中學生通訊解題第 129-131 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
12901

(1) 能否將 $1, 2, 3, \cdots, 59$ 等 59 個正整數排成一排，使得任兩相鄰數字之和是質數？若可以的話，請舉出一例；若不可以的話，請說明理由。

(2) 能否將 $1, 2, 3, \cdots, 59$ 等 59 個正整數排成一圈，使得任兩相鄰數字之和是質數？若可以的話，請舉出一例；若不可以的話，請說明理由。

簡答：(1) 可以　(2) 不可以

【詳解】

(1) 依據題意，要使得任兩相鄰數字之和是質數，則這些和只能是奇數，因此，數字只能一奇一偶排列。
先將奇數依序排成一列成 1, 3, 5,…, 59，然後再將偶數反序插入其中，得 1, 58, 3, 56, 5, 54, …, 6, 55, 4, 57, 2, 59，這樣任兩相鄰數字之和都是 59 或 61 為質數，滿足題目要求。

(2) 依據題意，要使得任兩相鄰數字之和是質數，則這些和都是奇數，故圓圈上任兩相鄰數字必為一奇一偶，但現在有 30 個奇數， 29 個偶數，故不能做到。

【解題評析】

本題利用奇數、偶數的概念，說明是否可行，同學都討論的很詳細，值得鼓勵。

問題編號
12902

現有五個不相同的數字 $a<b<c<d<e$，兩兩相加得到 10 個數字（可能有相同的數字）。若此 10 個數字中，最小的兩個數字為 20 及 200，最大的兩個數字為 2014 及 2000，則數字 a 的範圍為何？

簡答：$-793<a<10$

【詳解】

因 $a<b<c<d<e$，所以最小的兩個數字為 $a+b=20$, $a+c=200$；
最大的兩個數字為
$d+e=2014$, $c+e=2000$
所以 $b=20-a$, $c=200-a$，
$e=2000-c=2000-(200-a)=1800+a$，
$d=2014-e=2014-(1800+a)=214-a$

因

$a < 20 - a < 200 - a < 214 - a < 1800 + a$

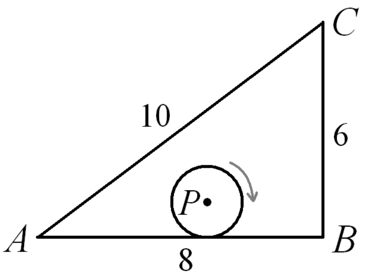
$\Rightarrow\ -793 < a < 10$

【解題評析】

本題為不等式的題型，在尋找上下界時，需盡量考慮所有的條件，以達到最精確的估計。

問題編號
12903

$\triangle ABC$ 的邊長分別為 6, 8, 10，現在有一圓心為 P、半徑為 1 的圓沿著 $\triangle ABC$ 的內部滾動，且滾動時至少與三角形的一邊相切，則當 P 繞了一周回到原出發點後，P 點走過的距離為何？



簡答：12

【詳解】

如圖，$\triangle A'B'C'$ 的周長為 P 的軌跡，延長 $\overline{C'A'}$ 到點 E，使得 $\overline{AE} \perp \overline{EA'}$，且令 $\overline{EA'}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 D，令 F 為 $\overline{AB}$ 上一點，使得 $\overline{A'F} \perp \overline{AB}$，又

$\angle ADE = \angle A'DF = \angle CAB$

$\therefore\ \triangle AED \sim \triangle A'FD \sim \triangle CBA$

$\because\ \overline{AE} = \overline{A'F} = 1$

$\Rightarrow\ \overline{AF} = \overline{AD} + \overline{DF} = \dfrac{10}{6} + \dfrac{8}{6} = 3$

$\therefore\ \overline{A'B'} = \overline{AB} - \overline{AF} - 1 = 8 - 3 - 1 = 4 = \dfrac{\overline{AB}}{2}$

$\therefore\ \triangle A'B'C'$ 的周長為 $\triangle ABC$ 的一半

$\therefore$ 所求 $= \dfrac{8+6+10}{2} = 12$

【解題評析】

本題屬於簡易幾何的計算題，原題利用相似形性質得 $\Delta A'B'C'$ 的周長為 ΔABC 的一半。

問題編號
12904

有 N 個石頭，甲乙丙三人輪流從中取走 1, 2 或 3 個，拿最後一個的輸。

試就 N 之值討論是否有甲丙聯手迫使乙輸的策略。

(1) $N = 2, 3, 4, 5, 6, 7$

(2) $N = 15$

(3) 那些 N 可以？

【詳解】

(1) $2=1+1,\ 3=2+1,\ 4=3+1$

5, 6 不論甲如何拿，乙都可以使之剩 1 或 2 個，則丙或甲輸。

7：甲拿 1 個，再來不管乙拿多少，都有足夠的量可以到甲第二輪拿完時，只剩 1 顆，

所以 2, 3 ,4, 7 甲丙都可以有聯手贏的策略，但 5, 6 不行。

(2) 下面的加法代表甲乙丙依序取走的數量：

15=1+1+(1+1)+(1+2+2 or 2+2+1 *or* 3+1+1)+(1+2+2 *or* 2+2+1 *or* 3+1+1)+1

15=1+2+(3+3)+(1+2+2 *or* 2+2+1 *or* 3+1+1)+1

15=1+3+(2+3)+(1+2+2 *or* 2+2+1 *or* 3+1+1)+1

(3) 若 $N>6$，第一次甲先拿 1，再來不論乙拿多少，丙甲拿完的殘局都控制為 $5k+1$，最後就一定贏。而第一次乙拿完至少剩 3 顆，可能是 $5k+3$，$5k+4$，$5k+5$，$5k+6$，$5k+7$，丙甲只要依序拿 $1+1$，$1+2$，$2+2$，$3+2$，$3+3$ 即可，所以甲丙都可以有聯手贏的策略。

故除了 $N=1, 5, 6$，其它的正整數甲丙都可以有聯手贏的策略。

【解題評析】

這樣的題目是一種存在性的問題，想找出策略達成必勝，解決這樣的問題有兩個重點，一個是找出一種可能（即存在），注意只須要一種，另一個是要視對方是絕頂聰明的人，對於對方任何的手法，都可以有因應的策略。大部分的同學都有觸及存在性，但在因應策略的說明上，就比較不嚴謹，希望各位同學有機會的話，可以找相關的問題練習，試著用自己的語言完整的表達清楚，也可以從中找到樂趣。

問題編號 12905

已知 x,y,z 皆為實數，求方程式 $4xyz=x^4+y^4+z^4+1$ 的解。

簡答：

$(x,y,z)=(1,1,1)$，$(-1,-1,1)$，$(1,-1,-1)$，$(-1,1,-1)$

【詳解 1】

$$4xyz=x^4+y^4+z^4+1$$

$$\Rightarrow (x^4-2x^2y^2+y^4)+2x^2y^2+z^2+1-4xyz=0$$

$$\Rightarrow (x^2-y^2)^2+(z^4-2z^2+1)$$
$$+2z^2+2x^2y^2-4xyz=0$$

$$\Rightarrow (x^2-y^2)^2+(z^2-1)^2+2(z-xy)^2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=0 \\ z^2-1=0 \\ z-xy=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)$$

$$\Rightarrow (1,1,1),(-1,-1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1)$$

【詳解 2】

由算幾不等式

$$\frac{x^4+y^4+z^4+1}{4} \geq \sqrt[4]{x^4 \cdot y^4 \cdot z^4 \cdot 1}$$

$\Rightarrow\ xyz \geq |xyz|$

又 $xyz \leq |xyz| \ \Rightarrow\ xyz = |xyz|$

$\Rightarrow\ xyz \geq 0$

而算幾不等式的等號成立於

$x^4 = y^4 = z^4 = 1$時，

可推得

(x, y, z)

$\Rightarrow (1,1,1),(-1,-1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1)$

【解題評析】

此題屬於代數問題，可能一般同學比較少處理到四次方的方程式，所以參與答題的同學並不太多；不過這些同學仍然能夠仔細地寫清楚討論過程，甚至把討論過程鉅細靡遺地用電腦打字，相當不錯！

此題可以單純使用配方法來做，沈執中同學就是以此方法，獲得 7 分的滿分；也可以使用算幾不等式來做，盧彥丞、江子新同學就是以此方法，不過可惜兩位都忽略了「$\sqrt[4]{x^4y^4z^4} = |xyz|$」，雖然忘了寫絕對值，但是討論過程詳細，答案也正確，瑕不掩瑜，也獲得 7 分；另外吳尚昱同學另闢蹊徑，討論函數 $f(x,y,z) = 4xyz - x^4 - y^4 - z^4 - 1$ 的值，相當有創意，也獲得 7 分；此外林芷葳同學雖然有寫出正確答案，可惜過程不夠嚴謹，獲得 5 分。

問題編號
13001

有若干個自然數，它們的平均數為 21。若只去掉一個最大的自然數，則它們的平均數降為 20；若只去掉一個最小的自然數，則它們的平均數升為 22。試問：

(1) 這些自然數最多有多少個？

(2) 承(1)，這時最大的自然數為何？

簡答：(1) 21　(2) 41

【詳解】

不妨設這些自然數為 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots\cdots \leq x_n$，

則 $\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n = 21n \\ x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_{n-1} = 20(n-1) \\ x_2 + x_3 + \cdots\cdots + x_n = 22(n-1) \end{cases}$，

得 $x_1 = 21n - 22(n-1) = 22 - n$，

所以 $n = 22 - x_1 \leq 22 - 1 = 21$。

且 $x_n = 21n - 20(n-1) = n + 20$，

所以 $x_n = n + 20 \leq 21 + 20 = 41$。

故這些自然數最多有 21 個，這時最大的自然數是 41。

【解題評析】

本題利用數論的方法討論數的範圍，同學符號使用都很恰當，討論方法都很詳細，值得鼓勵。

問題編號

13002

若對於所有 $i=1,2,3,\ldots,n$, $a_i=1$ 或 -1，請找出所有具有 n 個實數根的多項方程式 $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x^1+a_n=0$。

簡答：略。

【詳解】

假設

$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x^1+a_n=0$

的 n 個實數根為 $x_1,x_2,\ldots,x_n$，

由根與係數的關係可知

$x_1{}^2+x_2{}^2+\ldots+x_n{}^2=(-a_1)^2-2a_2$

以及 $x_1x_2\ldots x_n=1$ 或 -1，

由算幾不等式得：

$$\frac{(-a_1)^2-2a_2}{n}=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2}{n}$$

$\geq\sqrt[n]{x_1^2+x_2^2\ldots x_n^2}=1$，

故 $(-a_1)^2-2a_2\geq n$。當 $a_2=-1$ 時，$n\leq 1+2=3$，以下分別就 $n=1,2,3$ 討論：

(a) $n=1$ 時

多項方程式為 $x+1=0$ 或 $x-1=0$

(b) $n=2$ 時

考慮判別式須大於或等於 0，

故多項方程式為 $x^2+x-1=0$ 或 $x^2-x-1=0$

(c) $n=3$ 時

由於 $a_2=-1$，所以

$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-1$ ⋯⋯ (1)

此時算幾不等式等號成立：

$x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2=3$，

故 $x_1{}^2=x_2{}^2=x_3{}^2=1$ ⋯⋯ (2)

由(1)(2)可知三實根只有 $1,1,-1$ 或 $-1,-1,1$ 兩種可能

得多項方程式為

$(x+1)(x^2-1)=x^3+x^2-x-1=0$

或 $(x-1)(x^2-1)=x^3-x^2-x+1=0$

綜合以上(a)(b)(c)可知共有 $x+1=0$, $x-1=0$, $x^2+x-1=0$, $x^2-x-1=0$, $x^3+x^2-x-1=0$, $x^3-x^2-x+1=0$ 六組解。

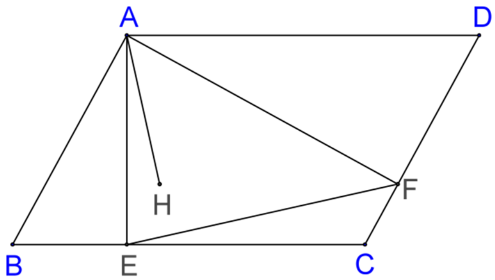
【解題評析】

本題需利用「根與係數」、「算幾不等式」的觀念，因此對國中生來說可能較為困難，故本題僅有一位同學作答，可惜一開始在使用「牛頓一次因式檢查法」時，並未考慮到可能有無理根的狀況，直接假設所有實根皆為 1 或-1，最後僅解 $x+1=0$, $x-1=0$ 兩組解而已，這可能是因為對定理了解不夠透徹所致，不過國中生能運用定理並作出推論實屬難能可貴，非常值得嘉許！

問題編號
13003

在平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AE}\perp\overline{BC}$，$\overline{AF}\perp\overline{CD}$，點 H 為 $\triangle AEF$ 的垂心，

證明：$\overline{AC}^2=\overline{AH}^2+\overline{EF}^2$



【證明】

【方法一】

作 $\overline{EH}$，$\overline{HF}$。

因為 $\overline{EH}\perp\overline{AF}$，$\overline{AF}\perp\overline{CD}$，

所以 $\overline{EH}//\overline{CD}$；同理，$\overline{HF}//\overline{BC}$。

則四邊形 $ECFH$ 為平行四邊形。

將 $\triangle AEH$ 沿 $\overline{HF}$ 平移得 $\triangle A'CF$，

則點 A' 在 $\overline{AD}$ 上，

因此 $\overline{AH}=\overline{A'F}$，$\overline{AH}//\overline{A'F}$，

又 $\overline{AH}\perp\overline{EF}$，

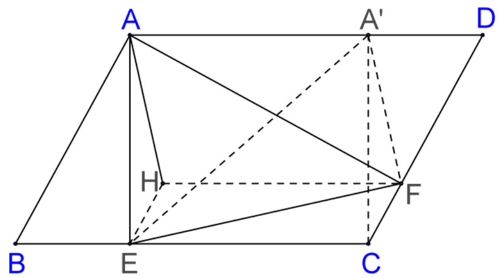
則 $\triangle A'FE$ 為直角三角形，

且 $\overline{A'E}^2=\overline{A'F}^2+\overline{EF}^2$，

又 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$，則四邊形 $AECA'$ 為矩形，

因此，$\overline{AC}=\overline{EA'}$，

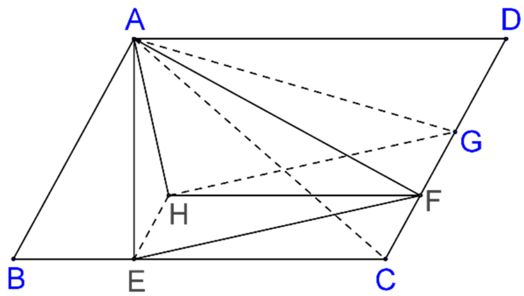
故 $\overline{AC}^2=\overline{AH}^2+\overline{EF}^2$。



【方法二】

(1) 在 $\overline{FD}$ 上作 G 點使得 $\overline{FC}=\overline{FG}$，
連 $\overline{AG}$、$\overline{HG}$，因為 $\overline{HF}\perp\overline{AE}$，$\overline{CE}\perp\overline{AE}$，所以 $\overline{HF}//\overline{CE}$；
同理，$\overline{HE}//\overline{CF}$。
則四邊形 $ECFH$ 為平行四邊形，
得 $\overline{GF}=\overline{FC}=\overline{HE}$，
因此四邊形 $HEFG$ 為平行四邊形，
故 $\overline{HG}=\overline{EF}$。

(2) 因為 $\overline{AF}\perp\overline{CD}$，$\overline{FC}=\overline{FG}$，
所以 $\overline{AC}=\overline{AG}$。
又 $\overline{AH}\perp\overline{EF}$，$\overline{EF}//\overline{HG}$，
得 $\overline{AH}\perp\overline{HG}$，
因此 $\overline{AG}^2=\overline{AH}^2+\overline{HG}^2$，
故 $\overline{AC}^2=\overline{AH}^2+\overline{EF}^2$。



【解題評析】

1. 幾何問題，常用平移變換將相關的線段平移為三角形的三邊，然後再說明此三角形所具有的性質，以完成證明，這一題就是利用平移的題目。
2. 平移變換為保距變換，也是保角變換。
3. 利用的數學性質為：
   直角三角形的充要條件為滿足畢氏定理。

問題編號
13004

將 13×13 枚硬幣按正方形擺放，起初，所有硬幣都是正面朝上的，每一次翻轉五枚相鄰的（水平或垂直或對角）硬幣。如此經過有限多次翻轉後，所有的硬幣是否可能都是背面朝上？

簡答：不可能

【詳解】如下標記每枚硬幣：則

(1) 每一次翻轉的五枚硬幣分別標記為 A,B,C,D,E；
(2) 同時，對於每個標記 A,B,C,D 有 34 枚硬幣，而標記 E 有 33 枚硬幣；
(3) 若最後所有的硬幣是背面朝上的，則每枚硬幣必進行了奇數次翻轉。

從(2)和(3)知，標記 A 的硬幣共被翻轉偶數次，而標記 E 的硬幣共被翻轉奇數次。所以，翻轉標記 A 的硬幣的次數不同於翻轉標記 E 的硬幣的次數。此與(1)矛盾，因此知是不可能的。

【解題評析】

本題一位新北市國中同學以表格清楚說明，利用奇數、偶數的概念，說明是否可行，討論的很詳細，值得鼓勵。

A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C
D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A
B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D
E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B
C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C
D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A
B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D
E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B
C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C
D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A
B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D

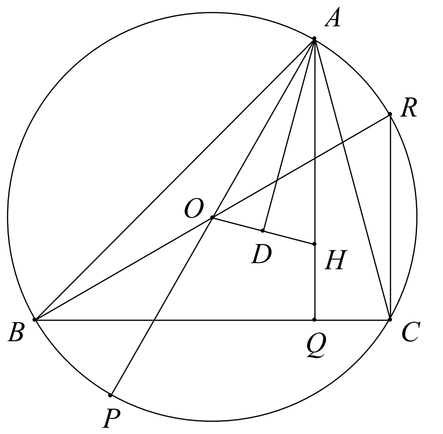
問題編號
13005

已知 O, H 分別是銳角 $\triangle ABC$ 的外心、垂心，$\angle BAC$ 的內角平分線與直線 OH 互相垂直，求 $\angle BAC$ 是幾度？

簡答：60°

【詳解】

設 $\angle BAC$ 的內角平分線與直線 OH 相交於 D 點，直線 AO 與 $\triangle ABC$ 外接圓相交於 P 點，直線 BO 與 $\triangle ABC$ 外接圓相交於 R 點，直線 AH 與直線 BC 相交於 Q 點。



由 $\angle APB = \angle ACQ$,

$\angle ABP = \angle AQC = 90^\circ$

知 $\angle BAP = \angle QAC$ ，

所以 $\angle DAO = \angle DAH$ ，

得 $\triangle OAD \cong \triangle HAD$ (ASA)，

所以 $\overline{AO} = \overline{AH}$ 。

又 $\overline{AR} // \overline{CH}$ 且 $\overline{CR} // \overline{AH}$，所以四邊形 $ARCH$ 是平行四邊形，所以 $\overline{AH} = \overline{CR}$ 。

在 $\triangle BRC$ 中，

$\angle RCB = 90^\circ$, $\overline{BR} = 2\overline{BO} = 2\overline{AO} = 2\overline{CR}$，

所以 $\angle BRC = 60^\circ$，得 $\angle A = 60^\circ$ 。

【解題評析】

本題是屬於難度較高的幾何問題，其主要在於需要作出三角形的外接圓與多條輔助線才能得到正確答案。

問題編號
13101

依序將正整數 1, 2, 3, 4, … 的平方數排成一列：149162536496481100121…，排在第一個位置的數字是 1，排在第七個位置的數字是 5，排在第十個位置的數字是 4，則排在第 2016 個位置的數字是多少？

簡答：7

【詳解】

平方數為 1 位數的有 3 個、

平方數為 2 位數的有 6 個、

平方數為 3 位數的有 22 個、

平方數為 4 位數的有 68 個、

平方數為 5 位數的有 217 個、

平方數為 6 位數的有 683 個。

$1\times3+2\times6+3\times22+4\times68+5\times217=1438$

，$2016-1438=578$，$578\div6=96\cdots2$，

故所求為第 97 個 6 位數的第二個數字，

$3+6+22+68+217+97=413,$

$413^2=170569$，故所求為 7。

【解題評析】

本題屬於較容易的數論題，只要能做有效率的分類加上細心的計算，大多數同學都能算出最後答案，但部分同學們的計算有失嚴謹，被扣了一些分數實屬可惜。希望同學們以後不論遇到什麼樣的題目，都要抱著耐心謹慎的態度。才不會走了冤枉路又沒算對。

問題編號 13102

有一遞增的等差級數，以 S_n 表示其中前 n 項之和，若 $S_{123}=S_{321}$，問：此等差級數裡共有幾項為負數？

簡答：0 或 222

【詳解】

設等差級數 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 遞增，公差為 d，則 $d\geq 0$。

由 $S_{123}=S_{321}$，

得 $123\cdot(\dfrac{2a_1+122d}{2})=321\cdot(\dfrac{2a_1+320d}{2})$

$\Rightarrow\ d=\dfrac{-2}{443}a_1$。

(1) $d=0$ 時，$a_1=0$，此一情況下，

等差級數 $a_1+a_2+\ldots+a_n$ 每一項皆為 0，其中沒有負數項。

(2) $d>0$ 時，$a_1<0$，此一情況下，

設 $a_p<0$，p 是正整數，則因

$a_p=a_1+(p-1)d$，

得 $a_1+(p-1)(\dfrac{-2}{443}a_1)<0$，

而知 $443-2(p-1)>0$

$\Rightarrow\ p<\dfrac{443}{2}+1$，得 $p=1, 2, 3, \ldots,$ 222，

故此等差級數 $a_1+a_2+\ldots+a_n$ 裡共有 222 項為負數。

【另解】

等差級數 $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$，

若 $S_{123}=S_{321}$，則 $S_{321}-S_{123}=0$

$\Rightarrow\ a_{124}+a_{125}+\cdots+a_{321}=0$，

$\Rightarrow\ a_{124}+a_{321}=a_{125}+a_{320}=\ldots$

$=a_{222}+a_{223}=0$，

又，此等差級數遞增，設其公差為 d，

則 $d\geq 0$，

(1) $d=0$ 時，等差級數 $a_1+a_2+\ldots+a_n$ 每一項皆為 0，其中沒有負數項。

(2) $d>0$ 時，由 $a_{222}+a_{223}=0$，可知 $a_{222}<0$ 且 $a_{223}>0$，

故 $a_1, a_2, \ldots, a_{222}$ 皆為負數，而 $a_{223}, a_{224}, a_{225}, \cdots$ 皆為正數，

而知此等差級數 $a_1+a_2+\ldots+a_n$ 裡共有 222 項為負數。

【解題評析】

等差級數 $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$，其一般項 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 與首 n 項和 $S_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，應是同學所熟知的公式，本題相當簡易，引用此二公式即足以輕鬆解題，如以上【詳解】；當然，如果對於等差級數的性質有更深入的理解，也可以置公式於度外而靈活化解題過程，如【另解】。利用公式解題，當數據較大而計算不易時，有時採取符號操作來代替數值計算，可有減少計算量之功，譬如以上【詳解】，可改寫如下：

等差級數 $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$，若 $S_p = S_q$，p, q 是相異正整數，$p+q$ 是偶數，則

$$\frac{p[2a_1+(p-1)d]}{2} = \frac{q[2a_1+(q-1)d]}{2}$$

$$\Rightarrow 2a_1 p + (p^2-p)d = 2a_1 q + (q^2-q)d，$$

$$\Rightarrow 2a_1(p-q) = -[(p^2-q^2)-(p-q)]d，$$

$p-q \neq 0$

$$\Rightarrow 2a_1 = -(p+q-1)d$$

$$\Rightarrow a_{\frac{p+q}{2}} = a_1 + \left(\frac{p+q}{2}-1\right)d$$

$$= \frac{-(p+q-1)}{2}d + \left(\frac{p+q}{2}-1\right)d = -\frac{d}{2}，$$

因此，若 $d > 0$，

則 $a_{\frac{p+q}{2}} < 0$，$a_{\frac{p+q}{2}+1} = -\dfrac{d}{2} + d = \dfrac{d}{2} > 0$，

而知等差級數 $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ 嚴格遞增且 $S_{123} = S_{321}$ 時，

其中有 $\dfrac{123+321}{2} = 222$ 項為負數。

本題共有 11 位同學應徵答題，答題表現值得嘉許。題目設定所予之等差級數為遞增級數，而未設定此級數嚴格遞增，公差為 0 之等差級數同學大多未加考慮，雖然這只是微小的疏失，但是就題論題，在既有的定義之下，各項皆為 0 之等差級數也是題設條件下的一種可能情形，在答題過程中還是應該呈現為好。

問題編號 13103

$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB} = \overline{AC}$，已知 P 為 $\triangle ABC$ 的內部一點滿足 $\angle ABP = 30^\circ$ 且 $\angle PBC = 2\angle PCB$，

證明 $\angle CAP = 3\angle BAP$。

【證明】：

作點 P 對 $\overline{AB}$ 的對稱點 Q，得 ΔBPQ 為正三角形，作點 P 對 $\overline{BC}$ 之中垂線的對稱點 R，得 $\triangle BAP \cong \triangle CAR$ 且 $\overline{PR} // \overline{BC}$，所以四邊形 $PRCB$ 為等腰梯形，

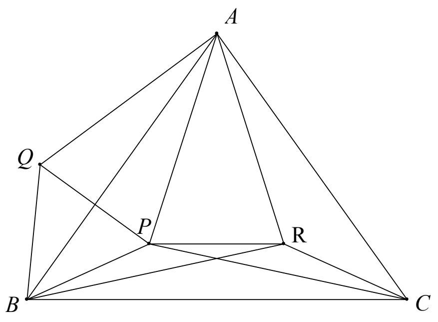
得 $\angle RBC = \angle PRB = \angle PCB = \dfrac{1}{2}\angle PBC$，

所以 $\overline{PR} = \overline{PB} = \overline{PQ}$，得 $\triangle APQ \cong \triangle APR$。

故 $\angle CAP = \angle CAR + \angle RAP$

$= \angle BAP + \angle PAQ$

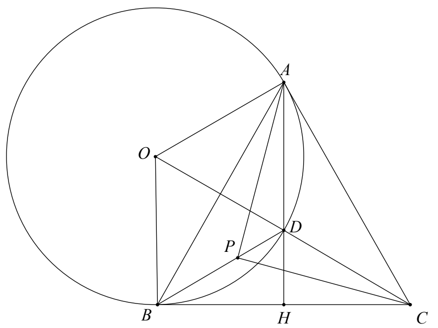
$= \angle BAP + 2\angle BAP = 3\angle BAP$。



【證明 2】:

設 $\angle PCB=\theta$，則 $\angle PBC=2\theta$，
過點 A 作 $\overline{BC}$ 的垂線交 $\overline{BC}$ 於 H，
得 $\angle CAH=\angle BAH=60^{\circ}-2\theta$，
延長 $\overline{BP}$ 交 $\overline{AH}$ 於 D，得 $\angle DCP=\theta$，
作 $\triangle ABD$ 外接圓圓心 O，
得 $\angle AOD=2\angle ABD=60^{\circ}$，
所以 $\triangle AOD$ 為正三角形，
得 $\angle OAB=\angle OBA=2\theta$ 且 $\overline{AO}=\overline{AD}$，
所以 $\triangle AOB\sim\triangle CDB$，
得 $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AB}:\overline{AO}=\overline{CB}:\overline{CD}$，
又 $\overline{CP}$ 為 $\angle DCB$ 的角平分線，所以 $\overline{CB}:\overline{CD}=\overline{BP}:\overline{DP}$，
得 $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{BP}:\overline{DP}$，所以 $\overline{AP}$ 為 $\angle BAD$ 的角平分線，
所以

$\angle CAP=\angle CAD+\angle DAP$
$=2\angle BAP+\angle BAP=3\angle BAP$。



【解題評析】

本題給定 $\angle ABP=30^{\circ}$，可作對稱或外接圓得出正三角形，再運用全等或相似的性質來證明。最後提醒一下，在證明的過程中，必須將已知的條件和要證的部份弄清楚，不可以倒因為果。

問題編號 13104

從 1 到 200 的自然數中，任意取出 29 個相異的數，證明：在這 29 個數中一定存在四個數，其中有兩個數的和等於另外兩個數的和。

【證明】:

在 1 到 200 的自然數中，任二個數的和只能是 3, 4, 5, ..., 399，共 397 種可能，在任取 29 個自然數中，其中任意兩個數的和至多有種可能，而，由鴿籠原理知這 406 種可能的和至少有兩組相同，所以一定存在四個數，其中有兩個數的和等於另外兩個數的和。

【解題評析】

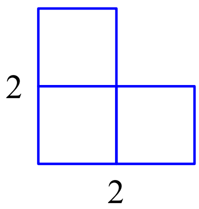
此題屬於鴿籠原理（或稱抽屜原理）問題，雖然沒有列入中學教材內，可能一般同學比較少接觸；不過參與答題的同學大多能掌握此原理的內在精髓，甚至有些同學還把題目作延伸推廣，考慮更多種情

形，相當不錯！當初設立通訊解題的用意，除了讓同學接觸一些較有深度、廣度的題目外，更重要的是啟發同學們對於科學研究的探索精神。

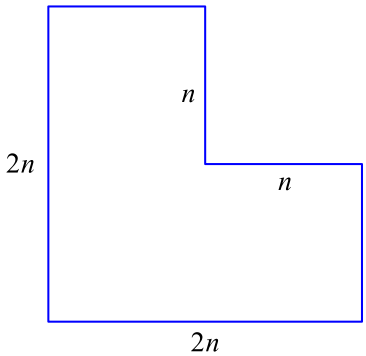
此題多數參與作答的同學都有把關鍵「1 到 200 的自然數中任兩數的和共有 397 種可能，但任取 29 個數的和至多有 406 種」寫出。

問題編號
13105

如圖，R_1 表示 $2\times2-1\times1$ 的磁磚，R_n 表示 $2n\times2n-n\times n$ 的地板，其中 n 為正整數



(R_1)



(R_n)

(1) 試說明 $2\times3n$ 的地板，都可以用 R_1 不重疊鋪滿（n 為正整數）。

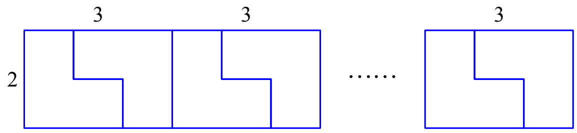
(2) 試用 R_1 不重疊鋪滿 R_2 , R_3 及 R_4 。

(3) 試用 R_1 不重疊鋪滿 R_5 , R_6 及 R_7（可考慮從(2)出發）。

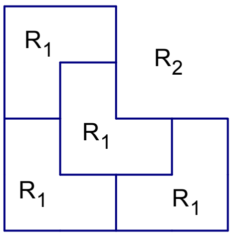
(4) 試說明不論 n 為任何正整數，都可以用 R_1 不重疊鋪滿 R_n 。

【詳解 1】

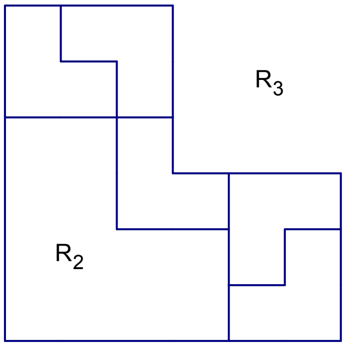
(1)



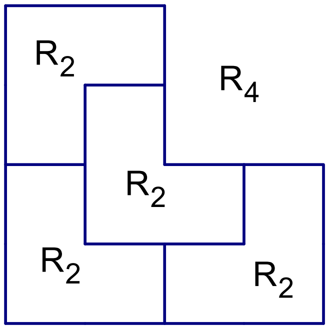
(2)



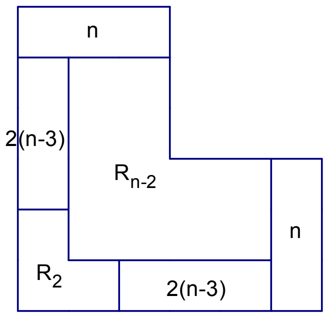
(3)

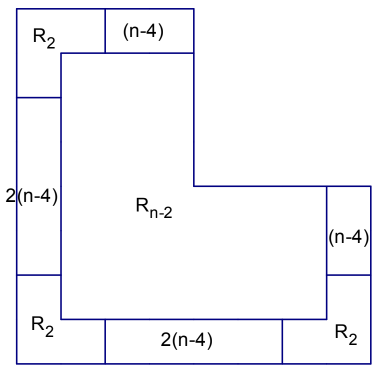


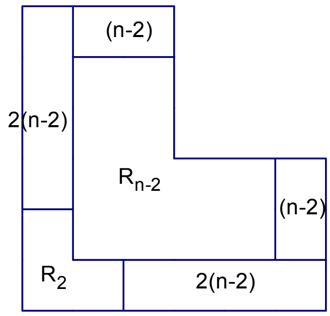
(4)



已知 $2\times 3k$ 及 R_2 可完成，
再由下圖，就 $n=3k,\ 3k+1,\ 3k+2$ 討論，
可知只要 R_{n-2} 可完成，則 R_n 可完成。
因此，由 R_2 及 R_3 可完成，可推得 R_4 及 R_5 可完成，可再推得 R_6 及 R_7 可完成，
以此類推，則不論 n 為任何正整數，都可以完成用 R_1 不重疊鋪滿 R_n。
下圖中，n，n-2，n-4 分別表示 2n，2(n-2)，2(n-4)







【解題評析】

這樣的題目主要是透過歸納的手法解決問題，處理這種問題的重點有兩個，一個是透過數字小時的操作，找尋脈絡，另一個是利用找到的脈略，再進一步找到解決數字大的策略及解決一般性的問題。這個題目的解決方法並不唯一，台北市麗山國中的江子新同學及新北市貢寮國中的吳尚昱同學的方法都很有創意，值得嘉許。大部分的同學在數字小時的操作都很有自己的想法，每個人的作法都不盡相同，但在因應到一般性的數字時，大部分的同學就比較無法嚴謹的思考清楚或表達清楚，希望各位同學可以從這個題目學會由歸納的方法解決問題，以後看到類似的問題，也可以自己用歸納法解決，並找相關的問題練習，試著用自己的語言完整的表達清楚。