的兩腰至頂部交於 O 點，則 OAE 將為等腰三角形，若假設 O 至上底中點的長度$\overline{OK}$為 x，並根據三角形的相似列式：

x：(x+3.5)=1:6，解得 x=0.7，亦即$\overline{OH}$=0.7+3.5=4.2，故$\overline{OH}$:$\overline{AE}$=4.2:6，比值為 0.7，與我們剛剛計算出來的 0.707 十分接近！

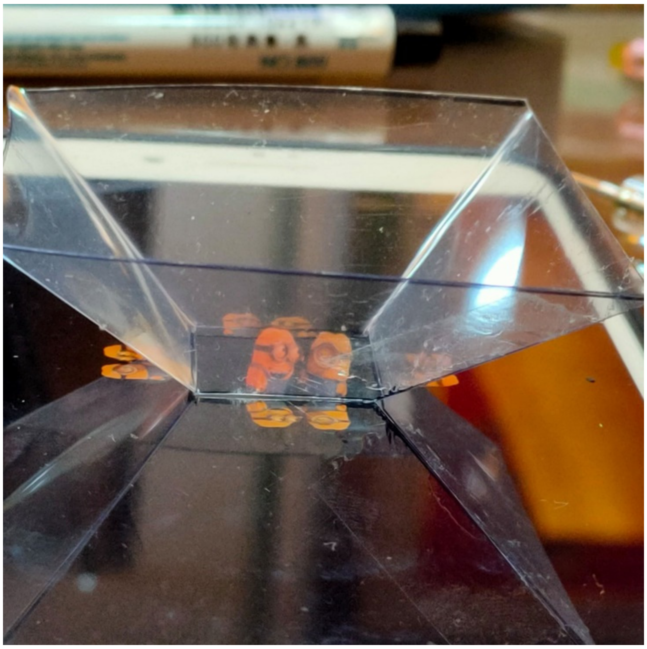


圖十六



圖十七

所以我們便可以依照網站上所介紹的製作方式，以上述比例裁切一般透明的投影片，以手機播放適當影片[4]，試著製作全息投影的效果如下圖十八了！



圖十八

參、結語

本文從一個數學博物館的展品談起，理解其與正十二面體的數學結構關聯性，以及展品投影的物理原理後，並可利用數學知識延伸在作品中呈現小星形十二面體；接著應用於正立方體，以同樣的方式，理解全息投影的比例與製作方式，可謂是結合數學、自然、藝術與生活科技的一個多元化課程；特別感謝上海市普陀區現代教育技術中心常文武博士指導本文發想並協助完成，有興趣的朋友不妨試試，也可以進一步探索其他多面體是否還有更多我們所不知道的特性囉！

參考文獻

[1] 德國吉森的數學博物館 http://www.erlebnisland-mathematik.de/en/portfolio/spiegeltrichter/
[2]可參考 Geogebra 所構造的正十二面體於空間中的座標如下：https://www.geogebra.org/m/akxjyppk?fbclid=IwAR23WS1L7LIvbHpxV73hnEbxrfkwu7tevLTxTvb7udX8kqxNIgEIomj34FA
[3]「全息投影」介紹與製作方式：https://kknews.cc/zh-tw/science/4lqnl92.html
https://zhuanlan.zhihu.com/p/28774752?fbclid=IwAR3AkRWFkPY9_uQaIVGMuNmfwyVRdCqyUjkTm4JNQboO-2gJB_3LAuxooHM
[4]「全息投影」影片播放清單：https://www.youtube.com/watch?v=Gt-ZvBbgfFU&list=PL7lH_f5MH6lQHCpZ2kMFg6aOwrmS11orW