哥倫布方塊與費氏花

游曉琦[1*] **吳惠美**[2]

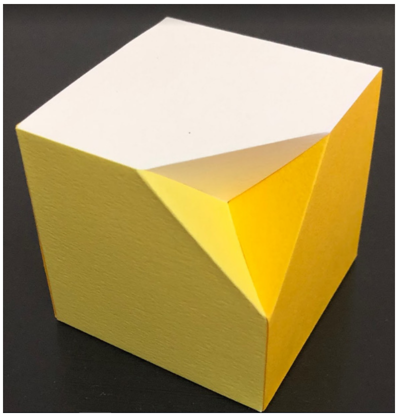
[1]臺中市立居仁國民中學

[2]臺中市立臺中第二高級中學

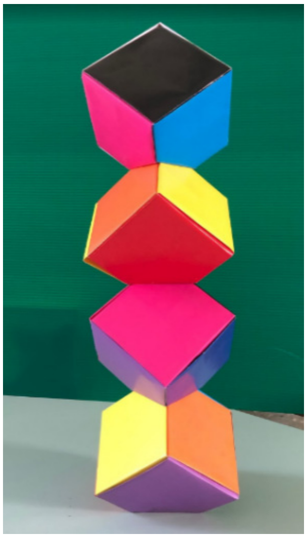
哥倫布方塊(Columbus cubes)是著名摺紙大師 David Mitchell 設計摺製的作品【註一】。因為它的摺製方法簡單，且使用色紙摺出來色彩繽紛，相當討喜。可以討論其數學性質又能讓學生堆疊進行團隊互動，所以最近在藝數摺學社團【註二】裡許多老師將其應用在課堂教學上。類似的摺製方式，又可組合成美麗的費氏花令人驚豔，讓我們一起來認識它們吧。

一、哥倫布方塊介紹

哥倫布方塊是將正立方體的一個角由相鄰三邊的中點，使這個角向立方體內部凹陷形成的多面體(如圖一)。命名為哥倫布方塊，確實與發現新大陸的哥倫布有關連的。設計者 David Mitchell 以哥倫布將蛋敲一角凹陷使其能站立的故事(Egg of Columbus)【註三】，比喻此正立方體也能從角端直立，故稱之為哥倫布方塊。也正因為凹陷處的角是三個互相垂直的邊形成的，可與另一個方塊的凸角接合，因此不須黏合就可將多個哥倫布方塊堆疊，形成哥倫布塔(如圖二)。若將接合的方向調整，則又可形成哥倫布環(如圖三)，增加數量並思考其結構，還可做出哥倫布球(如圖四)。甚至以不同邊長的哥倫布方塊進行較為複雜的組合，可以製作成美麗的數學藝術品了(如圖五)。



圖(一)



圖(二)

*為本文通訊作者

圖（三）

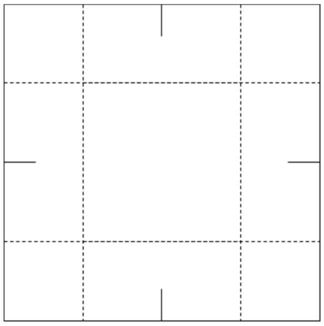
圖（四）

圖（五）

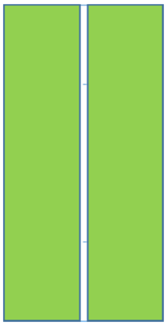
二、色紙摺哥倫布方塊

1. 材料：色紙 6 張(建議 15cm×15cm，3 色，每色 2 張)
2. 零件甲(3 張)摺法

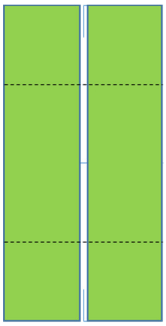
(1) 將色紙邊長四等分



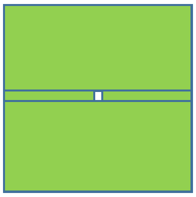
(2) 左右往中間摺



(3) 上下往中間摺

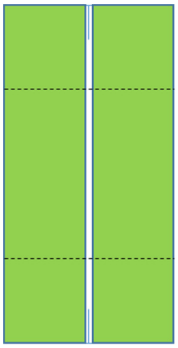


(4) 零件 A 完成

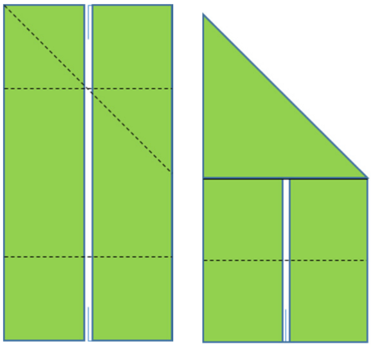


3. 零件乙(3 張)摺法

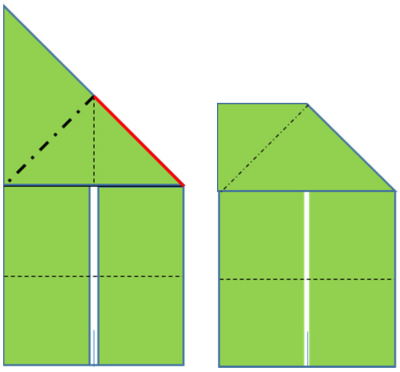
(1) 前三步驟如零件甲摺法



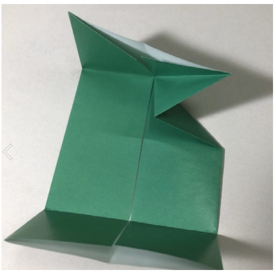
(2) 右上角摺出等腰直角三角形



(3) 黑色山線摺往紅色邊

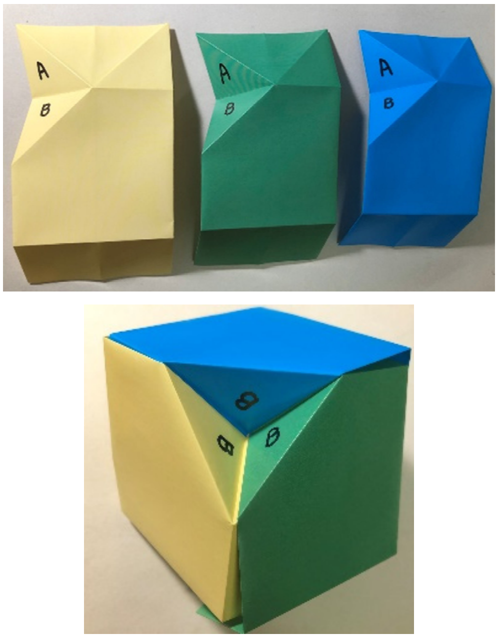


(4) 實際零件



4.組合方式

(1) 三張乙零件的 B 部分交互蓋住 A 部分，形成立方體的三個面，如圖(六)。



圖（六）

(2) 再以三張甲零件，完成立方體的剩下三面，如圖(七)。

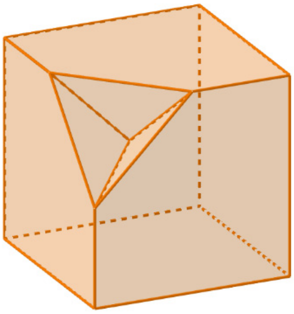
圖（七）

三、哥倫布方塊的變化方式

1. 改變缺角的數量:

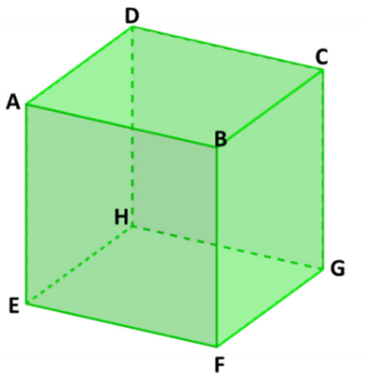
(1) 凹 1 角：即為標準的哥倫布方塊，如

圖(八)。

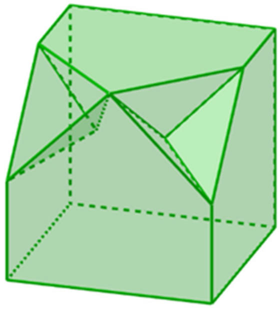


圖（八）

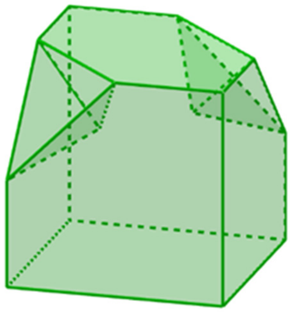
(2) 凹 2 角：假設正立方體的邊長為 1，則正立方體的七個頂點與 A 點的距離只有 1，$\sqrt{2}$ 與 $\sqrt{3}$ 三種情形，如圖(九)，與 A 點距離為 1 的有 B、D、E 三點，凹 AB 兩角,凹 AD 兩角與凹 AE 兩角視為同一種，如圖(十-1)； 與 A 點距離為 $\sqrt{2}$ 的有 C、F、H 三點，凹 AC 兩角,凹 AF 兩角與凹 AH 兩角視為同一種，如圖(十-2)； 與 A 點距離為 $\sqrt{3}$ 的有 G 點，如圖(十-3)，所以凹 2 角的情形有三種。



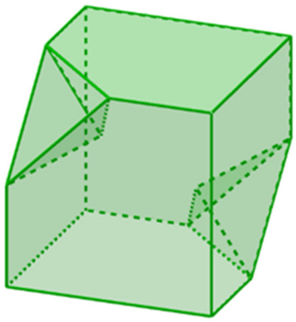
圖（九）



圖(十-1)



圖(十-2)

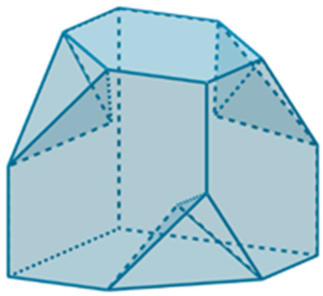


圖(十-3)

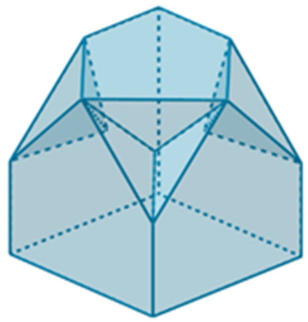
(3) 凹 3 角：假設正立方體的邊長為 1，因為正立方體任兩頂點的距離只有 1、$\sqrt{2}$ 與 $\sqrt{3}$ 三種情形，所以從正立方體的八個頂點選三個頂點凹進去，那選擇的這三個頂點所形成的三角形有三種情形，第一種為正三角形，

則其邊長顯然為 $\sqrt{2}$ ；第二種情形為等腰三角形，則其三邊長分別為 1、1 與 $\sqrt{2}$ ；第三種情形為三邊長都不相等的三角形，則其三邊長分別為 1、$\sqrt{2}$ 與 $\sqrt{3}$；此三種情形內凹後得到的圖形分別為圖(十一-1) 、圖(十一-2)與如圖(十一-3)。

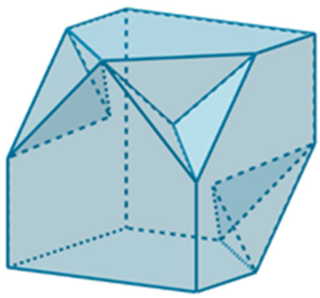
(4) 凹 4 角：情形共有 7 種 。由圖(十一-1)再多一個點凹進去可產生五個不同情形，如圖(十二-1)到圖(十二-5)；由圖(十一-2)再多一個點內凹可再產生一種新的情形，如圖(十二-6)，且這四點共面；由圖(十一-3)再多一個點內凹可再產生一種新的方塊，如圖(十二-7)



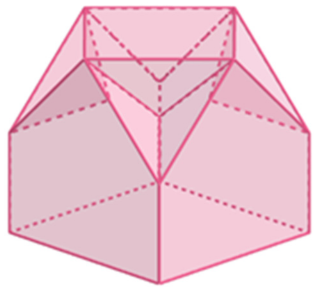
圖(十一-1)



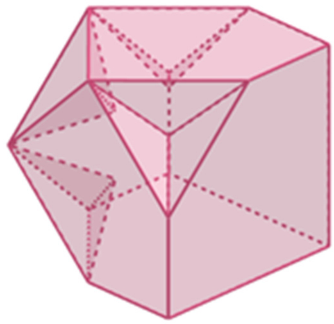
圖(十一-2)



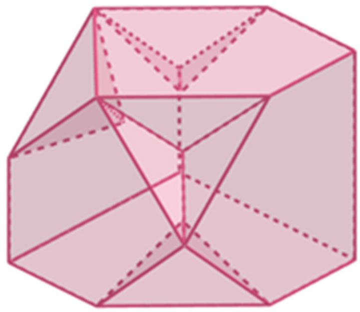
圖(十一-3)



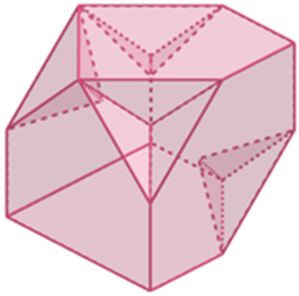
圖(十二-1)



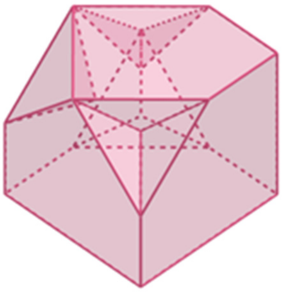
圖(十二-2)



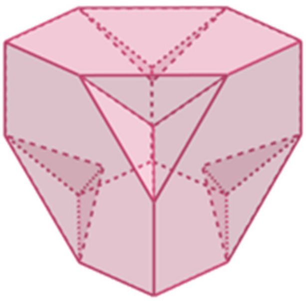
圖(十二-3)



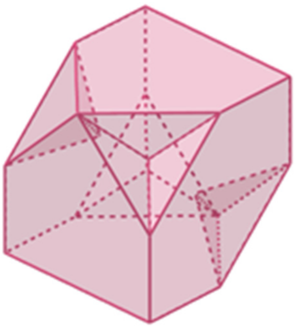
圖(十二-4)



圖(十二-5)



圖(十二-6)



圖(十二-7)

(文章內 3D 立體圖形皆由中壢高商吳淑惠老師繪製)

(5) 凹 5 角的情形與凹 3 角的情形相似，所以有 3 種

(6) 凹 6 角的情形與凹 2 角的情形相似，所以有 3 種

(7) 凹 7 角的情形與凹 1 角的情形，所以有 1 種

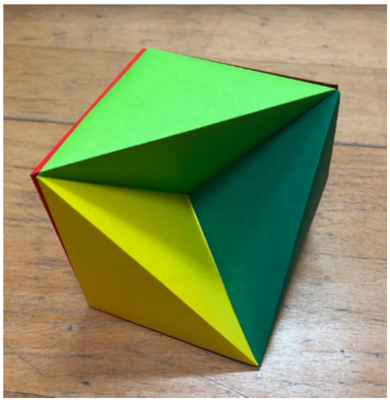
(8) 凹 8 角的情形有 1 種

每一種情形如何摺製，就讓大家自己動動手、動動腦，體驗一下摺紙歷程和樂趣。

2. 改變缺角大小：

哥倫布方塊的缺角是在相互垂直三邊的中點處。我們也可任意改變這三點的位置，就可以得到不同缺角的方塊，如圖(十三)。如果缺角取到最大，則形成如圖(十四)很特別的形狀。

圖(十三)



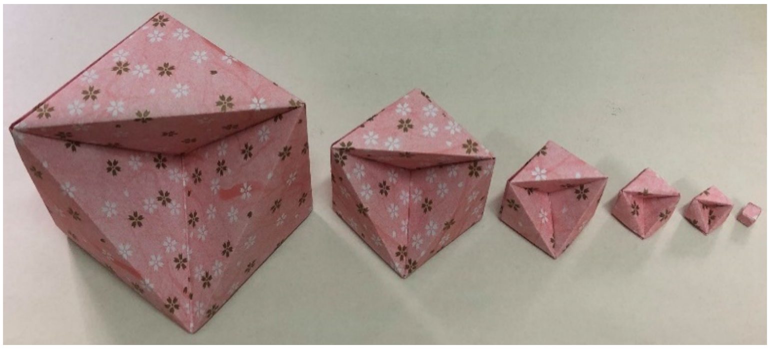
圖（十四）

四、費氏花

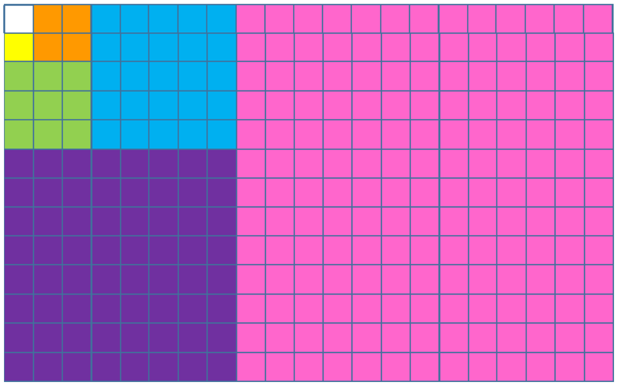
費氏花的零件即是圖(十四)的方塊。摺製方法與哥倫布方塊相似，這是在一次研習後的聚會，藝術家吳寬瀛老師分享給我們的想法。吳老師以他從事藝術創作的豐富經驗，指導我們用費氏數列的比例做為正方形紙張的邊長，製作大小不同的缺角方塊，組合後會形成一朵美麗的花。當場多位摺紙高手,立刻以摺紙的方式操作,果真是數學與藝術結合的美麗花朵，因此我們將此花稱為費氏花 ，如圖(十五) 。

五、費氏花零件摺法與組合

1. 本作品使用的紙張邊長分別為 1cm,2cm,3cm,5cm,8cm,13cm 各 6 張，其大小成費氏數列，裁切方式如圖(十六)。
2. 零件甲:將哥倫布方塊零件甲的摺法調整成如圖(十七)，紅色虛線為不同之處。

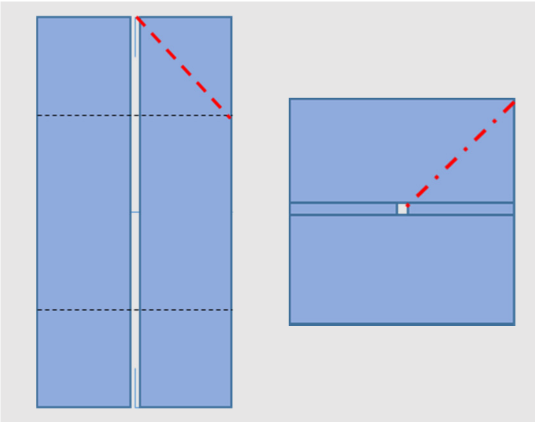


圖（十五）

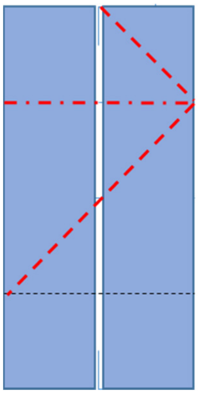


圖（十六）

3. 零件乙：將哥倫布方塊零件乙的摺法調整成如圖(十八)，紅色虛線為不同之處。



圖（十七）



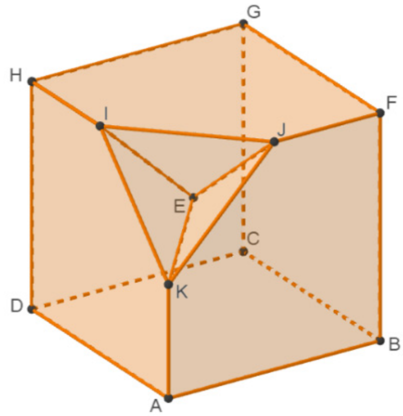
圖（十八）

4. 以三張甲零件作成凹陷面，再以三張乙零件組成立方體形狀，形成圖(十五)的形狀即為一個缺角方塊。
5. 大小不同的缺角方塊，共六層依序堆疊而成，則可完成費氏花。

六、相關數學性質討論

1. 關於哥倫布方塊的體積：

哥倫布方塊的體積(如圖十九)為整個正立方體體積扣掉 2 個三角錐 I-EKJ 的體積，三角錐 I-EKJ 互相垂直的三邊長 EI、EJ、EK 都是正立方體邊長的一半，所以體積是三角錐 G-CDB 的 $\frac{1}{8}$，而三角錐 G-CDB 體積為正立方體的 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ 倍，因此凹一個角等於體積減少 $2\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{6}=1/24$ 倍，所以哥倫布體積為原正立方體體積的 $(1-2\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{6}=23/24)$倍



圖（十九）

2. 關於哥倫布塔的高度：

為了討論哥倫布塔的高度，先將圖(十九)的哥倫布方塊頂點座標化，設 $C(0,0,0)$，$D(a,0,0)$，$B(0,a,0)$，$G(0,0,a)$，則 I 點座標為 $(a,\frac{a}{2},a)$，J 點座標為 $(\frac{a}{2},a,a)$，K 點座標為

$(a,a,\frac{a}{2})$，E 點座標為 $(\frac{2a}{3},\frac{2a}{3},\frac{2a}{3})$，IJK 的平面方程式為 $x+y+z=\frac{5}{2}a$ 那麼一個哥倫布方塊最高點距離地面的高度為 C 點到平面 IJK 的距離 d，則

$$d(C,\text{平面IJK})=\frac{\left|0+0+0-\frac{5}{2}a\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{5\sqrt{3}}{6}a$$

，之後每增加一個哥倫布方塊，高度就增加線段 CE 的長(即 $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$)，所以 n 個哥倫布方塊堆疊出的哥倫布塔最高點距離地面的高度為

$$\frac{5\sqrt{3}}{6}a+(n-1)\frac{2\sqrt{3}}{3}a=[\frac{5}{6}+\frac{2}{3}(n-1)]\sqrt{3}a$$

。實際指導學生操作時使用邊長 15cm 的色紙摺成哥倫布立方體的邊長為 $\frac{15}{2}$cm，堆疊最高紀錄為 12 個方塊，大約是 106cm 左右，確實很壯觀且有挑戰性。

3. 關於哥倫布環的接合角度：

哥倫布環的作法是把第二個哥倫布方塊的 D 點平移到第一個哥倫布方塊的 E 點，並將第二個哥倫布方塊的 ADHI 面與第一個哥倫布方塊的 IEK 面貼齊，所以這兩個方塊相鄰兩面的夾角與第一個哥倫布方塊 ADHI 面與 IEK 面夾角一樣，ADHI 面法向量為 $\overrightarrow{CD}$，IEK 面法向量為 $\overrightarrow{EJ}$，假設夾角為 θ，則

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EJ}}{\left|\overrightarrow{CD}\right|\left|\overrightarrow{EJ}\right|}=\frac{(a,0,0)\cdot(-\frac{a}{6},\frac{a}{3},\frac{a}{3})}{a\times(\frac{a}{2})}=-\frac{1}{3}$$

則 θ 約為 109 度。而正五邊形的每個內角 108 度，所以使用五個哥倫布方塊連結的環，看似正五邊形，其實並非是正五邊形的結構。

本文討論主要針對哥倫布方塊的結構，至於費氏花的相關結構，就有待讀者們自行探索。此外在大腦喜歡這樣學這本書裡曾經提到有些學生空間能力薄弱，原因是童年時期欠缺有助於發展空間能力的經驗，兒童如果花很多時間拆解東西然後再重組回去，通常能發展出較強的空間能力，而且空間能力是成年以後仍可以鍛鍊出來的。所以藉由隨手可得的紙張，讓學生在摺製、組裝作品中，對於空間感的訓練及空間座標系概念的建立更為自然。最後是不是心動了呢?讓我們一起動動手製作這充滿數學之美的作品吧!

(本文產出特別感謝吳寬瀛老師的指導，以及李政憲老師、王儷娟老師、吳淑惠老師、洪明譽老師和陳哲成老師給予意見並協助校正編輯。)

【註一】Columbus Cubes：參考網址 http://www.origamiheaven.com/pdfs/columbus.pdf

【註二】藝數摺學 FB 社團：https://www.facebook.com/groups/108923286120994/

【註三】Egg of Columbus：參考網址 https://en.wikipedia.org/wiki/Egg_of_Columbus