圓內接多邊形類托勒密定理 (Ptolemy-like theorem)狹義方程式

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

壹、前言

圓內接四邊形托勒密定理 (Ptolemy's theorem) 狹義方程式意指一個特定等式方程式，其詳情內容敘述如下：一個圓內接四邊形其兩組相對邊長乘積的和恰等於兩條對角線長的乘積。其對照示意圖如下；見下列圖 1.，給定半徑為 R 的圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，令其邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_1}=V_4$，兩條對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$，$\overline{A_2A_4}=d_{24}$，則此狹義托勒密定理的方程式等式內容完整敘述表示成下式；

$$d_{13}d_{24}=V_1V_3+V_2V_4 \qquad (1)$$

見圖 3.，令圖中角度 $\angle A_2A_4A_3=\phi$，在頂點 A_4 處向下作一射線並與 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$ 相交於 B 點形成直線段 $\overline{A_4B}$，得出一角度 θ 使 $\angle A_1A_4B=\theta=\phi$，又因 $\angle A_4A_2A_3=\angle A_4A_1B$，則形成相似形 $\Delta A_2A_4A_3\approx\Delta A_1A_4B$，其對應線段必有下述正比例關係；$\dfrac{V_4}{d_{24}}=\dfrac{\overline{A_1B}}{V_2}$ $\Rightarrow$ $\overline{A_1B}=\dfrac{V_2V_4}{d_{24}}$，再由圖 3.見 $\angle BA_4A_3=\angle A_1A_4A_2$，又因圓周角 $\angle A_4A_3A_1=\angle A_4A_2A_1$，則形成相似形 $\Delta BA_4A_3\approx\Delta A_1A_4A_2$，而有下述正比例關係；$\dfrac{V_3}{d_{24}}=\dfrac{\overline{A_3B}}{V_1}$ $\Rightarrow$ $\overline{A_3B}=\dfrac{V_1V_3}{d_{24}}$，

再由 $\overline{A_1A_3}=d_{13}=\overline{A_1B}+\overline{A_3B}=\dfrac{V_2V_4}{d_{24}}+\dfrac{V_1V_3}{d_{24}}$

$\Rightarrow$ 得證 托勒密定理狹義方程式； $d_{13}d_{24}=V_1V_3+V_2V_4$ (1)

(1)式的等號左側是兩條對角線長的乘積，等號右側是兩組相對邊長乘積的和。

應用這托勒密定理狹義方程式可以陸續證明出圓內接五邊形、圓內接六邊形、圓內接七邊形、……、並推廣到圓內接 n 邊形的各邊長與對角線長的相乘積關係。

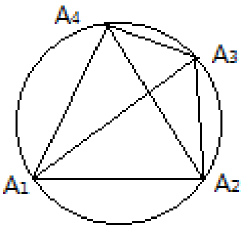

圖 1

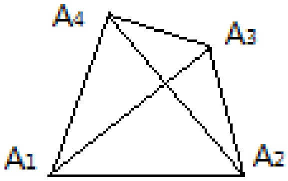

圖 2

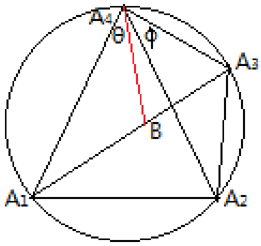

圖 3

這些關係式與方程式(1)式的內涵結構型態不太相同，但很類似；其等號右側的各項是由邊長與對角線長相乘積形成組合，因如此的差微變異，特別將邊數大於或等於 5 的多邊形這類關係方程式統稱為類托勒密定理狹義方程式！

貳、本文

自圓內接五邊形開始探討起，逐次導引到六邊形、七邊形、……、並推廣到一般化圓內接 n 邊形完整系列的推理演繹流程是以數學歸納法的統合層次來檢驗證明。任給定一個下圖 4 的圓內接 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$，令邊長線段 $\overline{A_iA_{i+1}}=V_i$，$1\le i\le n$，$A_{n+1}=A_1$，對角線長 $\overline{A_1A_j}=d_{1j}$，$3\le j\le n-1$，$\overline{A_2A_m}=d_{2m}$，$4\le m\le n$，標記號 i、j、m、n 都是自然數，此處所有圖形明示的是以選取頂點 A_1 為定點，而列出通過定點 A_1 的所有對角線長 $\overline{A_1A_j}=d_{1j}$，$3\le j\le(n-1)$ 及圓周角 A_1 所正對的對應弦長 d_{2m}，$4\le m\le n$。在以下內文的敘述推論驗證過程中，所有需使用到的各多邊形邊長線段及各對角線長表示式均以依循此處明列者為基準，現在要引用托勒密定理狹義方程式(1)式並應用常理的數學歸納法來推演證明出圓內接 n 邊形類托勒密定理狹義方程式。

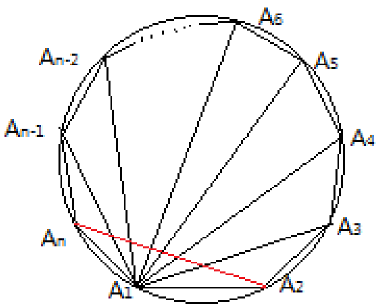

圖 4

詳盡對照比較所有預先證明出的圓內接多邊形類托勒密定理狹義方程式後，再依等式中各項內顯示邊長與對角線長相乘積排列關係的特徵性質，歸納整合出完備的圓內接 n 邊形類托勒密定理狹義方程式，翔實規劃其型態內容於下；

[A] 圓內接 n 邊形類托勒密定理狹義方程式

對圖 4 中的頂角 A_1 言，其角度張開來所面對的各邊長線段分別為 V_2，V_3，V_4，V_5，$\cdots$，V_{n-2}，V_{n-1} 等共計有 $(n-2)$ 段邊長，這每段邊長都引領著 $(n-2)$ 個相異線段乘積成為 1 項，使得方程式等號右側形成 $(n-2)$ 個乘積項的線性加法組合。方程式等號左側僅有單獨 1 項是由 d_{2n} 乘上通過定點 A_1 的所有對角線長的乘積。這圓內接 n 邊形類托勒密定理狹義方程式歸納整理編列出其完備型態內涵為；

$$
\begin{aligned}
d_{2n}\cdot\prod_{i=3}^{n-1}d_{1i} &= d_{2n}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\\
&= V_{n-1}V_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)} + V_2V_nd_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\\
&\quad +V_3V_nV_1d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)} + V_4V_nV_1d_{13}\cdot d_{16}d_{17}\cdots d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\\
&\quad +V_5V_nV_1d_{13}d_{14}\cdot d_{17}d_{18}d_{19}d_{1(10)}d_{1(11)}\cdots d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\\
&\quad +V_6V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdot d_{18}d_{19}d_{1(10)}d_{1(11)}\cdots d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\\
&\quad +\cdots\cdots\\
&\quad +V_{n-4}V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-7)}d_{1(n-6)}d_{1(n-5)}\cdot d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}+\\
&\quad V_{n-3}V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-7)}d_{1(n-6)}d_{1(n-5)}d_{1(n-4)}\cdot d_{1(n-1)}+\\
&\quad V_{n-2}V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-7)}d_{1(n-6)}d_{1(n-5)}d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

方程式 (2)式即為精心歸納出的圓內接一般 n 邊形類托勒密定理狹義方程式！

方程式(2)式的等號右側總計有($n-2$)項式相加而成，且每一項也都由($n-2$)個相異線段長度依順序連乘積組合成型。仔細觀察比對方程式內的每一項，可看到其線段排列的順序結構完全呈現共同一致規律特性！

證明：推理過程要以眾所熟悉最經典的數學歸納法來驗證這方程式(2)式；

(A1) 取 $n=4$，得圓內接四邊形，代入上述方程式(2)式並對照圖 1 圖形結構知其等式右側的項數只有由最前端排列的 2 個乘積項作線性加法組合而成，故得；

$$d_{24}d_{13}=V_3V_1+V_2V_4=V_2V_4+V_3V_1 \tag{1}$$

另法：取(2)式的前第 2、第 3 項，得；$d_{2n}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$
$=V_2V_nd_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}+V_3V_nV_1d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$

對此等號兩側的 3 個項約去公因式 $d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$，精簡各項，

$\Rightarrow$ $d_{2n}d_{13}d_{14}=V_2V_nd_{14}+V_3V_nV_1$ $\Rightarrow$ $d_{24}d_{13}d_{14}=V_2V_4d_{14}+V_3V_4V_1$，對四邊形言，

$d_{14}=V_4$ $\Rightarrow$ 代入化簡後得到；　$d_{24}d_{13}=V_2V_4+V_3V_1$　(1*)

比對(1)式與(1*)式，兩者完全相等，證明完成，即當 $n=4$，(2)式成立。

(A2) 取 $n=5$，得圓內接五邊形，其一般性圖形結構如下圖 5 所示；檢視上述方程式(2)式

並對照下圖 5 圖形結構可知其等式右側的所有項數只有由最前端連續排列的 3 個乘積項作線性加法組合而成，故寫出圓內接五邊形結構式得；

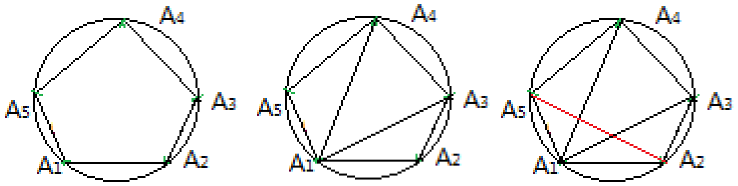

圖 5

$$d_{25}d_{13}d_{14}=V_4V_1d_{13}+V_2V_5d_{14}+V_3V_5V_1=V_2V_5d_{14}+V_3V_5V_1+V_4V_1d_{13} \quad (3)$$

另法：取(2)式的前第 2、第 3、第 4 項，排列成下列圓內接五邊形結構式；

$$d_{2n}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}=V_2V_nd_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$$

$$+V_3V_nV_1d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}+V_4V_nV_1d_{13}\cdot d_{16}d_{17}\cdots d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$$

對此等號兩側的 4 個項約去公因式 $d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$，得精簡各項，

$$\Rightarrow d_{2n}d_{13}d_{14}d_{15}=V_2V_nd_{14}d_{15}+V_3V_nV_1d_{15}+V_4V_nV_1d_{13}\Rightarrow d_{25}d_{13}d_{14}d_{15}=V_2V_5d_{14}d_{15}$$

$+V_3V_5V_1d_{15}+V_4V_5V_1d_{13}$，對五邊形言，$d_{15}=V_5\Rightarrow$ 代入化簡後得到；

$$d_{25}d_{13}d_{14}=V_2V_5d_{14}+V_3V_5V_1+V_4V_1d_{13} \quad (3)$$

方程式(3)式即稱為圓內接五邊形類托勒密定理狹義方程式。

現在參考圖 6 內的圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，得 $d_{13}d_{24}=V_1V_3+V_2d_{14}\Rightarrow$ $d_{24}=\dfrac{V_1V_3+V_2d_{14}}{d_{13}}$，再看圖 7 的圓內接四邊形 $A_1A_2A_4A_5$，得 $d_{25}d_{14}=V_1V_4+V_5d_{24}$

$$\Rightarrow d_{25}d_{14}=V_1V_4+V_5\cdot\frac{V_1V_3+V_2d_{14}}{d_{13}}\Rightarrow d_{25}d_{13}d_{14}=V_2V_5d_{14}+V_3V_5V_1+V_4V_1d_{13} \quad (3^*)$$

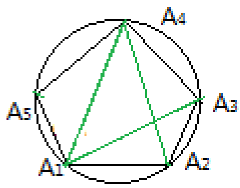

圖 6

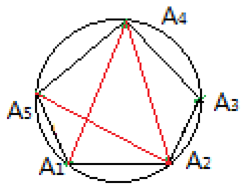

圖 7

比對(3)式與(3*)式，兩者完全相等，證明完成，即當 $n=5$，方程式(2)式成立。為了要清楚的分析解說驗證，使文意更易理解，需再增作下述 1 件示例闡明；

(A3) 取 $n=6$，得圓內接六邊形，其一般性圖形結構如下圖 8 所示；檢視上述方程式(2)式

及對照圖 8 圖形結構可知其等式右側的所有項數只有由最前端連續排列的 4 個乘積項作線性加法組合而成，故寫出圓內接六邊形結構式得；

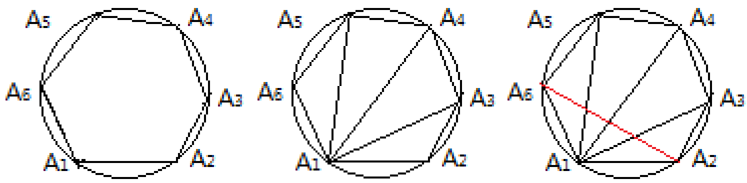

圖 8

$$\begin{aligned} d_{26}d_{13}d_{14}d_{15} &= V_5V_1d_{13}d_{14}+V_2V_6d_{14}d_{15}+V_3V_6V_1d_{15}+V_4V_6V_1d_{13} \\ &= V_2V_6d_{14}d_{15}+V_3V_6V_1d_{15}+V_4V_6V_1d_{13}+V_5V_1d_{13}d_{14} \end{aligned} \quad (4)$$

另法：取(2)式的前第 2、3、4、5 項，排列成下列圓內接六邊形結構式；

$$\begin{aligned} & d_{2n}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)} \\ = \; & V_2V_nd_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}+V_3V_nV_1d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)} \\ & +V_4V_nV_1d_{13}\cdot d_{16}d_{17}\cdots d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}+V_5V_nV_1d_{13}d_{14}\cdot d_{17}d_{18}\cdots d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)} \end{aligned}$$

對此等號兩側的 5 個項約去公因式 $d_{17}d_{18}\cdots d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$ ，得精簡各項，

$$\Rightarrow \quad d_{2n}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16} = V_2V_nd_{14}d_{15}d_{16}+V_3V_nV_1d_{15}d_{16}+V_4V_nV_1d_{13}d_{16}+V_5V_nV_1d_{13}d_{14}$$

$\Rightarrow \quad d_{26}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16} = V_2V_6d_{14}d_{15}d_{16}+V_3V_6V_1d_{15}d_{16}+V_4V_6V_1d_{13}d_{16}+V_5V_6V_1d_{13}d_{14}$ ，對圖 8 的圓內接六邊形言，$d_{16}=\overline{A_1A_6}=V_6 \Rightarrow$ 代入上式後再化簡，最後得到；

$$d_{26}d_{13}d_{14}d_{15} = V_2V_6d_{14}d_{15}+V_3V_6V_1d_{15}+V_4V_6V_1d_{13}+V_5V_1d_{13}d_{14} \quad (4)$$

方程式(4)式即稱為圓內接六邊形類托勒密定理狹義方程式。

現在參考圖 9 內的圓內接五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，引用方程式(3)式內涵，可得；

$$d_{25}d_{13}d_{14}=V_2d_{15}d_{14}+V_3d_{15}V_1+V_4V_1d_{13} \Rightarrow d_{25}=\frac{1}{d_{13}d_{14}}[V_2d_{15}d_{14}+V_3d_{15}V_1+V_4V_1d_{13}]$$

，再看圖 10 的圓內接四邊形 $A_1A_2A_5A_6$，可得等式； $d_{26}d_{15}=V_1V_5+V_6d_{25} \Rightarrow$

$$d_{26}d_{15}=V_1V_5+V_6\cdot\frac{1}{d_{13}d_{14}}[V_2d_{15}d_{14}+V_3d_{15}V_1+V_4V_1d_{13}] \quad \Rightarrow$$

$$d_{26}d_{13}d_{14}d_{15} = V_2V_6d_{14}d_{15}+V_3V_6V_1d_{15}+V_4V_6V_1d_{13}+V_5V_1d_{13}d_{14} \quad (4^*)$$

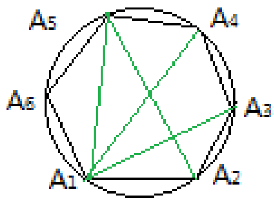

圖 9

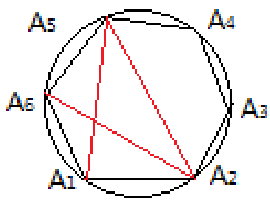

圖 10

比對(4)式與(4*)式，兩者完全相等，證明完成，即當 $n=6$，方程式(2)式成立。

(A4) ⋮

⋮

(A5) 令 $n=k$，$k\geq 7$，得圓內接 k 邊形，其一般性圖形結構如下圖 11 所示；

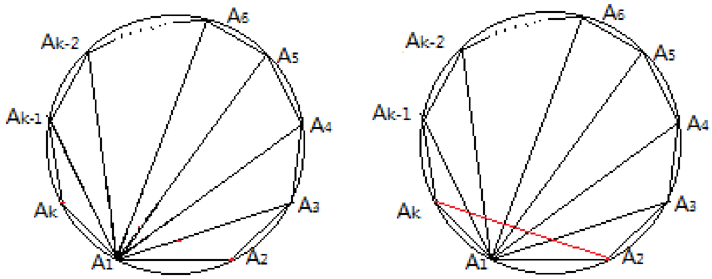

圖 11

假設此 $n=k$，$k\geq 7$ 時，方程式(2)式成立，即下列方程式(6)式為真；

$$d_{2k}\cdot\prod_{i=3}^{k-1}d_{1i} = d_{2k}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-5)}d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}$$

$$= V_2V_kd_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}+V_3V_kV_1d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}$$

$$+V_4V_kV_1d_{13}\cdot d_{16}d_{17}\cdots d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}+V_5V_kV_1d_{13}d_{14}\cdot d_{17}d_{18}\cdots d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}$$

$$+V_6V_kV_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdot d_{18}d_{19}d_{1(10)}\cdots d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}$$

$$+\ \cdots\cdots$$

$$+V_{k-4}V_kV_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-7)}d_{1(k-6)}d_{1(k-5)}\cdot d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}\ +$$

$$V_{k-3}V_kV_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-7)}d_{1(k-6)}d_{1(k-5)}d_{1(k-4)}\cdot d_{1(k-1)}\ +$$

$$V_{k-2}V_kV_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-7)}d_{1(k-6)}d_{1(k-5)}d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}\ +$$

$$V_{k-1}V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-6)}d_{1(k-5)}d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}d_{1(k-2)} \qquad (6)$$

方程式(6)式與方程式(2)式兩者的內涵及型態結構完全相同。

(6)式中等號兩側的每一項內涵都由 $(k-2)$ 個線段長度依順序相乘積組合而成。

(A6) 當 $n=k+1$，得圓內接 $(k+1)$ 邊形，其一般性圖形結構如下圖 12 所示；

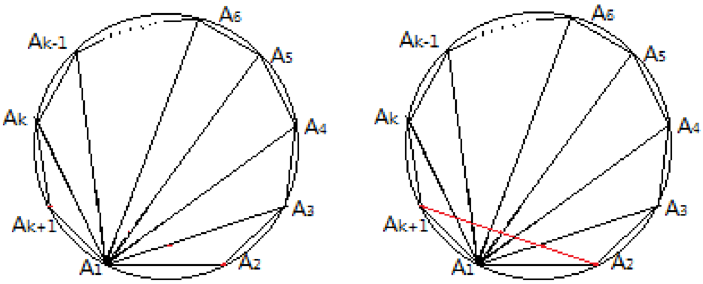

圖 12

參考下圖 13 內的圓內接 k 邊形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{k-2}A_{k-1}A_k$，再引用(6)式內涵，可得；

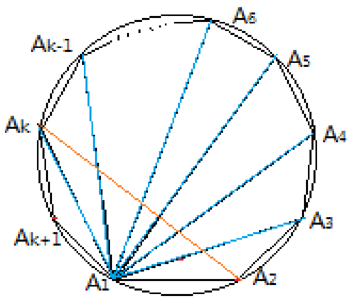

圖 13

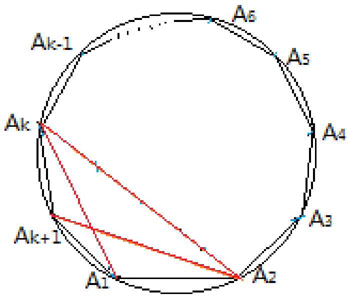

圖 14

$$
\begin{aligned}
&d_{2k}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-5)}d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}\\
&=V_2d_{1k}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}+V_3d_{1k}V_1d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}\\
&+V_4d_{1k}V_1d_{13}\cdot d_{16}d_{17}\cdots d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}+V_5d_{1k}V_1d_{13}d_{14}\cdot d_{17}d_{18}\cdots d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}\\
&+V_6d_{1k}V_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdot d_{18}d_{19}d_{1(10)}\cdots d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}\\
&+\cdots\cdots\\
&+V_{k-4}d_{1k}V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-7)}d_{1(k-6)}d_{1(k-5)}\cdot d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}+\\
&V_{k-3}d_{1k}V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-7)}d_{1(k-6)}d_{1(k-5)}d_{1(k-4)}\cdot d_{1(k-1)}+\\
&V_{k-2}d_{1k}V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-7)}d_{1(k-6)}d_{1(k-5)}d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}+\\
&V_{k-1}V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-6)}d_{1(k-5)}d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow d_{2k}&=\frac{1}{d_{13}d_{14}d_{15}\cdots d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}}\cdot[V_2d_{1k}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}+\\
&V_3d_{1k}V_1d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}+V_4d_{1k}V_1d_{13}\cdot d_{16}d_{17}\cdots d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}+\\
&V_5d_{1k}V_1d_{13}d_{14}\cdot d_{17}d_{18}\cdots d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}+\\
&V_6d_{1k}V_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdot d_{18}d_{19}d_{1(10)}\cdots d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \cdots\cdots \\
&+ V_{k-4}d_{1k}V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-7)}d_{1(k-6)}d_{1(k-5)}\cdot d_{1(k-2)}d_{1(k-1)} + \\
&V_{k-3}d_{1k}V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-7)}d_{1(k-6)}d_{1(k-5)}d_{1(k-4)}\cdot d_{1(k-1)} + \\
&V_{k-2}d_{1k}V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-7)}d_{1(k-6)}d_{1(k-5)}d_{1(k-4)}d_{1(k-3)} + \\
&V_{k-1}V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-6)}d_{1(k-5)}d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}\,] \qquad (8)
\end{aligned}
$$

再看圖 14 的圓內接四邊形 $A_1A_2A_kA_{k+1}$，可得等式；$d_{2(k+1)}d_{1k}=V_1V_k+V_{(k+1)}d_{2k}$ ，再將(8)式代入 $\Rightarrow$ $d_{2(k+1)}d_{1k}=V_1V_k+V_{(k+1)}\cdot\dfrac{1}{d_{13}d_{14}d_{15}\cdots d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}}\cdot$

$$
\begin{aligned}
&[\,V_2d_{1k}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)} + V_3d_{1k}V_1d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)} + \\
&V_4d_{1k}V_1d_{13}\cdot d_{16}d_{17}\cdots d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)} + V_5d_{1k}V_1d_{13}d_{14}\cdot d_{17}d_{18}\cdots d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)} + \\
&V_6d_{1k}V_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdot d_{18}d_{19}d_{1(10)}\cdots d_{1(k-2)}d_{1(k-1)} \\
&+ \cdots\cdots \\
&+ V_{k-4}d_{1k}V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-7)}d_{1(k-6)}d_{1(k-5)}\cdot d_{1(k-2)}d_{1(k-1)} + \\
&V_{k-3}d_{1k}V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-7)}d_{1(k-6)}d_{1(k-5)}d_{1(k-4)}\cdot d_{1(k-1)} + \\
&V_{k-2}d_{1k}V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-7)}d_{1(k-6)}d_{1(k-5)}d_{1(k-4)}d_{1(k-3)} + \\
&V_{k-1}V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-6)}d_{1(k-5)}d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}\,] \qquad (9)
\end{aligned}
$$

將(9)式等號兩側各項同乘以 $d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}$，再展開，整理，按順序排列得； $d_{2(k+1)}\,d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-5)}d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}d_{1k}=$

$$
\begin{aligned}
&V_2V_{(k+1)}\,d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}d_{1k} + \\
&V_3V_{(k+1)}V_1d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}d_{1k} + \\
&V_4V_{(k+1)}V_1d_{13}\cdot d_{16}d_{17}\cdots d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}d_{1k} + \\
&V_5V_{(k+1)}V_1d_{13}d_{14}\cdot d_{17}d_{18}\cdots d_{1(k-3)}d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}d_{1k} \\
&+ \cdots\cdots \\
&+ V_{k-4}V_{(k+1)}V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-7)}d_{1(k-6)}d_{1(k-5)}\cdot d_{1(k-2)}d_{1(k-1)}d_{1k} + \\
&V_{k-3}V_{(k+1)}V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-7)}d_{1(k-6)}d_{1(k-5)}d_{1(k-4)}\cdot d_{1(k-1)}d_{1k} + \\
&V_{k-2}V_{(k+1)}V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-7)}d_{1(k-6)}d_{1(k-5)}d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}\cdot d_{1k} + \\
&V_{k-1}V_{(k+1)}V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(k-6)}d_{1(k-5)}d_{1(k-4)}d_{1(k-3)}d_{1(k-2)} +
\end{aligned}
$$

$$V_k V_1 d_{13} d_{14} d_{15} d_{16} \cdots d_{1(k-4)} d_{1(k-3)} d_{1(k-2)} d_{1(k-1)} \tag{10}$$

先來比對(10)式與(6)式，知(10)式內的每一項都比(6)式中的各對應項多出一個線段長度，(10)式中等號兩側的每一項內涵都由 $(k-1)$ 個線段長度依順序相乘積組合而成。其等號右側也由共計有 $(k-1)$ 個乘積項的項數按序相加組合而成。

繼續再將此方程式(10)式的所有各項依順序改寫成下列等價方程式(11)式；

$$\begin{aligned}
& d_{2(k+1)}\, d_{13} d_{14} d_{15} d_{16} \cdots d_{1[(k+1)-5]} d_{1[(k+1)-4]} d_{1[(k+1)-3]} d_{1[(k+1)-2]} d_{1[(k+1)-1]} = \\
& V_2 V_{(k+1)}\, d_{14} d_{15} d_{16} \cdots d_{1[(k+1)-5]} d_{1[(k+1)-4]} d_{1[(k+1)-3]} d_{1[(k+1)-2]} d_{1[(k+1)-1]} + \\
& V_3 V_{(k+1)}\, V_1 d_{15} d_{16} \cdots d_{1[(k+1)-5]} d_{1[(k+1)-4]} d_{1[(k+1)-3]} d_{1[(k+1)-2]} d_{1[(k+1)-1]} + \\
& V_4 V_{(k+1)}\, V_1 d_{13} \cdot d_{16} d_{17} \cdots d_{1[(k+1)-5]} d_{1[(k+1)-4]} d_{1[(k+1)-3]} d_{1[(k+1)-2]} d_{1[(k+1)-1]} + \\
& V_5 V_{(k+1)} V_1 d_{13} d_{14} \cdot d_{17} d_{18} \cdots d_{1[(k+1)-5]} d_{1[(k+1)-4]} d_{1[(k+1)-3]} d_{1[(k+1)-2]} d_{1[(k+1)-1]} + \\
& V_6 V_{(k+1)} V_1 d_{13} d_{14} d_{15} \cdot d_{18} d_{19} d_{1(10)} \cdots d_{1[(k+1)-5]} d_{1[(k+1)-4]} d_{1[(k+1)-3]} d_{1[(k+1)-2]} d_{1[(k+1)-1]} + \\
& + \cdots\cdots \\
& + V_{[(k+1)-5]} V_{(k+1)} V_1 d_{13} d_{14} d_{15} d_{16} \cdots d_{1[(k+1)-7]} d_{1[(k+1)-6]} \cdot d_{1[(k+1)-3]} d_{1[(k+1)-2]} d_{1[(k+1)-1]} + \\
& V_{[(k+1)-4]} V_{(k+1)} V_1 d_{13} d_{14} d_{15} d_{16} \cdots d_{1[(k+1)-8]} d_{1[(k+1)-7]} d_{1[(k+1)-6]} d_{1[(k+1)-5]} \cdot d_{1[(k+1)-2]} d_{1[(k+1)-1]} + \\
& V_{[(k+1)-3]} V_{(k+1)} V_1 d_{13} d_{14} d_{15} d_{16} \cdots d_{1[(k+1)-7]} d_{1[(k+1)-6]} d_{1[(k+1)-5]} d_{1[(k+1)-4]} \cdot d_{1[(k+1)-1]} + \\
& V_{[(k+1)-2]} V_{(k+1)} V_1 d_{13} d_{14} d_{15} d_{16} \cdots d_{1[(k+1)-7]} d_{1[(k+1)-6]} d_{1[(k+1)-5]} d_{1[(k+1)-4]} d_{1[(k+1)-3]} + \\
& V_{[(k+1)-1]} V_1 d_{13} d_{14} d_{15} d_{16} \cdots d_{1[(k+1)-6]} d_{1[(k+1)-5]} d_{1[(k+1)-4]} d_{1[(k+1)-3]} d_{1[(k+1)-2]}
\end{aligned} \tag{11}$$

再來比對(11)式與(6)式，很清楚地知悉兩方程式的型態結構完全相同；這樣就證明了只要(6)式成立可以推導出方程式(11)式也成立。

從上述嚴謹證明過程的(A1).開始到(A6).獲得(11)式，顯示了完整的數學歸納法證明完成，即先證明 $n=4$、5、6 時，方程式(2)式成立，再假設此 $n=k$，$k \ge 7$ 時，方程式(2)式成立，而繼續再證明當 $n=k+1$，方程式(2)式亦順勢推理成立。 所以，對於整體任意自然數 n，$n \ge 4$，方程式(2)式均自然完全成立。

[B] 歸納編製出圓內接 n 邊形類托勒密定理狹義方程式的基本法則

理論上求證方程式(2)式時，由圖形的一般性，直觀的選取頂點 A_1 作為定點，再由此定點 A_1 作出($n-3$)段對角線長 $\overline{A_1A_j} = d_{1j}$，$3 \le j \le (n-1)$，這些對角線都集中相交在定點 A_1 處而不再有其它相互的交點，另由頂角 A_1 所正對的圓周對應弦長 d_{2n} 。下圖 4。這個

被比對歸納編製成的方程式(2)式的兩則基本法則是；

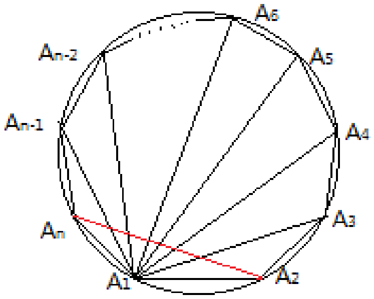

圖 4

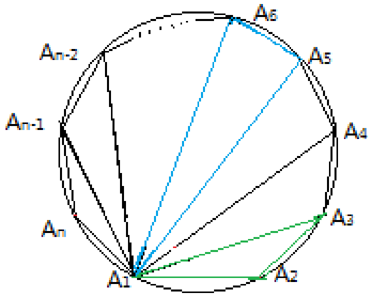

圖 15

[基本法則 1] 方程式的等號左側內容是定點處的頂角 A_1 在此圓的圓周所張開的對角線長 d_{2n} 與由此定點 A_1 所牽引出的 $(n-3)$ 段對角線長的連乘積，其線段內涵完全沒有牽涉到各邊邊長，此項對角線長連乘積項完整的型態結構內容是；

$$d_{2n}\cdot\prod_{i=3}^{n-1}d_{1i}=d_{2n}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\quad。$$

[基本法則 2] 方程式的等號右側內容總計有 $(n-2)$ 項，且每項都不一樣，且每一項都是由相異的 $(n-2)$ 條線段長度的連乘積所形成，各項需詳盡描述於下：

先將圖 4 中圓內接多邊形內的所有線段長作區分成 2 個集合；第 1 集合是與指定點 A_1 有直接相連結關係的線段長，其為 $\{V_n,V_1,d_{13},d_{14},d_{15},\cdots,d_{1(n-2)},d_{1(n-1)}\}$，此集合總計有 $(n-1)$ 條線段長。第 2 集合是此多邊形上與定點 A_1 無直接相連結的其餘邊長線段長，其依圖形順序排列為 $\{V_2,V_3,V_4,V_5,\cdots,\ V_{n-4},V_{n-3},V_{n-2},V_{n-1}\}$，而觀察此集合得總計有 $(n-2)$ 條依順序排列出的邊長線段長。

歸納編製方程式(2)式的要領：是要在第 2 集合內依序取出 1 元素，並與第 1 集合內相異的 $(n-3)$ 條適當線段長相乘以形成不同連乘積的各項，操作如下；

(B1) 方程式等號右側內第 1 項是由第 2 集合內最末 1 個邊長元素 V_{n-1} 所引領的項；邊長 V_{n-1} 要和第 1 集合內的 $(n-3)$ 條線段長形成連乘積，看圖 15，與邊長 V_{n-1} 有直接相連結關係的線段是 V_n 和 $d_{1(n-1)}$，自第 1 集合元素內扣掉這兩者，還有 $(n-3)$ 個元素，其為 $\{V_1,d_{13},d_{14},d_{15},d_{16},\cdots,d_{1(n-3)},d_{1(n-2)}\}$，則第 1 項的線段長連乘積為 $V_{n-1}V_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdots d_{1(n-5)}d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}$，是個有 $(n-2)$ 條線段長度連乘積的項。

(B2) 方程式等號右側內第 2 項是由第 2 集合內第 1 個元素 V_2 所引領的項；邊長 V_2 要和第 1 集合內的 $(n-3)$ 條線段長形成連乘積，看圖 15，與邊長 V_2 有直接相連結關係的線段是 V_1 和 d_{13}，自第 1 集合元素內扣掉這兩者，還有 $(n-3)$ 個元素，其為 $\{V_n,d_{14},d_{15},d_{16},\cdots,d_{1(n-3)},d_{1(n-2)},d_{1(n-1)}\}$，則第 1 項的線段長連乘積為 $V_2V_nd_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$，是個有 $(n-2)$ 條線段長度連乘積的項。

(B3) 由圖 15 知，與邊長 V_3 有直接相連結關係的線段是 d_{14} 和 d_{13}，扣掉這兩者，則第 3 項的 $(n-2)$ 條線段長連乘積為 $V_3V_nV_1d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$ 。

(B4) 由圖 15 知，與邊長 V_4 有直接相連結關係的線段是 d_{14} 和 d_{15}，扣掉這兩者，則第 4 項的 $(n-2)$ 條線段長連乘積為 $V_4V_nV_1d_{13}\cdot d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$ 。

(B5) ……

(B6) 與邊長 V_{n-3} 有直接相連結關係的線段是 $d_{1(n-3)}$ 和 $d_{1(n-2)}$，則此第 $(n-3)$ 項的所有 $(n-2)$ 條線段長連乘積為 $V_{n-3}V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdots d_{1(n-6)}d_{1(n-5)}d_{1(n-4)}\cdot d_{1(n-1)}$ 。

(B7) 與邊長 V_{n-2} 有直接相連結關係的線段是 $d_{1(n-2)}$ 和 $d_{1(n-1)}$，則此第 $(n-2)$ 項的所有 $(n-2)$ 條線段長連乘積為 $V_{n-2}V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdots d_{1(n-6)}d_{1(n-5)}d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}$ 。

現在特將上述第 1 項、第 2 項、第 3 項、…、第 $(n-4)$ 項、第 $(n-3)$ 項、第 $(n-2)$ 項 等總計有 $(n-2)$ 項的結果全部相加起來，就必得到 [基本法則 2] 所規範出方程式公式(2)式的等號右側按序排列完整精確的詳盡內容！

只要遵循上述研究歸納出的 2 個基本法則，任何學習者皆能自己編列出屬於這圓內接一般化多邊形類托勒密定理狹義方程式(2)式的精準完備內容。

[C] 圓內接 n 邊形類托勒密定理狹義方程式的深化統合性

方程式(2)式的結構型態完全統一了圓內接任意邊形類托勒密定理狹義方程式的所有圖形情況，請檢視以下敘述所作任意縮減圖形推理的統合分析過程；

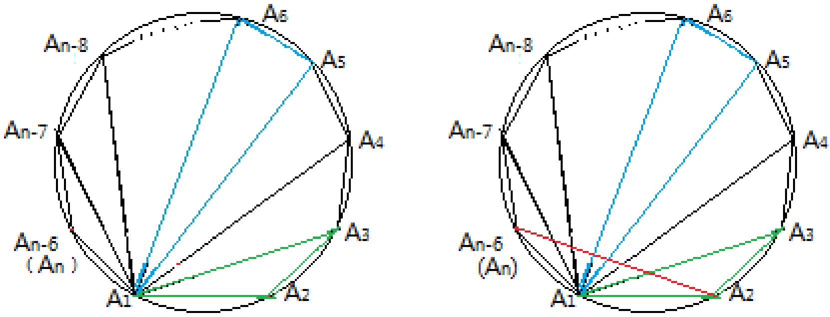

圖 16

(C1) 見上圖 16，若使頂點 A_{n-6}，A_{n-5}，…，A_{n-1} 等都聚集一起同步趨近於頂點 A_n，則頂點 A_{n-6}，A_{n-5}，…，A_{n-1} 必疊置於頂點 A_n 上，使 $\overline{A_{n-1}A_n}=V_{n-1}=0=V_{n-2}=V_{n-3}=\cdots=V_{n-6}$，代入(2)式，而 $\overline{A_2A_n}=d_{2n}$ 要變換成 $\overline{A_2A_{n-6}}=d_{2(n-6)}$，方程式(2)式就縮減修正為下式；$d_{2(n-6)}\cdot\prod_{i=3}^{n-1}d_{1i}=d_{2(n-6)}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$

$$= V_2V_nd_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}+V_3V_nV_1d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$$
$$+V_4V_nV_1d_{13}\cdot d_{16}d_{17}\cdots d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}+V_5V_nV_1d_{13}d_{14}\cdot d_{17}d_{18}\cdots d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$$
$$+V_6V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdot d_{18}d_{19}d_{1(10)}\cdots d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)} + \cdots\cdots$$
$$+V_{n-9}V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-10)}\cdot d_{1(n-7)}d_{1(n-6)}d_{1(n-5)}d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$$
$$+V_{n-8}V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-9)}\cdot d_{1(n-6)}d_{1(n-5)}d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$$
$$+V_{n-7}V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-8)}\cdot d_{1(n-5)}d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$$

，再將上列的縮減修正式全部除以 $d_{1(n-6)}d_{1(n-5)}d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$，得下式；

$$d_{2(n-6)}\cdot\prod_{i=3}^{n-7}d_{1i}=d_{2(n-6)}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-10)}d_{1(n-9)}d_{1(n-8)}d_{1(n-7)}$$
$$= V_2V_nd_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-10)}d_{1(n-9)}d_{1(n-8)}d_{1(n-7)}+V_3V_nV_1d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-10)}d_{1(n-9)}d_{1(n-8)}d_{1(n-7)}$$
$$+ V_4V_nV_1d_{13}\cdot d_{16}d_{17}\cdots d_{1(n-10)}d_{1(n-9)}d_{1(n-8)}d_{1(n-7)} +$$
$$V_5V_nV_1d_{13}d_{14}\cdot d_{17}d_{18}\cdots d_{1(n-10)}d_{1(n-9)}d_{1(n-8)}d_{1(n-7)} +$$
$$V_6V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdot d_{18}d_{19}d_{1(10)}\cdots d_{1(n-10)}d_{1(n-9)}d_{1(n-8)}d_{1(n-7)} + \cdots\cdots$$
$$+V_{n-9}V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-10)}\cdot d_{1(n-7)} +V_{n-8}V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-9)}$$
$$+ V_{n-7}V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-8)} \Big/ d_{1(n-6)} \qquad (12)$$

至此，n 邊形已經退化成 $(n-6)$ 邊形，圖 16 中頂點 A_{n-6} 與頂點 A_n 處在同一位置，頂點 A_{n-6} 蓋住了頂點 A_n，所以線段 $\overline{A_nA_1}=V_n$ 要變換成線段 $\overline{A_{n-6}A_1}=V_{n-6}$，相對地，$d_{1(n-6)}=\overline{A_1A_{n-6}}$ 也要變換成 $\overline{A_{n-6}A_1}=V_{n-6}$，方程式(12)式也要變換成下式；

$$d_{2(n-6)}\cdot\prod_{i=3}^{n-7}d_{1i}=d_{2(n-6)}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-10)}d_{1(n-9)}d_{1(n-8)}d_{1(n-7)}$$
$$= V_2V_{n-6}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-10)}d_{1(n-9)}d_{1(n-8)}d_{1(n-7)}+V_3V_{n-6}V_1d_{15}d_{16}d_{17}\cdots d_{1(n-9)}d_{1(n-8)}d_{1(n-7)}$$
$$+ V_4V_{n-6}V_1d_{13}\cdot d_{16}d_{17}\cdots d_{1(n-10)}d_{1(n-9)}d_{1(n-8)}d_{1(n-7)} +$$
$$V_5V_{n-6}V_1d_{13}d_{14}\cdot d_{17}d_{18}\cdots d_{1(n-10)}d_{1(n-9)}d_{1(n-8)}d_{1(n-7)} +$$
$$V_6V_{n-6}V_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdot d_{18}d_{19}d_{1(10)}\cdots d_{1(n-10)}d_{1(n-9)}d_{1(n-8)}d_{1(n-7)} + \cdots\cdots$$
$$+V_{n-9}V_{n-6}V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-10)}\cdot d_{1(n-7)} +V_{n-8}V_{n-6}V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-10)}d_{1(n-9)}$$
$$+ V_{n-7}V_1d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-10)}d_{1(n-9)}d_{1(n-8)} \qquad (13)$$

方程式 (13)式即為證明出的圓內接 $(n-6)$ 邊形類托勒密定理狹義方程式！

由上述完整推演可知：方程式(2)式實已涵蓋統一了圓內接 $(n-6)$ 邊形(13)式。

方程式 (13)式的等號右側總計有($n-8$)項式依序相加而成，且每一項也都由 ($n-8$)個相異線段長度依順序連乘積組合成型。

(C2) 若換成使頂點 A_4，A_5，A_6，⋯ ，A_{n-1} 等都聚集一起同步趨近於頂點 A_n，則頂點 A_4，A_5，A_6，⋯ ，A_{n-1} 必疊置於頂點 A_n 上，使 $\overline{A_{n-1}A_n} = V_{n-1} = 0 = V_{n-2} = V_{n-3} = \cdots = V_6 = V_5 = V_4$，代入(2)式，方程式(2)式的等號右側就剩下 2 項為下式；

$$d_{2n} \cdot \prod_{i=3}^{n-1} d_{1i} = d_{2n}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$$

$$= V_2V_nd_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)} + V_3V_nV_1d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$$

，而 $\overline{A_2A_n} = d_{2n}$ 要變換成 $\overline{A_2A_4} = d_{24}$，且公因式 $d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$ 要消去，則上式化成下式； $d_{24}d_{13}d_{14} = V_2V_nd_{14} + V_3V_nV_1$，現在 V_n 要變換成 V_4，退化成四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，而等號兩側的 d_{14} 也要變換成 V_4，代入後再化簡，最後即得出托勒密狹義方程式； $d_{24}d_{13} = V_2V_4 + V_3V_1$ (Ptolemy theorem)。

所以，方程式(2)式也深化並涵蓋統一了托勒密狹義方程式！至此，以上所有的推演驗證過程再次強化了本文各節次內容裡所有公式獲得證明的嚴謹理論基礎！

參、結論

1 本文一系列的探討演繹過程自始至終都以邊長和對角線段長的相互依循關係來作推理，其間所有的方程式敘述內容中無任何一項牽扯到多邊形的任意頂角，不須應用到頂角的輔助性質，就能美妙精緻地推證出方程式(2)式，這都是高瞻遠矚的托勒密狹義方程式的大功勞！本文全盤的擘劃是經由開始搜尋主題，觀察演練，比對結果，特徵分類，彙整歸納，統合編著等等依序的完整實務處理步驟，一步一腳印的確實演算並體驗歸納分析的抽象複雜意念而終能成就出豐盛甘醇的美果！這些有效率的操作行動步驟是提供了思考、解決問題的六大流程！一旦發掘到新主題，只要循序漸進分析探討，配合經驗與智慧的融合，就能試煉出豐富的整合創意能力，發覺新意象，進而生產營造新事物。

2. 本主題採取常受廣泛運用的數學歸納法來推理引證既平快順勢又適切合宜，是因演繹時必須自四邊形應用開始，而逐步證明出五邊形、六邊形、七邊形、⋯ 至 $n=k+1$ 邊形，無法簡潔地以跳躍方式直接證明出七邊形或二十邊形或 n 邊形，這些詳情盡在[A].節次的內容裡充分展現出來。同時，所歸納出的[基本法則]指導分針更使眾人都能按部就班、

輕快無惑地編寫出需要的圓內接多邊形方程式。

3. 圓內接n邊形類托勒密定理狹義方程式其內容竟然是由選出一個頂點為定點開始發展；由選定點的頂角在圓周所張開的對角線長與由此定點所引出的($n-3$)段對角線長按順序的連乘積這個特徵思維所起動，再引發了各邊長所引領的相異線段連乘積項，因而組合連結成同類型的各圖形方程式，也促使集結各圖形方程式的共同一致規律特性而歸納編理出 2 個基本法則。依循著這樣的法則即能順暢精準的規範排列出所有方程式的各個完整要項。

4. 明顯地，本文就是圓內接四邊形托勒密定理的深化推廣！將四邊形延伸一般化到圓內接多邊形的任意情形，所以，方程式(2)式就完美統一了圓內接多邊形同類型的任何方程式，使托勒密定理、圓內接五邊形、圓內接六邊形、…、圓內接$n-2$邊形、圓內接$n-1$邊形等公式都成為圓內接n邊形方程式(2)式的特例！本文為作者自我發想的創作探討作品。

參考文獻

林倉億 (2005)：數學歸納法專輯。**HPM 通訊，第八卷第二、三期**，2005 年 3 月。

李輝濱 (2019)：平面凸多邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式。**科學教育月刊，422、423 期**，2019 年 9、10 月出版發行。

李輝濱 (2017)：預測與驗證平面凸多邊形面積公式。**科學教育月刊，398、399 期**，2017 年 5、6 月出版發行。

蔡聰明 (2000)，**數學拾貝---星空燦爛的數學**。台北市：三民書局。

黃武雄 (1980)，**中西數學簡史**。人間文化事業公司。

世部貞市郎 (1988)，**幾合學辭典**。台北市：九章出版社。

林聰源 (1995)：**數學史---古典篇**。新竹市：凡異出版社。

項武義 (2011)：**基礎幾何學**。台北市：五南圖書出版公司。

項武義 (2012)：**基礎分析學**。台北市：五南圖書出版公司。

E.W. Hobson (1957). *A treatise on plane and Advanced trigonometry*, Dover.

Z.A. Melzek (1983). *Invitation to geometry*, John Wiley and Sons.