搶 20 遊戲必勝策略

蘇柏奇* 游淑媛

苗栗縣立興華高級中學

兩人對弈的遊戲中，先下手者往往占得先機，從而得到較高的獲勝機率（甚或必勝），若以樹狀圖畫出遊戲雙方所有可能過程，按圖索驥即可沿著勝利的方向前進，但每多一個回合，樹狀圖的複雜度便急速增加，不妨以甲方的觀點，針對乙方所有可能的選擇，給出一個甲的對應選擇（而不須畫出甲的所有方法），將可大幅降低討論複雜度。若甲對乙的所有選擇，都能獲勝，則勝利者即為甲；相對的，只要乙有任一種方法能獲勝，在雙方都想獲勝且不失誤的情況下，則勝利者為乙。本文討論一個常見的搶 20 遊戲的必勝策略，直接從兩個相鄰甲獲勝的情形（即甲取得該數後，不論乙方如何出手，都能由甲方獲勝，此數稱為必勝數），從而得到遊戲初始時，先下手者該如何出手才能獲得勝利。

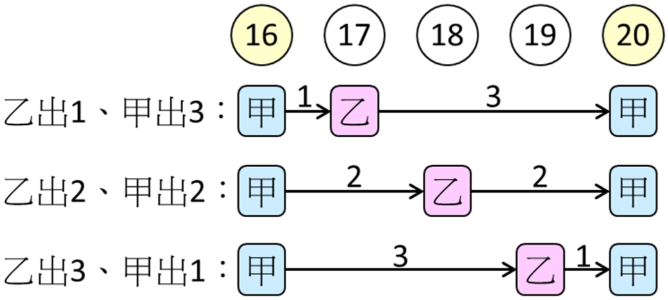
壹、搶 20 遊戲

常見的搶 20 遊戲規則是：「甲、乙雙方輪流出數字 1~3，逐步累加雙方所出的數，何人使累加的數成為 20 即為贏家。」例如：甲出 2、累加為 2➔乙出 3、累加為 5➔甲出 3、累加為 8➔乙出 3、累加為 11➔甲出 3、累加為 14➔乙出 3、累加為 17➔甲出 3、累加為 20！甲獲勝！

相較於遊戲初始時的不確定性，在遊戲尾聲較易判斷勝負情形，因此，由尾聲回推討論會是不錯的方法。假設最終由甲得 20 而獲勝，不難發現若甲搶到 16，接著不論乙如何選擇，甲都能再搶到 20（如下圖所示）。同理，搶到 12 則必能搶到 16、搶到 8 必能搶到 12、搶到 4 必能搶到 8、搶到 0 必能搶到 4，過程中甲方依序要搶的數為 0、4、8、12、16、20。我們將這些數稱為「必勝數」，記為 a_i 。

若將搶 20 遊戲一般化為搶 N、輪流出的數字為 1~k。若甲搶到 $N-(k+1)$ ，接著若乙出 i，則甲出 $k+1-i$ 搶到 $N-(k+1)+i+(k+1-i)=N$ ，不難得到依序要搶的必勝數成等差數列，公差為 $k+1$，第一個要搶的必勝數 a_1 為 N 除以 $k+1$ 的餘數。其中，當 $a_1 \neq 0$ 時，因為 $a_1 \leq k$ ，故先下手者必能出 a_1 得第一個必勝數 a_1 ，進而獲得最後勝利；反之，當 $a_1=0$ 時，先下手者必敗。

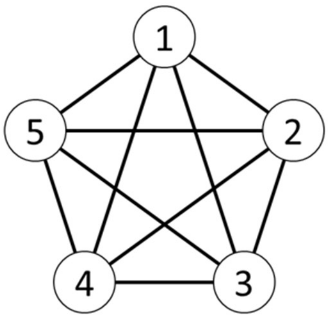
*為本文通訊作者

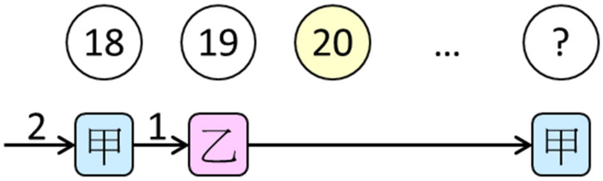


> 結論 1：甲、乙雙方輪流出數字 1~k，逐步累加雙方所出的數，何人使累加的數成為 N 即為贏家。遊戲的必勝數成等差數列，公差為 $k+1$ 且首項為 N 除以 $1+k$ 的餘數。

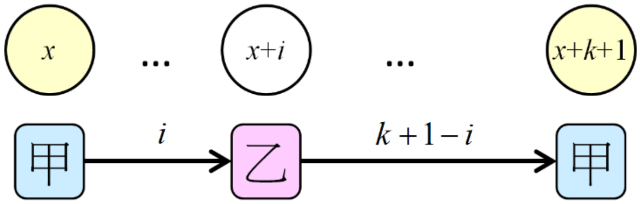
貳、搶 20 遊戲的變形

此遊戲常見的一個變形為：「五邊形頂點上有數字 1~5。甲、乙輪流移動一個放在頂點上的硬幣（開始的人可以決定硬幣放在哪個數字上），每次都要將硬幣從一個頂點移到另外一個頂點，然後累加兩人的數字。剛好加到 20 的人獲勝，超過的人算輸。」此變形遊戲規定下一手必須移到另一個頂點，亦即不能與前一手出的數字相同，另外，可能累加的數會跳過 20，故超過 20 的人算輸，例如：當甲出 2 得 18 後，此時乙無法出 2 而得 20，但若乙出 1 得 19，接著甲無法出 1，不得不超過 20，甲成為輸家。換言之，當自己無法搶到 20 時，妨礙對手搶到 20 也是獲勝之道。





同樣的，此變形遊戲可一般化為搶 N、輪流出的數字為 1~k（但不能與上一手出相同的數）。不難發現：當 k 為偶數時，甲取得某必勝數 x 後，接著若乙出 i，因為 $k+1$ 為奇數，得 i 與 $k+1-i$ 必為一奇數、一偶數，即 $i \neq k+1-i$，故甲必可出 $k+1-i$ 取得 $x+k+1$，進一步得兩個相鄰必勝數的間隔為 $k+1$。

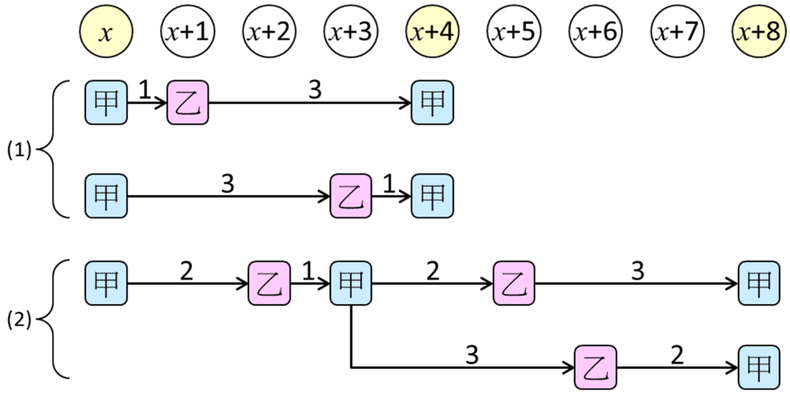


結論 2：甲、乙雙方輪流出數字 1~k（但不能與上一手出相同的數），逐步累加雙方所出的數，何人使累加的數成為 N 即為贏家。當 k 為偶數時，遊戲的必勝數成等差數列，公差為 $k+1$ 且首項為 N 除以 $1+k$ 的餘數。

以下討論 k 為奇數的狀況。以 k=3 為例，當甲取得必勝數 x 後，甲必可再取到 $x+4$ 或 $x+8$ 如下：

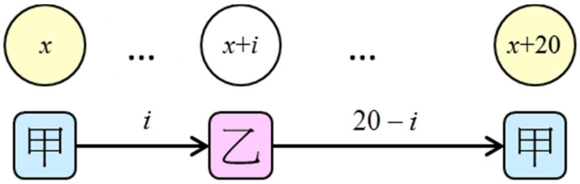
1. 若乙出 1 或 3，甲必可取到x+4；
2. 若乙出 2，甲無法出 2，但甲可以出 1，使得乙無法得到 $x+4$，當乙錯過 $x+4$ 而取得 $x+5$ 或 $x+6$ 時，甲皆能取得 $x+8$。

因此，當甲無法取得下一個必勝數 $x+4$，必能取得在下一個必勝數 $x+8$。可將 $x+4$ 和 $x+8$ 視為必勝數，亦即相鄰兩必勝數的間隔為 4。



再看 k=19 的例子，當甲取得必勝數 x 後，甲必可再取到 $x+20$ 或 $x+40$，同理將 $x+20$ 和 $x+40$ 視為必勝數，亦即相鄰兩必勝數的間隔為 20。甲得到 $x+20$ 或 $x+40$ 的方法如下：

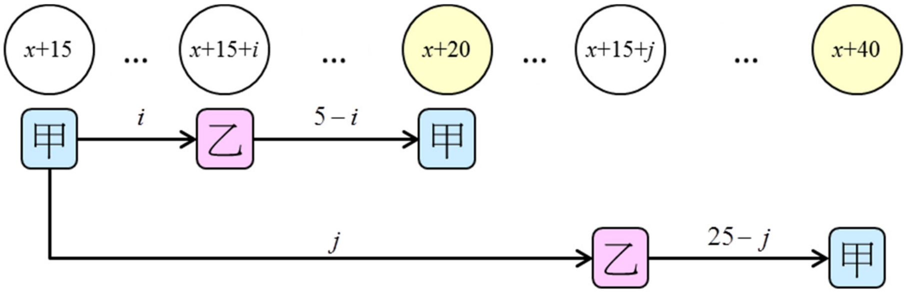
1. 若乙出 $i,\ i \neq 10$ 得 $x+i$，因 $i \neq 10$，得 $20-i \neq i$，故甲出 $20-i$ 得 $x+20$；



2. 若乙出 10 得 $x+10$，此時，甲必出 5 得 $x+15$，使乙無法得 $x+20$，接著

(1) 乙出 $i\,(i<5)$ 得到 $x+15+i$，接著甲出 $5-i$ 得到 $x+20$；

(2) 乙出 $j\,(5<j\le 19)$ 得到 $x+15+j$，接著甲出 $25-j$ 得到 $x+40$。



再看 k=47 的例子，當甲取得必勝數 x 後，甲必可再取到 $x+48$、$x+96$ 或 $x+144$，同理得相鄰兩必勝數的間隔為 48。討論如下：

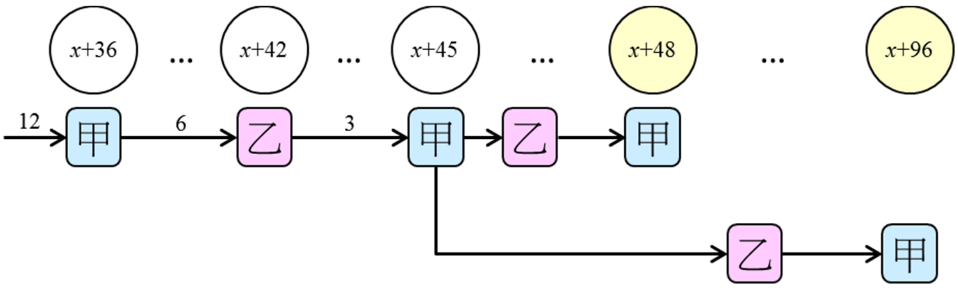
1. 若乙出 $i\,(i\ne 24)$ 得到 $x+i$，接著甲出 $48-i$ 得到 $x+48$；

2. 若乙出 24 得 $x+24$，此時，甲必出 12 得 $x+36$，使乙無法得 $x+48$，接著

(1) 乙出 $i\,(i<12,\ i\ne 6)$ 得 $x+36+i$，接著甲出 $12-i$ 得 $x+48$；

(2) 乙出 6 得 $x+42$，接著甲出 3 得 $x+45$，此時乙不能出 3，兩種選擇如下：

若乙出小於 3 的數，則甲得 $x+48$；若乙出大於 3 的數，則甲得 $x+96$；

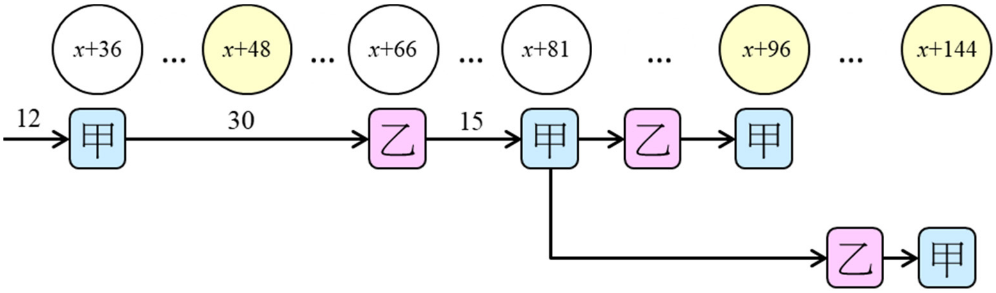


(3) 乙出 $j\,(12<j\le 47)$ 得 $x+36+j$，分兩種狀況討論：

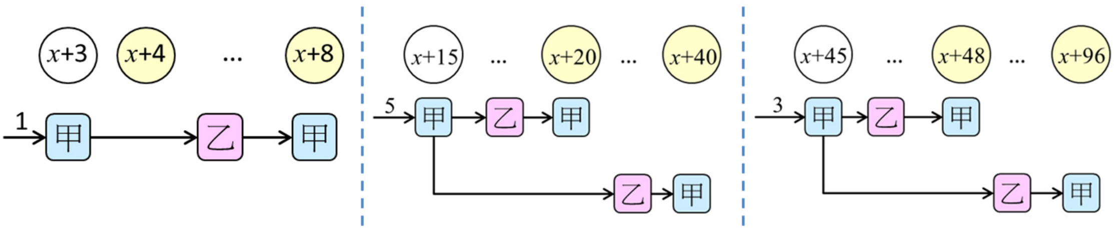
(a) 若乙出 $j\ne 30$，因 $j\ne 30$ 得 $60-j\ne j$，故甲出 $60-j$ 得 $x+96$；

(b) 若乙出 $j=30$，則甲出 15 得 $x+81$，此時乙不能出 15，乙有兩種選擇：

乙出小於 15 的數，甲得 $x+96$；乙出大於 15 的數，則甲得 $x+144$。

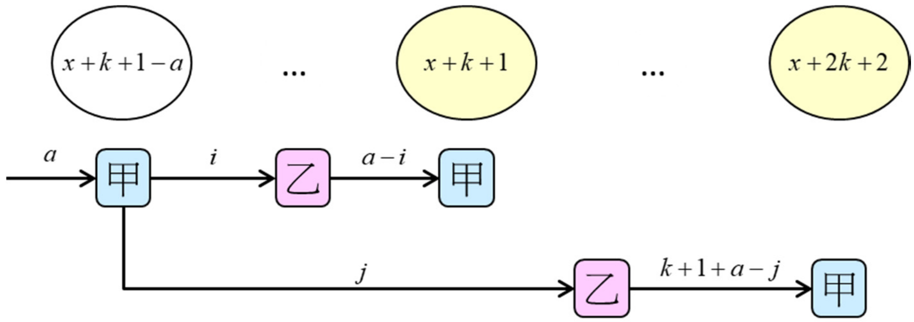


上述三例中，歸納：(1) k=3：若甲出 1 得 x+3 後，甲必能取得 x+8；(2) k=19：若甲出 5 得 x+15 後，甲必能取得 x+20 或 x+40；(3) k=47：若甲出 3 得 x+45 後，甲必能取得 x+48 或 x+96。

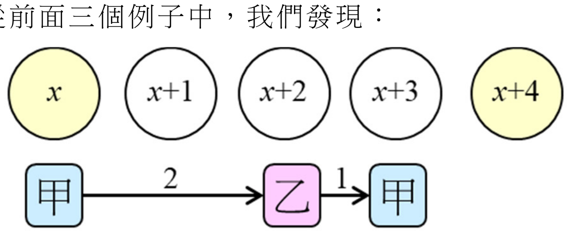


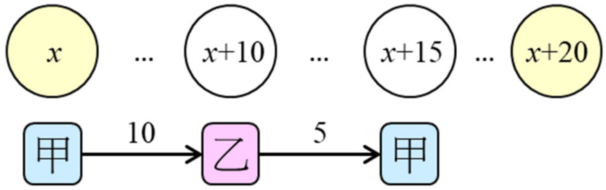
亦即當甲出奇數 a 得與必勝數 $x+k+1$ 相差 a 的數 $x+k+1-a$ 時，則甲必能取得 $x+k+1$ 或 $x+2k+2$，驗證如下：

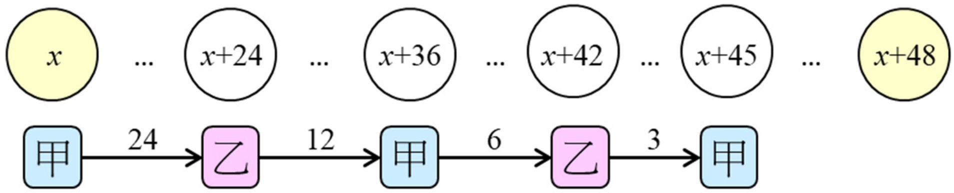
1. 乙出 $i\,(i<a)$，因 a 為奇數，得 $a-i\neq i$，故甲出 $a-i$ 得 $x+k+1$；
2. 乙出 $j\,(j>a)$，因 $k+1+a$ 為奇數，得 $k+1+a-j\neq j$，故甲出 $k+1+a-j$ 得 $x+2k+2$。



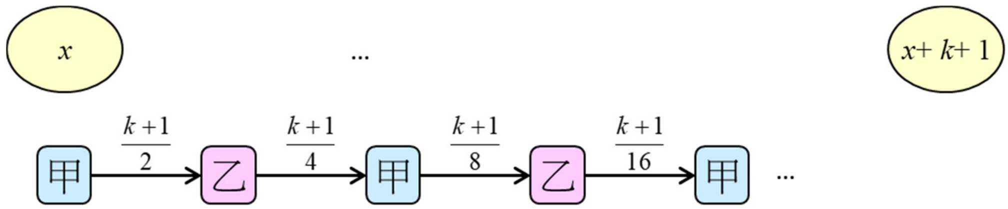
接著討論何種情況下，甲能出奇數 a 得與必勝數 $x+k+1$ 相差 a 的數 $x+k+1-a$？從前面三個例子中，我們發現：



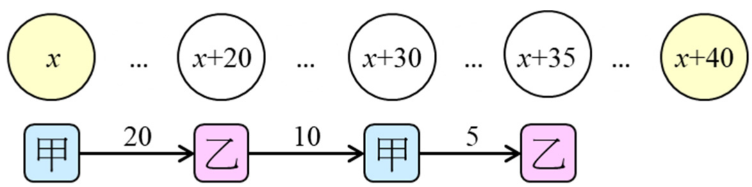




當甲得 x 時，雙方之攻防都要避免對方得 $x+k+1$，因此乙出 $\frac{k+1}{2}$，甲再出 $\frac{k+1}{4}$，乙再出 $\frac{k+1}{8}$，甲再出 $\frac{k+1}{16}\ldots$，雙方所出的數都是前一手的 $\frac{1}{2}$，直至甲出 $\frac{k+1}{2^r}$ 得與 $x+k+1$ 相差奇數 a 的 $x+k+1-a$，列出甲歷次所出的數分別為 $\frac{k+1}{4}$、$\frac{k+1}{16}$、$\frac{k+1}{64}\ldots$，不難看出甲所出 $\frac{k+1}{2^r}$ 之 r 為偶數，且由 $\frac{k+1}{2^r}=a$ 化簡得 $k+1=a\times 2^r$。因此歸納：當甲得 x，令 $k+1=a\times 2^r$ (a 為奇數)，當 r 為偶數時，則能由甲出奇數 a 而得 $x+k+1-a$，進而由甲得到 $x+k+1$ 或 $x+2k+2$。

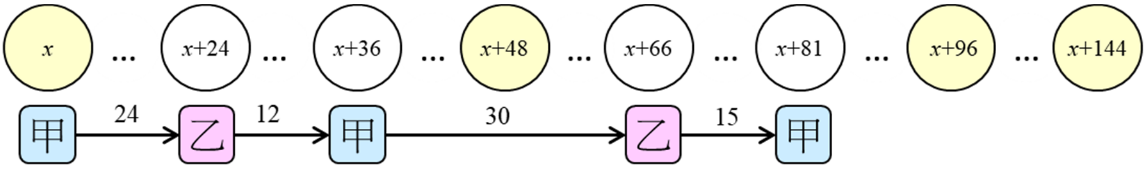


反之，若 r 為奇數時，會是乙出奇數 a 而得 $x+k+1-a$，例如：k=39 時，由乙出 5 得 x +35。亦即 r 為奇數時，相鄰兩必勝數的間隔不是 k +1，至於為何？稍後再探討。

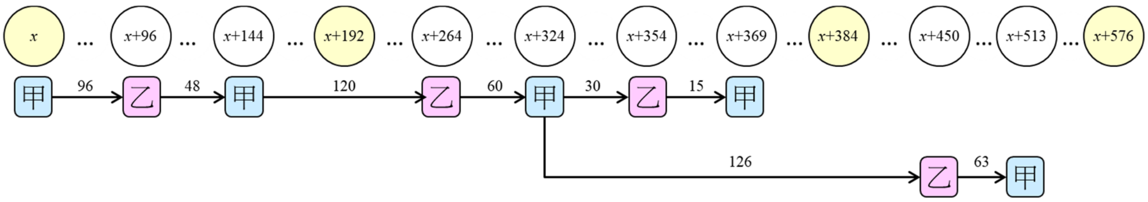


> 結論 3：當甲得 x，令 $k+1=a\times 2^r$ (a 為奇數)，當 r 為偶數時，則由甲出奇數 a 而得 $x+k+1-a$，進而由甲得到 $x+k+1$ 或 $x+2k+2$。

前述例子中，當甲出奇數 a 而得 $x+k+1-a$ 時，乙出比 a 大的數得大於 $x+k+1$ 的數，但仍不免讓甲得到下一個必勝數 $x+2k+2$，我們好奇的是：若乙預見這個結果，更早越過 $x+k+1$ 而得到更大的數，情況會不會改變？例如：當 k=47、甲取得 x 時，乙只能出 24 得 x+24 來避免甲立即得 x+48，而甲為了使乙無法得到 x+48，甲必出 12 得 x+36，此時，乙無法得到 x+48，但若乙出 30 得 x+66 使甲無法得 x+48 和 x+96，這樣會變成乙獲勝嗎？不會，因為接著甲出奇數 15 而得與 x+96 相差 15 的 x+81，後續必由甲得到 x+96 或 x+144。

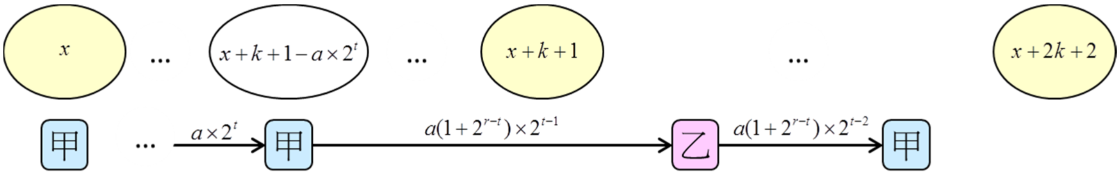


再例如：當 k=191、甲取得 x 時，乙只能出 96 得 x+96 來避免甲立即得 x+192，甲為了使乙無法得到 x+192，甲必出 48 得 x+144，此時，乙無法出 48 得到 x+192，但若乙出 120 得 x+264 使甲無法得 x+192 和 x+384，這樣會變成乙獲勝嗎？暫時不會，因為此時乙所得的數與必勝數 x+384 差 120 為偶數，接著甲出 60 得 x+324 與必勝數 x+384 差 60 為偶數，此時，若(1) 乙出 30 則甲出 15 得到與必勝數相差 15 的數；若(2) 乙出 126 則甲出 13 得到與必勝數 x+576 相差 63 的數 x+513，兩種情形都是由甲出奇數而得與必勝數相差奇數之數。若依序列出雙方所出的數 $96=3\times 2^5$、$48=3\times 2^4$、$120=15\times 2^3$、$60=15\times 2^2$、$30=15\times 2^1$、$15=15\times 2^0$（或 $126=63\times 2^1$、$63=63\times 2^0$），可看出每經過一個回合，2 的次方便減少 1，其中甲出的數之 2 的次方皆為偶數或 0（而乙出的數之 2 的次方皆為奇數），最後由甲出奇數（即 2 的次方為 0）而得與必勝數相差奇數之數。

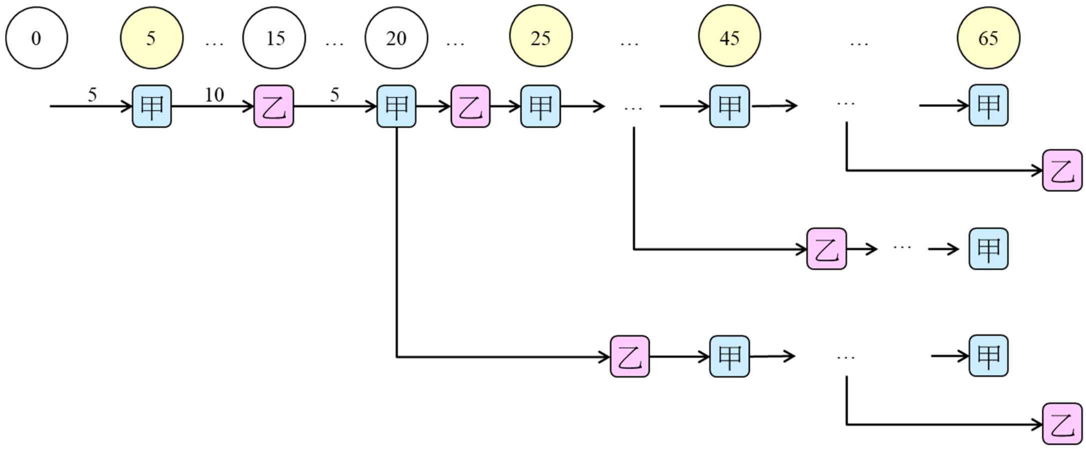


考慮一般情形，當甲得 x 且 $k+1=a\times 2^r$ (a 為奇數，r 為偶數)時，若乙在某個回合得到大於 $x+k+1$ 的數，那麼後續乙是否能出奇數而得與必勝數相差奇數之數？以下將驗證乙無法得與必勝數相差奇數的數。當雙方所得的數小於 $x+k+1$ 時，雙方所出的數為必為

前一手的 $\frac{1}{2}$，依序為乙出 $a\times 2^{r-1}$、甲出 $a\times 2^{r-2}$、乙出 $a\times 2^{r-3}\ldots$。若甲出 $a\times 2^{t}$ (t 為偶數且 $t<r$)而得與 $x+k+1$ 相差 $a\times 2^{t}$ 之數時，乙出 $\frac{a\times 2^{t}+a\times 2^{r}}{2}=a(1+2^{r-t})\times 2^{t-1}$ 而得大於 $x+k+1$ 的數且該數與 $x+2k+2$ 差 $a(1+2^{r-t})\times 2^{t-1}$，因 $r,\ t$ 皆為偶數，得 $t-1>0$ 且 $1+2^{r-t}$ 為奇數，故乙所得的數與 $x+2k+2$ 之差必為偶數。經過若干回合，當乙得到與必勝數相差 $b\times 2^{1}$ 之數時，甲出奇數 b 得與必勝數相差 b 的數，進而由甲獲勝。

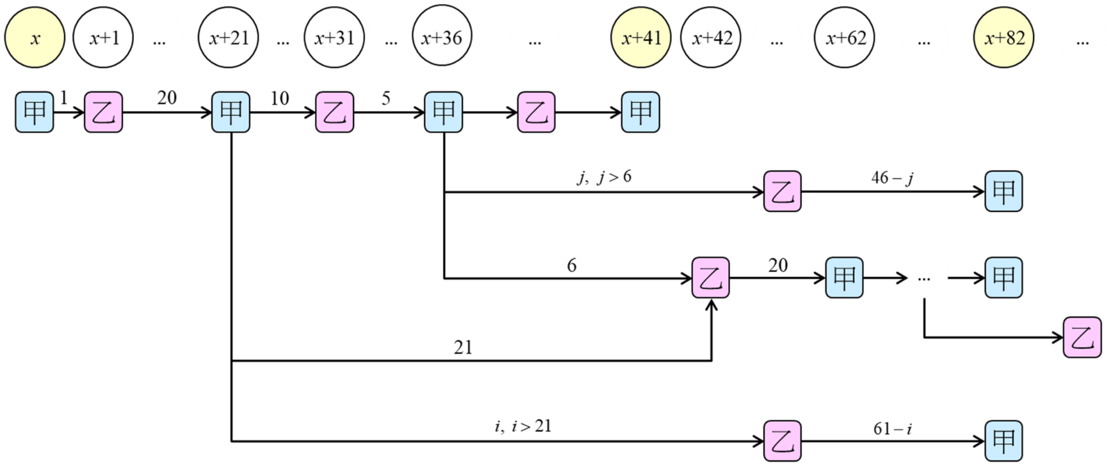


綜上討論，我們得到：當甲得 x，乙無法得 $x+i\times(k+1)$，進一步若 $N=x+i\times(k+1)$，則最終必由甲獲勝（由甲得 N 或乙得大於 N 的數），亦即當 $k+1=a\times 2^{r}$ (r 為偶數、a 為奇數)，第一個要搶的必勝數為 N 除以 $k+1$ 的餘數。例如：當 N=65、k=19 時，因為 $k+1=20=5\times 2^{2}$，要搶的必勝數依序為 5、25、45、65。先下手者須先得 5、並出奇數 5 得與 25 差 5 的 20，之後便能得 25，但若乙為妨礙甲得 25 而出大於 5 的數（得大於 25 的數），仍無法避免甲得 45（由結論 3）。同理，當甲得 25 時，甲可能再得 45 或 65；當甲得 45 時，甲可能得 65 或乙得超過 65 的數。故此遊戲必由先下手者獲勝，遊戲過程如下圖所示。

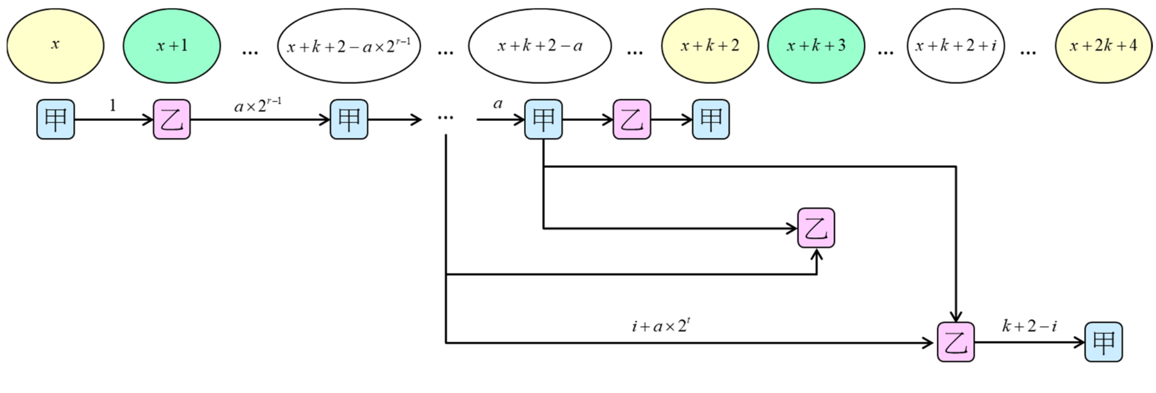


以下討論 $k+1=a\times 2^{r}$ 且 $a,\ r,\ k$ 為奇數的情形。在前述 k=39 的例子中，當甲取得必勝數 x 後，後續將由乙出 5 得 x+35，進而由乙得 x+40 或 x+80，及必勝數間隔不是 40。那麼必勝數的間隔為何？發現當甲得 x 後，若(1)乙出比 1 大的數 i，因 $41-i\neq i$，故甲出

$41-i$ 得 $x+41$；若(2)乙出 1 得 $x+1$，則甲出 20 得 $x+21$，乙有三種選擇：若(i) 乙仍以 $x+41$ 為目標，則將由甲出 5 得與 $x+41$ 差 5 的 $x+36$，乙無法得 $x+41$，若在這個過程中，乙放棄 $x+41$ 而得大於 $x+41$ 的數，再分成兩種情況：若①乙得大於 $x+42$ 的數，則由甲得 $x+82$；若②乙得 $x+42$，此情況與乙得 $x+1$ 的情況相同；(ii) 乙出 21 得 $x+42$，則此情況與乙得 $x+1$ 的情況相同；(iii) 乙出大於 21 的數 i，因 $61-i\neq i$，故甲出 $61-i$ 得 $x+82$。綜合上述討論，必勝數間隔為 41。



討論一般情形，令 $k+1=a\times 2^{r}$ ($a,\ r$ 為奇數)，當甲取得必勝數 x 後，若(1)乙出 i, $i>1$ 得 $x+i$，因 $k+2$ 為奇數，故 $i\neq k+2-i$，甲必出 $k+2-i$ 得 $x+k+2$；若(2)乙出 1 得 $x+1$，則甲出 $a\times 2^{r-1}$ 與 $x+k+2$ 差 $a\times 2^{r-1}$，因 $r-1$ 為偶數，不難得由甲出奇數 a 得 $x+k+2-a$，若過程中乙為避免甲得 $x+k+2$ 而得大於 $x+k+2$ 之數時，分兩種狀況討論：(i)若乙得 $x+k+3$，此狀況與乙得 $x+1$ 類似；(ii) 當甲出 $a\times 2^{t}$ 得 $x+k+2-a\times 2^{t}$ 時，乙出 $i+a\times 2^{t}$ 得 $x+k+2+i$，因 $k+2+a\times 2^{t}$ 為奇數，得 $k+2-i\neq i+a\times 2^{t}$，故甲出 $k+2-i$ 得 $x+2k+4$。綜合上述討論，當甲得必勝數 x 後，乙無法得 $x+i(k+2)$。



歸納上述討論如下：

結論 4：甲、乙雙方輪流出數字 1~k（但不能與上一手出相同的數），逐步累加雙方所出的數，何人使累加的數成為 N 即為贏家。令 $k+1=a\times 2^r$ （a 為奇數)，則：

1. 必勝數成等差數列，等差數列首項為 N 除以公差的餘數。
2. 當 r 為偶數時，公差 $k+1$；當 r 為奇數時，公差為 $k+2$。

（註：結論 2 中， k 為偶數，則 $k+1=(k+1)\times 2^0$ 屬於結論 4 中 r 為偶數的特例。）

肆、結論

本文用了一些策略來分析搶 20 遊戲的必勝策略，包含：從遊戲尾聲回推第一個要搶的數、以甲的視角來簡化遊戲過程、考慮相鄰兩個必勝數的間隔...等。第一節的遊戲中，由上、下兩手所出的數之和為定值 $k+1$ 得到必勝數間隔相同的結果，不論要搶的 N 有多大，下手者只要先搶到 N 除以 $k+1$ 的餘數即可依序得到所有必勝數（N 是最後一個必勝數）。第二節加入不能與上一手出相同的數的限制，遊戲的複雜度大幅增加，但定值 $k+1$ 仍是關鍵所在，依照 k 的奇偶性分成兩類：(1) 當 k 為偶數時，因 $k+1$ 為奇數，情況與第一節相同；(2) 當 k 為奇數時，為了避免對方得到下一個必勝數，雙方都會利用不得與上一手出相同數的規定，當上一手得所得數與下一個必勝數相差 d 時，則出 $\frac{d}{2}$ 使得對手無法出 $\frac{d}{2}$ 而得下一個必勝數，因此令 $k+1=a\times 2^r$ ，a 為奇數，依照 r 的奇偶性分成兩類：(i)當 r 為偶數時，若甲得某必勝數後，因為後續甲必能出奇數而得與更大必勝數相差奇數的數，進而甲得到必勝數或使乙得到大於 N 的數，攻防過程中，乙雖然可以妨礙甲得到某些必勝數，但乙始終無法搶到必勝數進而擺脫落敗的頹勢；(ii) 當 r 為奇數時，甲得某必勝數 x 後，乙僅有透過出 1 得 $x+1$ 的方法來妨礙甲得 $x+k+2$，但仍不免落敗，故相鄰兩個必勝數的間隔是 $k+2$ 。

最後，當甲得某必勝數時，乙雖然可以妨礙甲得某些更大的必勝數，但妨礙的次數有限，與 r 有關，留待讀者探索。

參考文獻

戲說數學：41 在正五邊形上跳舞...搶 20 的遊戲（取自國立臺灣師範大學許志農教授網頁） http://pisa.math.ntnu.edu.tw/popular-science/game/2014-03-14-01-38-49/1090-41zaizhengwuxingshangtiaowu20de