從一個複數性質的證明談起

連威翔

苗栗縣政府環保局安心即時上工計畫人員

壹、前言

在國立中山大學雙週一題徵答活動中，108 學年度第一學期第六題與複數有關，該問題如下：

第六題：設 $P(z)=z^2+az+b$ 為複數 z 之多項式，其中係數 a,b 為複數。假設對所有 z，滿足 $|z|=1$，使得 $|P(z)|=1$，證明 $a=b=0$。

此問題的公告解答，請參考[1]，其中共有四種解法。

筆者注意到[1]中的第四種解法巧妙地用上了一個性質，該性質如下：

性質 1：設 α,β,γ 為複數，使得 $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ 且 $\alpha+\beta+\gamma=3$，則

$$\alpha=\beta=\gamma=1. \tag{1}$$

此性質在解法中扮演了重要的角色，但該解法並未介紹性質 1 的證明。

本文接下來的內容，將以性質 1 的證明作為出發點，依序介紹一些有趣的發現供大家參考。底下第二節中，筆者完成性質 1 的證明之後，也會接著證明一個由性質 1 推廣而得的新性質。而第三節中，筆者則會將上述徵答題加以推廣，並且將運用第二節中的新性質來證明推廣後的新問題。

貳、從性質 1 的證明談起

在著手證明性質 1 之前，筆者先介紹底下的性質 2：

性質 2 (三角不等式)：設 z_1,z_2 為複數，則有

$$|z_1|+|z_2|\geq|z_1+z_2|. \tag{2}$$

上式等號成立的充分必要條件是 $z_1z_2=0$ 或 $\frac{z_1}{z_2}$ 為一正實數。

底下，我們分(a), (b)兩部分來敘述性質 2 的證明，其中(a)部分敘述(2)式的證明，而(b)部分則將證明(2)式等號成立的充分必要條件。證明過程如下：

證明：(a)設 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$，其中 x_1,y_1,x_2,y_2 為實數，則有

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

首先我們有

$$|z_1|=\sqrt{z_1\overline{z_1}}=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2},$$

$$|z_2| = \sqrt{z_2\overline{z_2}} = \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}.$$

此外也有

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{(z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2})} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}.$$

因此可知

$$\begin{aligned}
&(|z_1| + |z_2|)^2 - |z_1 + z_2|^2 \\
&= \left(\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} + \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}\right)^2 - [(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2] \\
&= 2\left[\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}\sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2} - (x_1x_2 + y_1y_2)\right] \\
&\geq 2\left[\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}\sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2} - |x_1x_2 + y_1y_2|\right]. \qquad (3)
\end{aligned}$$

注意上式的最後一步用上了 $x_1x_2 + y_1y_2 \leq |x_1x_2 + y_1y_2|$ 的條件。接下來，因為底下的柯西不等式成立：

$$({x_1}^2 + {y_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2) \geq (x_1x_2 + y_1y_2)^2, \qquad (4)$$

所以可知

$$\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}\sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2} \geq |x_1x_2 + y_1y_2|.$$

至此，取(3)式的頭尾並配合上式，即可寫下

$$(|z_1| + |z_2|)^2 - |z_1 + z_2|^2 \geq 2\left[\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}\sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2} - |x_1x_2 + y_1y_2|\right] \geq 0. \qquad (5)$$

故得 $(|z_1| + |z_2|)^2 \geq |z_1 + z_2|^2$，這就表示

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|.$$

因此(2)式得證，(a)部分證明完畢。

(b)關於(2)式等號成立的充分必要條件，我們分成兩部分來處理，先證明充分性的部分：

<u>充分性</u>：若 $z_1z_2 = 0$，則 $z_1 = 0$ 或 $z_2 = 0$。當 $z_1 = 0$ 時，可知

$$|z_1| + |z_2| = |z_2| = |z_1 + z_2|.$$

故(2)式的等號成立；當 $z_2 = 0$ 時，同理可知(2)式等號成立。

若 $\frac{z_1}{z_2}$ 為一正實數，假設 $\frac{z_1}{z_2} = r$，其中 $r > 0$，則有 $z_1 = rz_2$，此時有

$$|z_1| + |z_2| = |rz_2| + |z_2| = r|z_2| + |z_2| = (r + 1)|z_2|,$$

$$|z_1 + z_2| = |rz_2 + z_2| = |(r + 1)z_2| = (r + 1)|z_2|.$$

因此 $|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2|$，故(2)式的等號成立。

所以說，當 $z_1z_2 = 0$ 或 $\frac{z_1}{z_2}$ 為正實數時均有 $|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2|$，至此充份性的部分證明完畢。底下，我們證明必要性的部分：

<u>必要性</u>：假設(2)式的等號成立，即

$$|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2|. \qquad (6)$$

回顧(a)部份中的(5)式，可知(6)式成立時(3),(4)兩式的等號均須成立。其中，(3)式等號成

立的條件等價於

$$x_1x_2 + y_1y_2 \geq 0; \tag{7}$$

而(4)式等號成立的條件等價於

$$({x_1}^2 + {y_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2) - (x_1x_2 + y_1y_2)^2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = 0,$$

即等價於

$$x_1y_2 - x_2y_1 = 0. \tag{8}$$

當 $z_1z_2 \neq 0$ 成立時，可知 $z_1 \neq 0$ 且 $z_2 \neq 0$。因 $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$，故 x_2, y_2 兩數不全為零，可知

$$|z_2|^2 = {x_2}^2 + {y_2}^2 > 0.$$

此時將有

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} \geq 0. \tag{9}$$

注意在推導上式的最後兩步時，我們依序用上了(8)式與(7)式。觀察(9)式，因為 $z_1 \neq 0$，可知不等式(9)的等號不成立，因此可知 $\frac{z_1}{z_2} > 0$，即 $\frac{z_1}{z_2}$ 為正實數。

另一方面，當 $z_1z_2 \neq 0$ 不成立時，表示 $z_1z_2 = 0$。總結以上討論的結果，可知若(2)式的等號成立，則有 $z_1z_2 = 0$ 或 $\frac{z_1}{z_2}$ 為正實數。至此，必要性的部分證明完畢。

將上面(b)項目底下兩部分的證明合起來看，我們就證出了性質 2 所列條件的充分性與必要性。至此，性質 2 證明完畢。

有了上述性質 2，我們就可以開始證明性質 1，過程如下：

證明：在性質 1 的各條件下，利用性質 2 的(2)式兩次，可寫下

$$3 = |\alpha| + |\beta| + |\gamma| \geq |\alpha + \beta| + |\gamma| \geq |\alpha + \beta + r| = 3. \tag{10}$$

觀察上式的頭尾，可知上式中兩個不等號之等號部分均須成立。其中，(10)式的第一個不等號之等號成立表示

$$|\alpha| + |\beta| = |\alpha + \beta|. \tag{11}$$

由(11)式可知不等式 $|\alpha| + |\beta| \geq |\alpha + \beta|$ 的等號成立，此時利用性質 2 中(2)式等號成立的必要條件，可知 $\alpha\beta = 0$ 或 $\frac{\alpha}{\beta}$ 為正實數。但由性質 1 的條件$|\alpha| = |\beta| = 1$ 知 α, β 非零，故 $\alpha\beta = 0$ 不合，因此確定 $\frac{\alpha}{\beta}$ 為正實數。設 $\frac{\alpha}{\beta} = s > 0$，則 $\alpha = s\beta$，從而有 $|\alpha| = |s\beta| = s|\beta|$。這表示

$$s = \frac{|\alpha|}{|\beta|} = 1,$$

至此就確定了 $\alpha = \beta$。

由性質 1 中 α,β,γ 的對稱性，仿照上述討論，同理可得 $\beta=\gamma$。因此，我們就得到 $\alpha=\beta=r$ 的結果，最後再配合原本性質 2 中 $\alpha+\beta+\gamma=3$ 的條件，即可解得 $\alpha=\beta=r=1$，故(1)式得證，性質 1 證畢。

經過上面的探討後，筆者在此介紹一個由性質 1 推廣而得的性質如下：

性質 3：設 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 為複數，使得 $|\alpha_1|=|\alpha_2|=\cdots=|\alpha_n|=1$ 且

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=n,$$

其中 n 為正整數且 $n\geq 2$，則

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=1. \tag{12}$$

只要仿照性質 1 的證明，即可寫出性質 3 的證明如下：

證明：配合性質 3 的條件，利用性質 2 中的(2)式 $n-1$ 次，可寫下

$$\begin{aligned} n=|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_n| &\geq |\alpha_1+\alpha_2|+|\alpha_3|+\cdots+|\alpha_n| \\ &\geq |\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3|+|\alpha_4|+\cdots+|\alpha_n|\geq\cdots \\ &\geq |\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}|+|\alpha_n|\geq|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n|=n. \end{aligned} \tag{13}$$

觀察上式的頭尾，可知上式中的 $n-1$ 個不等號之等號部分均須成立。其中，(13)式的第一個不等號之等號成立表示

$$|\alpha_1|+|\alpha_2|=|\alpha_1+\alpha_2|.$$

仿照性質 1 的證明中由(11)式推得 $\alpha=\beta$，故從上式我們亦可推得 $\alpha_1=\alpha_2$。

由性質 3 中 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 的對稱性，仿照上述討論，同理可得 $\alpha_k=\alpha_{k+1}$，其中 $2\leq k\leq n-1$，因此可確定

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{n-1}=\alpha_n.$$

此時再配合性質 3 中 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=n$ 的條件，即得

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=1.$$

至此，我們就完成了性質 3 的證明。

參、原問題與其推廣問題的解答

筆者仿照[1]中的第四種解法對原徵答題進行解題後，發現自己在最後對於 $a=b=0$ 的計算方式與該解法有所不同。因此，接下來筆者將介紹自己對原徵答題的解法供讀者參考，請見底下的證明：

證明：設 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\omega$ 為三次方程式 $x^3=1$ 之一虛根。因為 $|\omega|=|\omega^2|=1$，依題意可知

$$|P(1)|=|\omega P(\omega)|=|\omega^2P(\omega^2)|=1. \tag{14}$$

又因為 $P(z)=z^2+az+b$ 且 $\omega^2+\omega+1=0$，所以有

$$P(1)+\omega P(\omega)+\omega^2P(\omega^2)=(1+a+b)+(1+a\omega^2+b\omega)+(1+a\omega+b\omega^2)=3. \tag{15}$$

觀察(14), (15)兩式的結果，由性質 1 可知 $P(1)=\omega P(\omega)=\omega^2P(\omega^2)=1$，得

$$P(1)=1, \tag{16}$$

$$P(\omega)=\omega^2, \tag{17}$$

$$P(\omega^2)=\omega. \tag{18}$$

此時仿照(15)式所做的計算，我們可另外計算出如下結果：

$$P(1)+\omega^2P(\omega)+\omega P(\omega^2)=(1+a+b)+(\omega+a+b\omega^2)+(\omega^2+a+b\omega)=3a, \tag{19}$$

$$P(1)+P(\omega)+P(\omega^2)=(1+a+b)+(\omega^2+a\omega+b)+(\omega+a\omega^2+b)=3b. \tag{20}$$

將(19)式反過來寫，並將(16), (17), (18)三式的結果代入，可得

$$3a=P(1)+\omega^2P(\omega)+\omega P(\omega^2)=1+\omega+\omega^2=0.$$

同樣地，將(20)式反過來寫，並將(16), (17), (18)三式的結果代入，則有

$$3b=P(1)+P(\omega)+P(\omega^2)=1+\omega^2+\omega=0.$$

上述兩結果告訴我們 $a=b=0$，原問題證明完畢。

看完上面的證明後，我們可以更進一步，考慮底下這個由[1]中徵答題推廣而得的問題：

問題 1：設 $P(z)=z^3+az^2+bz+c$ 為複數 z 之多項式，其中係數 a,b,c 為複數。假設對所有 z ，滿足 $|z|=1$，使得 $|P(z)|=1$，試證：$a=b=c=0$。

筆者發現，問題 1 可透過與上述解法類似的方式來完成解答，證明如下：

證明：考慮四次方程式 $x^4=1$ 之一根 i，其中 $i=\sqrt{-1}$ 為虛數單位。因為 $|i^k|=1$，其中 $1\le k\le 3$，依題意可知

$$|P(1)|=|iP(i)|=|i^2P(i^2)|=|i^3P(i^3)|=1. \tag{21}$$

因為 $P(z)=z^3+az^2+bz+c$，可知

$$\begin{aligned}&P(1)+iP(i)+i^2P(i^2)+i^3P(i^3)\\&=(1+a+b+c)+(1-ai-b+ci)+(1-a+b-c)\\&\quad+(1+ai-b-ci)=4.\end{aligned} \tag{22}$$

觀察(21), (22)兩式的結果，利用由性質 1 推廣而得的性質 3(取 $n=4$)可知

$$P(1)=iP(i)=i^2P(i^2)=i^3P(i^3)=1,$$

因此得

$$P(1)=1, \tag{23}$$

$$P(i)=-i, \tag{24}$$

$$P(i^2)=-1, \tag{25}$$

$$P(i^3)=i. \tag{26}$$

另一方面，仿照(22)式所做的計算，我們可另外計算出如下結果：

$$\begin{aligned}&P(1)+P(i)+P(i^2)+P(i^3)\\&=(1+a+b+c)+(-i-a+ib+c)+(-1+a-b+c)\\&+(i-a-ib+c)=4c,\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}&P(1)+i^3P(i)+i^2P(i^2)+iP(i^3)\\&=(1+a+b+c)+(-1+ia+b-ic)+(1-a+b-c)\\&+(-1-ia+b+ic)=4b,\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}&P(1)+i^2P(i)+P(i^2)+i^2P(i^3)\\&=(1+a+b+c)+(i+a-ib-c)+(-1+a-b+c)\\&+(-i+a+ib-c)=4a.\end{aligned} \tag{29}$$

將(27), (28), (29)三式反過來寫，再將(23), (24), (25), (26)四式的結果代入，分別可得：

$$4c=P(1)+P(i)+P(i^2)+P(i^3)=1-i-1+i=0,$$
$$4b=P(1)+i^3P(i)+i^2P(i^2)+iP(i^3)=1-1+1-1=0,$$
$$4a=P(1)+i^2P(i)+P(i^2)+i^2P(i^3)=1+i-1-i=0.$$

上述三式告訴我們 $a=b=c=0$，至此問題 1 證明完畢。

接下來，我們考慮底下這個更具一般性的問題 2：

問題 2：設 $P(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a_1z+a_0$ 為複數 z 之多項式，其中 n 為正整數，而係數 $a_0,a_1,\dots,a_{n-1}$ 為複數。假設對所有 z，滿足 $|z|=1$，使得 $|P(z)|=1$，試證：$a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots=a_1=a_0=0$。

底下筆者將介紹自已對問題 2 的證明，證明的方式將與上述問題 1 的證明手法有所不同，讀者不妨試著體會其中差異。問題 2 的證明如下：

證明：n 為正整數，設 λ 是 $n+1$ 次方程式 $x^{n+1}=1$ 的一根，滿足

$$\lambda=\cos\frac{2\pi}{n+1}+i\sin\frac{2\pi}{n+1}. \tag{30}$$

注意 $|\lambda^k|=\left|\cos\frac{2k\pi}{n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{n+1}\right|=1$，其中 $1\le k\le n$。因此，依題意可知

$$|P(1)|=|\lambda P(\lambda)|=|\lambda^2P(\lambda^2)|=\cdots=|\lambda^nP(\lambda^n)|=1. \tag{31}$$

已知 $P(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$，令 $Q(z)=zP(z)$，則

$$\begin{aligned}Q(z)=zP(z)&=z^{n+1}+a_{n-1}z^n+\cdots+a_1z^2+a_0z\\&=z^{n+1}+\textstyle\sum_{j=1}^{n}a_{j-1}z^j.\end{aligned} \tag{32}$$

因為 $\lambda^{n+1}=1$，利用上式可寫出

$$P(1)+\lambda P(\lambda)+\lambda^2P(\lambda^2)+\cdots+\lambda^nP(\lambda^n)=\sum_{k=0}^{n}\lambda^kP(\lambda^k)=\sum_{k=0}^{n}Q(\lambda^k)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n}\left[(\lambda^k)^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} a_{j-1}(\lambda^k)^j\right] = \sum_{k=0}^{n}\left[(\lambda^{n+1})^k + \sum_{j=1}^{n} a_{j-1}(\lambda^k)^j\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[1 + \sum_{j=1}^{n} a_{j-1}(\lambda^k)^j\right] = n+1+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j-1}(\lambda^k)^j \\
&= n+1+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_{j-1}(\lambda^j)^k. \qquad (33)
\end{aligned}
$$

注意上式最後一個等號處，我們交換了雙重求和式的求和順序，並將 $(\lambda^k)^j$ 改寫為 $(\lambda^j)^k$。此時，對於滿足 $1 \le j \le n$ 的任一個正整數 j，我們考慮計算在上式最後所出現的求和式

$$\sum_{k=0}^{n} a_{j-1}(\lambda^j)^k.$$

上述求和式展開之後是個共有 $n+1$ 項的等比級數，公比為 λ^j，利用 $\lambda^{n+1}=1$ 的已知條件，可計算出上式之和如下：

$$\sum_{k=0}^{n} a_{j-1}(\lambda^j)^k = a_{j-1}\sum_{k=0}^{n}(\lambda^j)^k = a_{j-1}\times\frac{1-(\lambda^j)^{n+1}}{1-\lambda^j} = a_{j-1}\times\frac{1-(\lambda^{n+1})^j}{1-\lambda^j} = a_{j-1}\times\frac{1-1}{1-\lambda^j} = 0.$$

將上式的結果代回(33)式，即得

$$P(1)+\lambda P(\lambda)+\lambda^2P(\lambda^2)+\cdots+\lambda^nP(\lambda^n) = n+1+\sum_{j=1}^{n}0 = n+1. \qquad (34)$$

此時，利用(31), (34)兩式的結果，配合性質 3 可知

$$P(1)=\lambda P(\lambda)=\lambda^2P(\lambda^2)=\cdots=\lambda^nP(\lambda^n)=1. \qquad (35)$$

回顧在(32)式上方 $Q(z)=zP(z)$ 的假設，知上式可改寫為

$$Q(1)=Q(\lambda)=Q(\lambda^2)=\cdots=Q(\lambda^n)=1,$$

或者寫成

$$Q(1)-1=Q(\lambda)-1=Q(\lambda^2)-1=\cdots=Q(\lambda^n)-1=0.$$

此時再假設 $R(z)=Q(z)-1$，則上式可改寫為

$$R(1)=R(\lambda)=R(\lambda^2)=\cdots=R(\lambda^n)=0. \qquad (36)$$

回頭觀察(32)式，可知

$$R(z)=Q(z)-1=z^{n+1}+a_{n-1}z^n+\cdots+a_1z^2+a_0z-1, \qquad (37)$$

故 $R(z)$ 是 $n+1$ 次多項式。注意由(36)式可知 $n+1$ 次方程式 $R(z)=0$ 的 $n+1$ 個根恰好就是

$$z=1,\lambda,\lambda^2,\dots,\lambda^n, \qquad (38)$$

又因為(37)式中多項式 $R(z)$ 的領導係數為 1，故使用因式定理可知

$$R(z)=(z-1)(z-\ \lambda)(z-\lambda^2)\dots(z-\lambda^n). \qquad (39)$$

回顧(30)式中我們對 λ 的假設，使用棣美弗定理，可知(38)式所列的 $n+1$ 個數也恰好是 $n+$

1 次方程式 $z^{n+1}-1=0$ 的 $n+1$ 個相異根，其中

$$\lambda^k=\cos\frac{2k\pi}{n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{n+1},\quad 0\le k\le n.$$

因 $z^{n+1}-1$ 最高次項的係數為 1，再次使用因式定理可知

$$z^{n+1}-1=(z-1)(z-\lambda)(z-\lambda^2)\dots(z-\lambda^n). \tag{40}$$

比較(39),(40)兩式，即得 $R(z)=z^{n+1}-1$，將此結果與(37)式中 $R(z)$ 的表達式做比較係數，即可確定

$$a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots=a_1=a_0=0.$$

至此，我們就解決了問題 2。

看完上述對問題 2 的解法後，讀者應當有發現此解法與問題 1 的解法有個明顯的不同之處，就是進行至(35)式之後改用因式定理與棣美弗定理來完成證明。而若對問題 2 的解法分別取 $n=2$ 與 $n=3$ 的特例，就可得到[1]中原本徵答題與問題 1 的另解。

對因式定理與棣美弗定理有興趣的讀者，可分別參考[2]與[3]，或上網參考維基百科的介紹。而對棣美弗定理的應用有興趣的讀者，可參考[4]文。

肆、結語

本文寫作的動機，是出自想證明性質 1 的好奇心。在證明性質 2 中的三角不等式之後，筆者證明了性質 1 與推廣而得的性質 3。驚喜的是，寫作至第三節時，發現性質 3 剛好可用來解決由[1]中徵答題推廣而得的問題 1 與問題 2，從而得到更一般的結果。回想自己對問題 2 之證明的追尋過程，在以(35)式為界所分開的前後兩段都曾遭遇瓶頸，幸好自己沒有輕易放棄，才能順利找出證明。

文章最後，筆者在此首先要感謝雙週一題徵答活動的主辦單位，因為有[1]中公告的問題與解答，才使筆者有動機寫下本文。其次，也要特別感謝審稿者給出立意良善的建議，除了督促筆者簡化自己最初對性質 1 與性質 3 所寫下的證明之外，也促使筆者寫出初次投稿時尚未出現的第三節內容，使本文內容不致過於單薄。最後，筆者要感謝父母多年的照顧與兩位妹妹對家裡的協助，才能讓筆者有舒適的居家生活，也才有機會寫出這篇文章。

參考資料

1. 108 學年度第一學期第六題，國立中山大學應數系雙週一題徵答活動。
http://www.math.nsysu.edu.tw/~problem/2019f/2019f6.pdf
2. 許志農主編，**高中數學 1**，龍騰文化。
3. 許志農主編，**高中數學(甲)上**，龍騰文化。
4. 林琦焜，棣美弗定理與 Euler 公式，**數學傳播季刊 27 卷 4 期**(2003)，p3。