費氏數列的生成函數與等式

許閎揚

彰化縣立彰化藝術高級中學

壹、前言

費氏數列的定義為 $\langle F_n \rangle : F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \ge 2$ 且 $F_0 = 0$, $F_1 = 1$，這個定義看似簡單，但卻可衍伸出異常豐富的內容，除了本身有著各式各樣的恆等式外，在組合學上也有諸多應用，本篇是以組合學中的生成函數來證明它的一些等式。

貳、本文

一個數列 $\langle a_n \rangle$ 的生成函數定義為 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ，設費氏數列 $< F_n >$ 的生成函數為:

$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ ，則我們有以下的定理：

定理 1[6][7]: 若 $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ 為費氏數列的生成函數，則 $F(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ 。

[證明]：

費氏數列的遞迴關係與初始條件如下：

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ , } n \ge 2,\ F_0 = 0,\ F_1 = 1 \quad ,$$

由上面遞迴關係可得

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n \text{ 。}$$

將上式代換為 $F(x)$ 的關係式，得

$$F(x) - F_0 - F_1 x = x\left[F(x) - F_0\right] + x^2 F(x) \text{ , 其中 } F_0 = 0 \text{ , } F_1 = 1 \text{，}$$

整理得

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} \text{ ，}$$

得證。

有了定理 1，我們可以用它來推得下面一系列結果：

系理 1[6][7]： (a) $\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1}x^n = F_1 + F_3x + F_5x^2 + \cdots = \dfrac{1-x}{x^2-3x+1}$ ，

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}x^n = F_0 + F_2x + F_4x^2 + \cdots = \dfrac{x}{x^2-3x+1}$ 。

[證明]：

先證明 (a)：

由定理 1，

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = F_0 + F_1 x + \cdots + F_n x^n + \cdots, \quad (1)$$

將上式 x 以 $-x$ 代入，得

$$F(-x) = \frac{-x}{1+x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_n x^n = F_0 - F_1 x + \cdots + (-1)^n F_n x^n + \cdots, \quad (2)$$

將(1)(2)兩式相減後除 $2x$，得

$$\frac{1-x^2}{x^4-3x^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1} x^{2n} = F_1 + F_3 x^2 + F_5 x^4 + \cdots ,$$

將 x 用 $x^{\frac{1}{2}}$ 代入，得

$$\frac{1-x}{x^2-3x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1} x^n = F_1 + F_3 x + F_5 x^2 + \cdots \text{。}$$

證明 (b)：

將(1)(2)相加除以 2，得

$$\frac{x^2}{x^4-3x^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} x^{2n} = F_0 + F_2 x^2 + F_4 x^4 + \cdots ,$$

將 x 用 $x^{\frac{1}{2}}$ 代入，得

$$\frac{x}{x^2-3x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} x^n = F_0 + F_2 x + F_4 x^2 + \cdots ,$$

得證。

系理 2[1][3][7]： $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n+1} = F_{2n+2}$ 。

[證明]：

這系理在 1876 年已由 *Lucas* 證得。證明這系理方式有許多種，如用多項式恆等式[1]、矩陣計算[3]、遞迴與累加[7]等方式證明，我們使用生成函數重新證明。

由系理 1 (a)，

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1}x^n = \frac{1-x}{x^2-3x+1} \text{ ，}$$

因為

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ ，}$$

所以

$$(1+x+x^2+\cdots)\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1}x^n = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1-x}{x^2-3x+1}$$

整理得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(F_1+F_3+\cdots+F_{2n+1}\right)x^n = \frac{1}{x^2-3x+1}\cdots\cdots\cdots(3)$$

接著由系理 1 (b)，

$$\frac{x}{x^2-3x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}x^n = F_0+F_2x+F_4x^2+\cdots \text{ , } F_0=0$$

等號兩邊同除 x，得

$$\frac{1}{x^2-3x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+2}x^n = F_2+F_4x+F_6x^2+\cdots\text{ 。 }\cdots(4)$$

比較(3)(4)，得

$$F_1+F_3+\cdots+F_{2n+1} = F_{2n+2} \text{ ，}$$

得證。

系理 3[1][3][7]： $F_0+F_2+F_4\cdots+F_{2n} = F_{2n+1}-1$ 。

[證明]：

由系理 1 (b)，

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}x^n = F_0 + F_2x + F_4x^2 + \cdots = \frac{x}{x^2-3x+1} ,$$

因為

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} ,$$

所以

$$(1+x+x^2+\cdots)\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}x^n = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{x}{x^2-3x+1} = \frac{1-x}{x^2-3x+1} - \frac{1}{1-x} ,$$

整理得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(F_0+F_2+\cdots+F_{2n}\right)x^n = \frac{1-x}{x^2-3x+1} - \frac{1}{1-x} ,$$

由系理 1 (a)，上式等號右邊第一項以 $\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1}x^n$ 取代，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(F_0+F_2+\cdots+F_{2n}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n ,$$

比較等號兩邊 x^n 係數後，得

$$F_0+F_2+F_4\cdots+F_{2n} = F_{2n+1}-1 ,$$

得證。

以下我們想求數列 $\left\langle F_n^2 \right\rangle$ 的生成函數，我們先證明下面引理 1：

引理 1[2][7]： $F_n^2+F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$, $n \ge 0$ ， $F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} = F_{2n}$, $n \ge 1$ 。

[證明]：

這引理 1 在參考資料[2][7]中以費氏數列的特徵方程的根與係數、*Binet* 公式證明，我們此處以矩陣證明。

由參考資料[4]可知：

若 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，則 $A^n=\begin{bmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{bmatrix}, n \ge 1$ 。

考慮 $A^nA^n = A^{2n}$ ，由上面結果可得

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{bmatrix}, n \geq 1 \text{，}$$

比較等號兩邊 $(1,1)$ 元，得

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1} \text{ , } n \geq 1 \text{，}$$

顯然 $n=0$ 時命題亦成立；比較等號兩邊 $(2,1)$ 元，得

$$F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} = F_{2n} \text{ , } n \geq 1 \text{，}$$

得證。

定理 2[7]：若 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{\,2} x^n$ 是 $< F_n^{\,2} >$ 的生成函數，則 $A(x) = \dfrac{(1-x)x}{1-2x-2x^2+x^3}$ 。

[證明]：

參考資料[7]並無提供本定理的證明方式，僅說明這生成函數在 1967 年由 $V.E.$ *Hoggatt* 和 *D.A. Lind* 所證明。

由引理 1，數列 $< F_n^{\,2} >$ 的遞迴關係如下：

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}, \; n \geq 0 \text{ ，}$$

由上面遞迴關係可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^2 x^n + \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}^2 x^n = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1} x^n \text{ ，}$$

將上式代換為 $A(x)$ 的關係式並由定理 1 的系理 1(a)，得

$$A(x) + \frac{A(x) - F_0^{\,2}}{x} = \frac{1-x}{1-3x+x^2} \text{ ，}$$

整理得

$$A(x) = \frac{(1-x)x}{1-2x-2x^2+x^3} \text{ ，}$$

得證。

系理： $F_{n+3}^2-2F_{n+2}^2-2F_{n+1}^2+F_n^2=0$, $n\geq 0$ 。

[證明]：

由定理 2，得

$$x-x^2=\left(1-2x-2x^2+x^3\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}F_n^2x^n\right)$$

當 $n\geq 0$ 時，等號左邊 x^{n+3} 的係數為 0，等號右邊 x^{n+3} 的係數為

$$F_{n+3}^2-2F_{n+2}^2-2F_{n+1}^2+F_n^2 \text{ ，}$$

所以

$$F_{n+3}^2-2F_{n+2}^2-2F_{n+1}^2+F_n^2=0 \text{ , } n\geq 0 \text{ ，}$$

得證。

定理 3[7]： 若 $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nF_{n+1}x^n$ 是數列 $\langle F_nF_{n+1}\rangle$ 的生成函數，則 $A(x)=\dfrac{x}{1-2x-2x^2+x^3}$ 。

[證明]：

參考資料[7]並無提供本定理的證明方式，僅說明這生成函數在 1967 年由 *V.E. Hoggatt* 和 *D.A. Lind* 所證明。

由引理 1，數列 $\langle F_{n-1}F_n\rangle$ 的遞迴關係如下：

$$F_{n-1}F_n+F_nF_{n+1}=F_{2n} \text{ , } n\geq 1 \text{ ，}$$

由上面遞迴關係，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}F_{n-1}F_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}F_nF_{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}F_{2n}x^n \text{ ，}$$

將上式代換為 $A(x)$ 的關係式並由定理 1 的系理 1(b)，得

$$xA(x)+A(x)=\frac{x}{1-3x+x^2} \text{ ，}$$

整理得

$$A(x)=\frac{x}{1-2x-2x^2+x^3} \text{ ，}$$

得證。

系理[7]： $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$ 。

[證明]：

這系理在 1876 年已由 *Lucas* 證得，在參考資料[7]中提供的證明方式是數學歸納法，我們使用生成函數重新證明。

由定理 2，得

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^2 x^n = \frac{(1-x)x}{1-2x-2x^2+x^3} ,$$

因為

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} ,$$

所以

$$(1+x+x^2+\cdots)\sum_{n=0}^{\infty} F_n^2 x^n = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{(1-x)x}{1-2x-2x^2+x^3} = \frac{x}{1-2x-2x^2+x^3}$$

由定理 3，上式等號右邊為 $\langle F_n F_{n+1} \rangle$ 的生成函數，故

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(F_0^2 + F_1^2 + \cdots + F_n^2 \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} F_n F_{n+1} x^n ,$$

比較等號兩邊 x^n 係數後，得

$$\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1} ,$$

得證。

參、結語

生成函數是組合數學的基本內容之一，它是研究數列、級數很方便的一項工具，我們可以藉由對數列的生成函數做加、減、代換、微分等操作來發現數列的性質。參考資料[7]是一本極有價值的參考書，厚度達 600 多頁，它對於費氏數列的許多題材都有完整的介紹，裡面羅列了許多費氏數列的等式與生成函數，對於費氏數列有興趣的讀者，應該能從中發現不少有挑戰性的題材。本文僅用費氏數列的生成函數證明幾個常見的等式，若能對它的代數、分析、組合性質有更深入的理解，相信必能發現或證明出更多的費氏數列的性質。

參考資料

1. 陳建燁，推導費氏數列三部曲(上)-用多項式除法，**高中數學電子報第 109 期**，2016 年 4 月。
2. 陳建燁，推導費氏數列三部曲(中)-用根與係數關係，**高中數學電子報第 109 期**，2016 年 4 月。
3. 許閎揚，用矩陣來看費氏數列的一些性質，**高中數學電子報第 150 期**，2019 年 9 月。
4. 許閎揚,用矩陣來證明費氏數列的一些性質,**高中數學電子報第 151 期**,2019 年 10 月。
5. 許閎揚，用生成函數來證明費氏數列的兩個性質，**高中數學電子報第 153 期**，2019 年 12 月。
6. R. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik. (1994). *Concrete Mathematics*: *A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley Professional, 2nd edition.
7. T. Koshy. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. Wiley.