一般形平面凸六邊形類托勒密定理狹義方程式(下)

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

【(續)科學教育月刊第 431 期第 41 頁之後】

五、一般形平面凸六邊形類托勒密定理狹義方程式的回溯

[A] 現在要將一般形平面凸六邊形的方程式(11)式以縮減圖形法來導證出一般形平面凸五邊形的類托勒密定理狹義方程式。以下為縮減證明的詳細過程；

(A1) 對方程式(11)式言，其等號右側裡出現有 3 組由 V_1 運算組合的 { }項如下；

$\left\{\dfrac{V_2\sin A_2}{V_1\sin\theta_2}+\dfrac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_1\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]}\right\}$，先將此類 V_1 運算組合項回溯轉換成

$\left\{\dfrac{d_{13}}{V_1}+\dfrac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_1\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]}\right\}$，則方程式(11)式轉換後變成下列方程式；

$$d_{13}d_{14}d_{15}d_{26}\cdot\left\{1+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{d_{13}\sin\left[\left(\sum_{i=2}^{4}A_i\right)+\left(\sum_{i=2}^{4}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot\left\{1-\frac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6\sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot$$

$$\frac{-\sin\kappa}{\sin[(\sum_{i=5}^{6}A_i)+(\sum_{i=4}^{5}\theta_i)+\theta_5]}=V_1d_{13}d_{14}V_5\cdot\left\{\frac{d_{13}}{V_1}+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_1\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]}\right\}\cdot$$

$$\frac{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_2+\theta_3]}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_3]}\cdot\left\{1+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{d_{13}\sin\left[\left(\sum_{i=2}^{4}A_i\right)+\left(\sum_{i=2}^{4}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot$$

$$\frac{-\sin A_6}{\sin[(\sum_{i=5}^{6} A_i)+(\sum_{i=4}^{5}\theta_i)]} + V_1V_6d_{13}V_4\cdot\left\{\frac{d_{13}}{V_1}+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_1\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]}\right\}\cdot$$

$$\frac{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_2+\theta_3]}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_3]}\cdot\left\{1-\frac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6\sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot$$

$$\left\{1+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{d_{13}\sin\left[\left(\sum_{i=2}^{4}A_i\right)+\left(\sum_{i=2}^{4}\theta_i\right)\right]}\right\} + V_1V_6d_{15}V_3\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{d_{13}}{V_1}+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_1\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]}\right\}\cdot\frac{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_2+\theta_3]}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_3]}\cdot$$

$$\left\{1-\frac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6\sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot\frac{-\sin[(\sum_{i=2}^{3}A_i)+\theta_2]}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]} + V_6d_{14}d_{15}V_2\cdot$$

$$\cdot\left\{1-\frac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6\sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot\left\{1+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{d_{13}\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]}\right\}\cdot$$

$$\frac{\sin A_2}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_3]} \qquad (11\text{-}1)$$

(A2) 將下圖 19.凸六邊形的頂點 A_2平移趨近到 A_3，為使消除 $\Delta A_3A_2A_1$而縮減成一般形平面凸五邊形 $A_1A_3A_4A_5A_6$，如下圖 20.，則得 $\theta_2=0$，$A_2=0$，$V_2=0$，$d_{26}=d_{36}$，$\sin A_2=0$，直接代入方程式(11-1)式中，化簡、再整理，得下式；

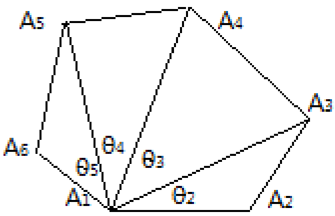


圖 19

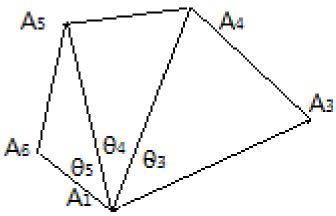


圖 20

$d_{26}=d_{36}$，$\sin A_2=0$，直接代入方程式(11-1)式中，化簡、再整理，得下式；

$$d_{13}d_{14}d_{15}d_{36}\cdot\left\{1+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{d_{13}\sin\left[\left(\sum_{i=3}^{4}A_i\right)+\left(\sum_{i=3}^{4}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot\left\{1-\frac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6\sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot$$

$$\frac{-\sin\kappa}{\sin[(\sum_{i=5}^{6}A_i)+(\sum_{i=4}^{5}\theta_i)+\theta_5]}=V_1d_{13}d_{14}V_5\cdot\left\{\frac{d_{13}}{V_1}+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_1\sin[(\sum_{i=3}^{4}A_i)+(\sum_{i=3}^{4}\theta_i)]}\right\}\cdot$$

$$\left\{1+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{d_{13}\sin\left[\left(\sum_{i=3}^{4}A_i\right)+\left(\sum_{i=3}^{4}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot\frac{-\sin A_6}{\sin[(\sum_{i=5}^{6}A_i)+(\sum_{i=4}^{5}\theta_i)]}+V_1V_6d_{13}V_4\cdot$$

$$\left\{\frac{d_{13}}{V_1}+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_1\sin[(\sum_{i=3}^{4}A_i)+(\sum_{i=3}^{4}\theta_i)]}\right\}\cdot\left\{1-\frac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6\sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot$$

$$\left\{1+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{d_{13}\sin\left[\left(\sum_{i=3}^{4}A_i\right)+\left(\sum_{i=3}^{4}\theta_i\right)\right]}\right\}+V_1V_6d_{15}V_3\cdot\left\{\frac{d_{13}}{V_1}+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_1\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]}\right\}\cdot$$

$$\left\{1-\frac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6\sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot\frac{-\sin A_3}{\sin[(\sum_{i=3}^{4}A_i)+(\sum_{i=3}^{4}\theta_i)]}\qquad(11\text{-}2)$$

(A3) 再從方程式(11-2)式中約去公因式$\left\{1+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{d_{13}\sin\left[\left(\sum_{i=3}^{4}A_i\right)+\left(\sum_{i=3}^{4}\theta_i\right)\right]}\right\}$，得；

$$d_{13}d_{14}d_{15}d_{36}\cdot\left\{1-\frac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6\sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot\frac{-\sin\kappa}{\sin[(\sum_{i=5}^{6}A_i)+(\sum_{i=4}^{5}\theta_i)+\theta_5]}=$$

$$V_1d_{13}d_{14}V_5\cdot\left\{\frac{d_{13}}{V_1}+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_1\sin[(\sum_{i=3}^{4}A_i)+(\sum_{i=3}^{4}\theta_i)]}\right\}\cdot\frac{-\sin A_6}{\sin[(\sum_{i=5}^{6}A_i)+(\sum_{i=4}^{5}\theta_i)]}$$

$$+V_1V_6d_{13}V_4\cdot\left\{\frac{d_{13}}{V_1}+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_1\sin[(\sum_{i=3}^{4}A_i)+(\sum_{i=3}^{4}\theta_i)]}\right\}\cdot\left\{1-\frac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6\sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\}$$

$$+\ d_{13}V_6 d_{15}V_3\cdot\left\{1-\frac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6\sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot\frac{-\sin A_3}{\sin[(\sum_{i=3}^{4}A_i)+(\sum_{i=3}^{4}\theta_i)]}\qquad(11\text{-}3)$$

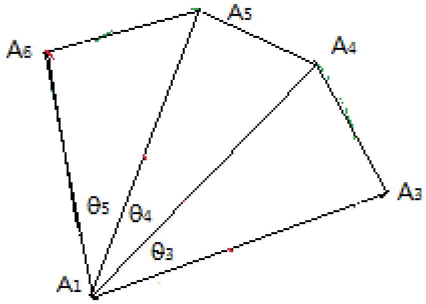


圖 21

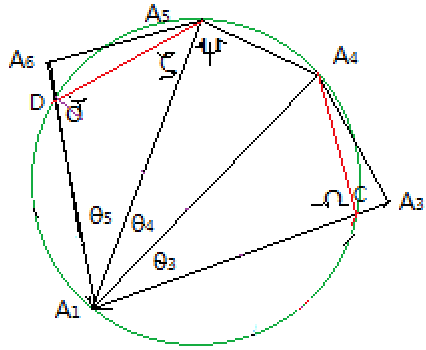


圖 22

(A4) 再看圖 21.圖 22.，圖形縮減後 $\left\{\frac{d_{13}}{V_1}+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_1\sin[(\sum_{i=3}^{4}A_i)+(\sum_{i=3}^{4}\theta_i)]}\right\}$ 項要變動，變動如下；$\angle A_3A_4C=A_4-(\pi-\theta_3-\theta_4)=A_4+\theta_3+\theta_4-\pi$ 且

$\Omega=A_3+\angle A_3A_4C=A_3+A_4+\theta_3+\theta_4-\pi$ ，$\angle A_3CA_4=2\pi-(A_3+A_4+\theta_3+\theta_4)$，

對 ΔA_3CA_4 言，$\dfrac{\overline{A_3C}}{\sin(\angle A_3A_4C)}=\dfrac{V_3}{\sin(\angle A_3CA_4)}\Rightarrow\overline{A_3C}=\dfrac{V_3\sin(A_4+\sum\limits_{i=3}^{4}\theta_i)}{\sin[(\sum\limits_{i=2}^{4}A_i)+(\sum\limits_{i=2}^{4}\theta_i)]}$

$\Rightarrow\ \overline{CA_1}=d_{13}-\overline{A_3C}=\left\{d_{13}-\dfrac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{\sin[(\sum_{i=3}^{4}A_i)+(\sum_{i=3}^{4}\theta_i)]}\right\}$ ，則

$\left\{\dfrac{d_{13}}{V_1}+\dfrac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_1\sin[(\sum_{i=3}^{4}A_i)+(\sum_{i=3}^{4}\theta_i)]}\right\}$ 變動成 $\left\{\dfrac{d_{13}}{V_1}-\dfrac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_1\sin[(\sum_{i=3}^{4}A_i)+(\sum_{i=3}^{4}\theta_i)]}\right\}$，

再看圖 22.，圖形縮減後得知 $d_{13}=V_1$，代入(11-3)式並再約去 V_1，化簡，

得；$d_{14}d_{15}d_{36}\cdot\left\{1-\dfrac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6\sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot\dfrac{-\sin\kappa}{\sin[(\sum_{i=5}^{6}A_i)+(\sum_{i=4}^{5}\theta_i)+\theta_5]}=$

$$V_1 d_{14} V_5 \cdot \left\{1-\frac{V_3 \sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_1 \sin[(\sum_{i=3}^{4}A_i)+(\sum_{i=3}^{4}\theta_i)]}\right\} \cdot \frac{-\sin A_6}{\sin[(\sum_{i=5}^{6}A_i)+(\sum_{i=4}^{5}\theta_i)]} + V_1 V_6 V_4 \cdot$$

$$\left\{1-\frac{V_3 \sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_1 \sin[(\sum_{i=3}^{4}A_i)+(\sum_{i=3}^{4}\theta_i)]}\right\} \cdot \left\{1-\frac{V_5 \sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6 \sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\} + V_6 d_{15} V_3 \cdot$$

$$\left\{1-\frac{V_5 \sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6 \sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\} \cdot \frac{-\sin A_3}{\sin[(\sum_{i=3}^{4}A_i)+(\sum_{i=3}^{4}\theta_i)]} \qquad (11\text{-}4)$$

(A5) 將方程式(11-4)式中的所有角度與邊長右下標記數碼作下列轉換；3 轉換成 2，4 轉換成 3，5 轉換成 4，6 轉換成 5，得下列(12*)式；見下圖 23.，

$$d_{13} d_{14} d_{25} \cdot \left\{1-\frac{V_4 \sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_5 \sin\left[\left(\sum_{i=4}^{5}A_i\right)+\left(\sum_{i=3}^{4}\theta_i\right)\right]}\right\} \cdot \frac{-\sin\kappa}{\sin[(\sum_{i=4}^{5}A_i)+(\sum_{i=3}^{4}\theta_i)+\theta_4]}$$

$$= V_1 d_{13} V_4 \cdot \left\{1-\frac{V_2 \sin(A_3+\sum_{i=2}^{3}\theta_i)}{V_1 \sin\left[\left(\sum_{i=2}^{3}A_i\right)+\left(\sum_{i=2}^{3}\theta_i\right)\right]}\right\} \cdot \frac{-\sin A_5}{\sin[(\sum_{i=4}^{5}A_i)+(\sum_{i=3}^{4}\theta_i)]}$$

$$+\ V_1 V_5 V_3 \cdot \left\{1-\frac{V_2 \sin(A_3+\sum_{i=2}^{3}\theta_i)}{V_1 \sin\left[\left(\sum_{i=2}^{3}A_i\right)+\left(\sum_{i=2}^{3}\theta_i\right)\right]}\right\} \cdot \left\{1-\frac{V_4 \sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_5 \sin\left[\left(\sum_{i=4}^{5}A_i\right)+\left(\sum_{i=3}^{4}\theta_i\right)\right]}\right\}$$

$$+\ V_5 d_{14} V_2 \cdot \left\{1-\frac{V_4 \sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_5 \sin\left[\left(\sum_{i=4}^{5}A_i\right)+\left(\sum_{i=3}^{4}\theta_i\right)\right]}\right\} \cdot \frac{-\sin A_2}{\sin[(\sum_{i=2}^{3}A_i)+(\sum_{i=2}^{3}\theta_i)]} \qquad (12*)$$

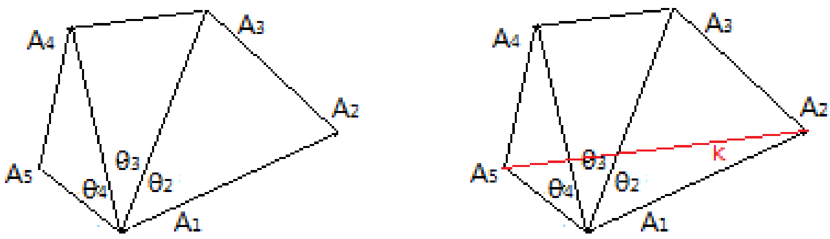


圖 23

，此處 κ 滿足圖 23.內 $\Delta A_1 A_2 A_5$ 中的 $\tan\kappa = \dfrac{V_5 \sin A_1}{V_1 - V_5 \cos A_1}$ 的關係式。改寫成

$$d_{13}d_{14}d_{25}\cdot\left\{1-\frac{V_4\sin(A_4+\theta_3+\theta_4)}{V_5\sin(A_4+A_5+\theta_3+\theta_4)}\right\}\cdot\frac{-\sin\kappa}{\sin[A_5+A_4+\theta_3+2\theta_4]}=V_1d_{13}V_4\cdot$$

$$\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin A_5}{\sin(A_5+A_4+\theta_3+\theta_4)}\ +\ V_1V_5V_3\cdot$$

$$\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot\left\{1-\frac{V_4\sin(A_4+\theta_3+\theta_4)}{V_5\sin(A_4+A_5+\theta_3+\theta_4)}\right\}\ +\ V_5d_{14}V_2\cdot$$

$$\left\{1-\frac{V_4\sin(A_4+\theta_3+\theta_4)}{V_5\sin(A_4+A_5+\theta_3+\theta_4)}\right\}\cdot\frac{-\sin A_2}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)} \tag{12}$$

對圖 23.的凸五邊形言，由 $A_2+A_3+A_4+A_5+\theta_4+\theta_3+\theta_2=3\pi$ ，(12)式再轉換

成下式； $d_{13}d_{14}d_{25}\cdot\left\{\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin\kappa}{\sin(A_2+A_3+\theta_2-\theta_4)}\right\}=$

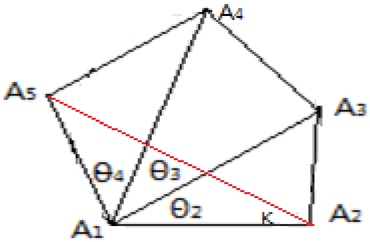
$$V_1d_{13}V_4\cdot\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin A_5}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\ +\ V_1V_5V_3\cdot$$

$$\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\ +\ V_5d_{14}V_2\cdot$$

$$\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin A_2}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)} \tag{13}$$

，此處 κ 滿足圖 24.內 $\Delta A_1A_2A_5$ 中的 $\tan\kappa=\dfrac{V_5\sin A_1}{V_1-V_5\cos A_1}$ 的關係式。

圖 24.明確表徵著方程式(12)式、(13)式即為在選取共圓三角形 $\Delta A_1A_3A_4$ 的外接圓情況下所證明出兩個等價的一般形平面凸五邊形類托勒密定理狹義方程式。



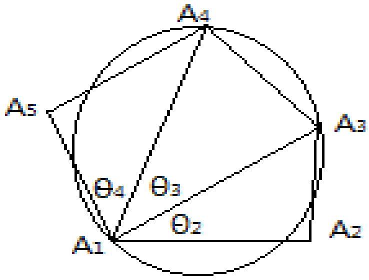


圖 24

[B] 繼續要將一般形平面凸五邊形的方程式(13)式以縮減圖形法來導證出一般形平面凸四邊形的類托勒密定理狹義方程式。以下為縮減證明的詳細過程；

(B1) 對方程式(13)式等號左側的單一項先以圖 24.的 $d_{25}\sin\kappa = V_5\sin A_1$ 作轉換，將

$$d_{13}d_{14}d_{25}\cdot\left\{\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin\kappa}{\sin(A_2+A_3+\theta_2-\theta_4)}\right\}$$ 轉換變動成

$$d_{13}d_{14}V_5\cdot\left\{\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin A_1}{\sin(A_2+A_3+\theta_2-\theta_4)}\right\}$$ ，再運算成；

$$d_{13}d_{14}\cdot\left\{\left[V_5-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin A_1}{\sin(A_2+A_3+\theta_2-\theta_4)}\right\}$$ ，則(13)式轉化

成； $$d_{13}d_{14}\cdot\left\{\left[V_5-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin A_1}{\sin(A_2+A_3+\theta_2-\theta_4)}\right\}$$

$$=V_1d_{13}V_4\cdot\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin A_5}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)} + V_1V_3\cdot$$

$$\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot\left[V_5-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right] + d_{14}V_2\cdot$$

$$\left[V_5-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin A_2}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)} \tag{13-1}$$

(B2) 將下圖 25.凸五邊形的頂點 A_5 平移趨近到 A_1，為使消除 $\Delta A_4A_5A_1$ 而縮減成一般形平面凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，如下圖 26.，則 $d_{14}=V_4$，$\theta_4=0$，$A_5=0$，$V_5=0$，將 $\theta_4=0$，$A_5=0$，$V_5=0$，$\sin A_5=0$，代入方程式(13-1)式中，化簡得下式；

$$d_{13}d_{14}\cdot\frac{V_4\sin A_1}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)} = V_1V_3\cdot\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot[-V_4] + d_{14}V_2\cdot V_4\cdot\frac{\sin A_2}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)} \tag{13-2}$$

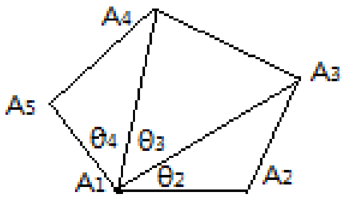


圖 25

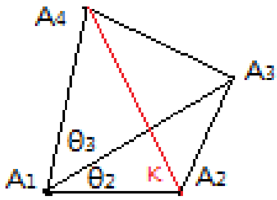


圖 26

(B3) 再將 $d_{14}=V_4$ 代入上列方程式(16-2)式中，約去公因式 V_4，得下式；

$$d_{13}\cdot\frac{V_4\sin A_1}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)} = V_1V_3\cdot\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot[-1] + V_4V_2\cdot\frac{\sin A_2}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)} \tag{13-3}$$

(B4) 見下圖 27.，將上列方程式(13-3)式中的各角度組合作轉換，其過程如下；

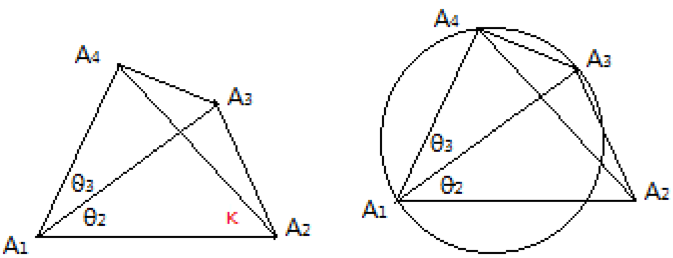


圖 27

$$A_2+A_3+\theta_2=2\pi-A_4-\theta_3 \;\Rightarrow\; \sin(A_2+A_3+\theta_2)=-\sin(A_4+\theta_3) \tag{Bd*-1}$$

$$A_3+\theta_3+\theta_2=2\pi-A_2-A_4 \;\Rightarrow\; \sin(A_3+\theta_3+\theta_2)=-\sin(A_2+A_4) \tag{Bd*-2}$$

$$A_2+A_3+\theta_3+\theta_2=2\pi-A_4 \;\Rightarrow\; \sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)=-\sin A_4 \tag{Bd*-3}$$

將(Bd*-1)式、(Bd*-2)式、(Bd*-3)式三者一起同步代入(13-3)式中，化簡得下式；

$$d_{13}\cdot\frac{V_4\sin A_1}{\sin(A_4+\theta_3)}=V_1V_3\cdot\left[1-\frac{V_2\sin(A_2+A_4)}{V_1\sin A_4}\right]+V_2V_4\cdot\frac{\sin A_2}{\sin A_4} \qquad (13\text{-}4)$$

觀察圖 27.，對 $\Delta A_1A_2A_4$ 言，必有關係式 $d_{24}\sin\kappa=V_4\sin A_1$ 存在，代入(13-4)式中，得；

$$d_{13}d_{24}\cdot\frac{\sin\kappa}{\sin(A_4+\theta_3)}=V_1V_3\cdot\left[1-\frac{V_2\sin(A_2+A_4)}{V_1\sin A_4}\right]+V_2V_4\cdot\frac{\sin A_2}{\sin A_4} \qquad (14)$$

，此處 κ 滿足圖 27.中 $\Delta A_1A_2A_4$ 的 $\tan\kappa=\dfrac{V_4\sin A_1}{V_1-V_4\cos A_1}$ 的關係式 。

上圖 27.明確表徵著方程式(14)式即為在選取共圓三角形 $\Delta A_1A_3A_4$ 的外接圓情況下所成功證明出的一般形平面凸四邊形類托勒密定理狹義方程式。

綜上所述即確認：推廣的一般形平面凸六邊形的類托勒密定理狹義方程式(11)式實已完全涵蓋統合了圓內接六邊形、一般形平面凸五邊形及圓內接五邊形、一般形平面凸四邊形及圓內接四邊形等 5 種圖形的類托勒密定理狹義方程式。

參、結論

1. 綜合全文推證演繹的結果再來對照比較作者之前所發表的一般形平面凸六邊形、一般形平面凸五邊形、一般形平面凸四邊形等兩相鄰交叉對角線長度乘積的餘弦表示式方程式，以其按順序歸納列式比對如下，可以清楚分辨出此 3 種圖形其 3 類方程式的相異特殊型態結構；

(1a) 平面凸四邊形其 3 類方程式的相異特殊型態結構分別明列對照於下；

i. 圓內接四邊形托勒密定理狹義方程式； $d_{13}d_{24}=V_1V_3+V_2V_4$ (3)

ii. 推廣的一般形平面凸四邊形的類托勒密定理狹義方程式(14)式；

$$d_{13}d_{24}\cdot\frac{\sin\kappa}{\sin(A_4+\theta_3)}=V_1V_3\cdot\left[1-\frac{V_2\sin(A_2+A_4)}{V_1\sin A_4}\right]+V_2V_4\cdot\frac{\sin A_2}{\sin A_4} \qquad (14)$$

需註明的是(14)式中的 κ 滿足 $\tan\kappa=\dfrac{V_4\sin A_1}{V_1-V_4\cos A_1}$ 的關係式。

iii. 推廣的一般形平面凸四邊形的托勒密定理餘弦表示式方程式；

$$d_{13}{}^2 d_{24}{}^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2 + A_4) \tag{15}$$

(1b) 平面凸五邊形其 3 類方程式的相異特殊型態結構分別明列對照於下；

i. 圓內接五邊形托勒密定理狹義方程式；

$$d_{13}d_{14}d_{25} = V_1d_{13}V_4 + V_1V_5V_3 + V_5d_{14}V_2 \tag{16}$$

ii. 推廣的一般形平面凸五邊形的類托勒密定理狹義方程式(13)式；

$$d_{13}d_{14}d_{25}\cdot\left\{\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin\kappa}{\sin(A_2+A_3+\theta_2-\theta_4)}\right\} = V_1d_{13}V_4\cdot$$

$$\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin A_5}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)} \quad + \quad V_1V_5V_3\cdot$$

$$\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right] \quad + \quad V_5d_{14}V_2\cdot$$

$$\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin A_2}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)} \tag{13}$$

需註明的是(13)式中的 κ 滿足 $\tan\kappa = \dfrac{V_5\sin A_1}{V_1 - V_5\cos A_1}$ 的關係式 。

iii. 一般形平面凸五邊形兩相鄰交叉對角線長度乘積的餘弦表示式方程式；

$$(d_{13}d_{24})^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 + (V_2V_5)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2 + A_4)$$

$$-2V_5V_1V_2V_3\cos(A_1 + A_3) - 2V_2^2V_4V_5\cos A_5 \tag{17}$$

(1c) 平面凸六邊形其 3 類方程式的相異特殊型態結構分別明列對照於下；

i. 圓內接六邊形托勒密定理狹義方程式；

$$d_{13}d_{14}d_{15}d_{26} = V_1d_{13}d_{14}V_5 + V_1V_6d_{13}V_4 + V_1V_6d_{15}V_3 + V_6d_{14}d_{15}V_2 \tag{9}$$

ii. 推廣的一般形平面凸六邊形的類托勒密定理狹義方程式(11)式；(略)。

iii. 平面凸六邊形兩相鄰交叉對角線長度乘積的餘弦表示式(18)式；(略)。

方程式(15)式~(18)式的證明需詳閱參考文獻表列中的篇目：平面凸多邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式(上)與(下)全文，必能明辨其內涵。也可知悉任一種平面凸多邊形都能尋找出其 3 類方程式的相異特殊型態結構。

2. 因任意三個不共直線的點必定共圓，使得適當選定多邊形中三個頂點共圓的特徵要領成為思考研析的重要方針，亦是引導推理解題的有效概念。當選取多邊形中不同組三個頂點共圓的情況時會推演出相異的方程式結果，而這些結果應該是類同的，只是相異修正項分別出現在方程式內不同位置的轉換。所以，一般形平面凸多邊形各圖形都必將證明出 2 個或 2 個以上的相異型態內涵方程式。
3. 對照比較圓內接多邊形與一般形平面凸多邊形的相對應方程式內涵，發現非常有趣的事是；第 i.類圓內接多邊形方程式內涵裡僅單純出現通過被選定頂角 A_1 的所有對角線長及頂角 A_1 的對應弦長 d_{2n} 和各邊長等乘積組合，而後者第 ii.類方程式內涵裡卻出現了多邊形的多個頂角與分角的各相異組合，也多形成好幾個修正項。修正項內盡是由 sine 函數形成分式項組合。第 iii.類方程式內涵裡每ㄧ項都顯示出長度四次方的量綱，而角度僅呈現頂角組合的 cosine 函數型。相對地，後者 ii.與 iii.類方程式裡的內涵更具豐富與多樣化。本文為作者承續圓內接多邊形頂角的合分角正弦值、餘弦值關係方程式研究後的另一延伸自我發想的探討作品，在此希望拋出一個研討方向以導引探索出最佳方案來推演出廣泛的ㄧ般形平面凸多邊形頂角的合分角正弦、餘弦值與對角線長、各邊長等關係方程式！

參考文獻

李輝濱 (2019)：平面凸多邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式。**科學教育月刊 422 期，423 期**，2019 年 9、10 月出版發行。

李輝濱 (2020)：圓內接多邊形各邊長與對角線長度乘積一般化方程式--深化統合托勒密定理(Ptolemy's Theorem)。**數學傳播季刊　　期**，2020 年　月出版發行。

李輝濱 (2019)：平面凸六邊形內中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。**數學傳播季刊 169 期**，2019 年 3 月出版發行。

李輝濱 (2019)：平面凸七邊形內中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。**科學教育月刊 417 期**，2019 年 4 月出版發行。

蔡聰明(2000)：**數學拾貝---星空燦爛的數學**。臺北市：三民書局。

林聰源(1995)：**數學史---古典篇**。凡異出版社。

項武義(2011)：**基礎幾何學**。台北市，五南圖書出版公司。

E.W. Hobson (1957): *A treatise on plane and Advanced trigonometry*, Dover.

Z.A. Melzek (1983): *Invitation to geometry*, John Wiley and Sons.

【完】