一般形平面凸六邊形類托勒密定理狹義方程式(上)

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

壹、前言

托勒密定理(Ptolemy's theorem)嚴謹地表達出任一個平面凸四邊形兩組對邊長度乘積之和不小於兩條對角線長度的乘積，而名聞遐邇的狹義托勒密定理敘述為：若且唯若圓內接四邊形兩組相對邊長乘積的和等於兩條對角線長的乘積。現在來解釋托勒密定理的內涵型態結構，以下是推理演繹證明的基礎觀念流程；

首先來證明：圓內接四邊形頂角的合分角正弦函數值關係方程式；展示此證明時直接由圓內接四邊形圖形藉著輔助線幾何圖形作圖法出發，先試作出適宜的輔助線來連繫相關的幾何形量，以增益多方思考路線，襄助快速解題並詳實解說由這些新輔助線建構完成圖形所具體呈現的幾何意義；見圖 1.，半徑為 R 的圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，令其邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_1}=V_4$，對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$，今設定選取頂角 $A_1=\theta_3+\theta_2$，θ_3是弧長 A_3A_4的圓周角，θ_2是弧長 A_2A_3的圓周角，規定頂角 A_1是合角，而 θ_3與 θ_2則是頂角 A_1的分角。

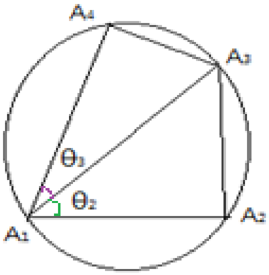

圖 1

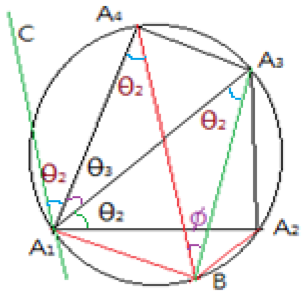

圖 2.

[A] 作幾何輔助線圖：

(a) 請看圖 2. 通過頂點 A_2 作一直線平行對角線長 $\overline{A_1A_3}$ 且與圓周交於 B 點，

(b) 連接線段 $\overline{A_1B}$、$\overline{BA_4}$、$\overline{BA_3}$，得一新構的四邊形 $A_1BA_2A_3$，檢視這圖形的幾何意義，得知其恰為一個等腰梯形，因此又得 $\overline{A_1B}=\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_1A_2}=V_1=\overline{BA_3}$，

(c) 見圖 2.，再通過頂點 A_1 作一直線 $\overleftrightarrow{A_1C}$ 平行線段 $\overline{BA_4}$ 。再參閱下圖 3.，

(d) 通過頂點 A_3 作一射線 $\overrightarrow{A_3D}$ 垂直於直線 $\overleftrightarrow{A_1C}$，使相交於垂直點 D，且 $\overrightarrow{A_3D}$ 又與 $\overline{BA_4}$ 垂直相交於 E 點。另通過頂點 A_4 作一射線 $\overrightarrow{A_4C}$ 垂直於直線 $\overleftrightarrow{A_1C}$，使相交於垂直點 C，所有相對應的圓周角皆標示在圖中的正確適當位置。作圖完成。

[B]. 圖 3. 輔助線圖形的正弦式幾何意義：

(a) 上圖 3.，就直角三角形 ΔA_1A_3D 言，斜邊長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$，得一股線段長 $\overline{A_3D}=\overline{A_1A_3}\sin(\theta_3+\theta_2)=d_{13}\sin(\theta_3+\theta_2)=d_{13}\sin A_1$ 。

(b) 就直角 ΔA_1A_4C 言，斜邊長 V_4，線段長 $\overline{CA_4}=V_4\sin\theta_2$ 。

(c) 就直角 ΔBA_3E 言，斜邊長 $\overline{BA_3}=V_1$，線段長 $\overline{EA_3}=V_1\sin\phi=V_1\sin\theta_3$ 。

(d) 線段長 $\overline{DA_3}=\overline{DE}+\overline{EA_3}$，由線段長 $\overline{CA_4}=\overline{DE}$，得 $\overline{DA_3}=\overline{CA_4}+\overline{EA_3}$ 。

將上述各線段長代入，得； $d_{13}\sin A_1=d_{13}\sin(\theta_3+\theta_2)=V_1\sin\theta_3+V_4\sin\theta_2$ (1)

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin A_1}{V_4V_1}=\frac{\sin(\theta_3+\theta_2)}{V_4V_1}=\frac{\sin\theta_3}{V_4d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1} \tag{2}$$

方程式(1)式、(2)式就是被證明出的圓內接四邊形頂角的合分角正弦值關係方程式！方程式(2)式對圖 1.而言，因頂角 $A_1=\theta_3+\theta_2$，兩相比較，等式型態類似；兩個圓周角 θ_3 與 θ_2 相加等於頂角 A_1，而分別由 $\sin\theta_3$ 與 $\sin\theta_2$ 組成的各自分式型式相加等於由頂角 $\sin A_1$ 組成的分式型式，可看出方程式(2)式也具有類似加法性等式型態。而(2)式的特別規律處是各項的分母皆為角度兩側的邊長乘積。

其次，繼續再由方程式(1)式 $\Rightarrow$ $2R\,d_{13}\sin A_1=2R\,V_1\sin\theta_3+2R\,V_4\sin\theta_2$

$$\Rightarrow \quad d_{13}d_{24}=V_1V_3+V_2V_4 \tag{3}$$

對角線長 $\overline{A_2A_4}=d_{24}=2R\sin A_1$，此方程式(3)式就是圓內接四邊形的托勒密定理兩對角線長度乘積等於兩組相對邊長乘積的和等式關係的狹義方程式。

又見圖 1-1.，一般形平面凸四邊形推廣的托勒密定理方程式內容敘述於下；

$$d_{13}d_{24}\le(V_1V_3+V_2V_4) \tag{4}$$

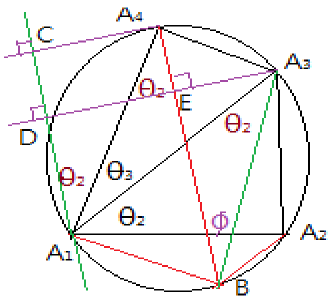

圖 3.

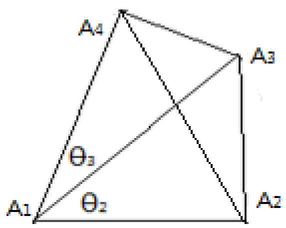

圖 1-1.

一般形平面凸六邊形類托勒密定理狹義方程式是要將平面凸六邊形的各邊長與對角線長編寫成類似方程式(3)式的狹義托勒密定理等式方程式，這種類似方程式無法與(3)式的簡潔、對稱、規律、唯一、精緻相比擬，主因其圖形結構完全沒有受制於圓的規範，沒有圓的完美加持。文章探討結果顯示著類托勒密定理狹義方程式的內涵中除了出現有純對角線長度乘積及對角線長度與幾個邊長相乘積的項數之外，還多出了若干個修正項的組合，使得整個類方程式增添了幾個頂角與分角相結合的自然會集、微妙精美、恰到好處特質，每一個修正項皆等於一純比例數值正實數用來修正原六邊形圖使形成新構的圓內接六邊形。而這一般形類似方程式的推演證明則必須預先藉助於圓內接四邊形頂角的合分角正弦值關係方程式性質的推廣始能成就！自圓內接四邊形延伸推廣到圓內接五邊形、圓內接六邊形直到圓內接七邊形，再將圓內接六邊形、七邊形頂角的合分角正弦值關係方程式應用到一般形平面凸六邊形、凸七邊形而論證得標題主文結果。

貳、本文

考慮一平面凸六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，見下圖 4.，令其邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_6}=V_5$，$\overline{A_6A_1}=V_6$，對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$，$\overline{A_1A_4}=d_{14}$，$\overline{A_1A_5}=d_{15}$，$\overline{A_2A_6}=d_{26}$，今設定選取頂角 $A_1=\theta_5+\theta_4+\theta_3+\theta_2$，頂角 A_1 是合角，而 θ_5、θ_4、θ_3 與 θ_2 則是頂角 A_1 的分角。 要說明的是；在以下內文的敘述推論驗證過程中，所有需使用到的六邊形邊長線段表示式均以此處明列者為準，且在列式推演證明時尤需要應用到下列 4 個數學基礎性質----引理；

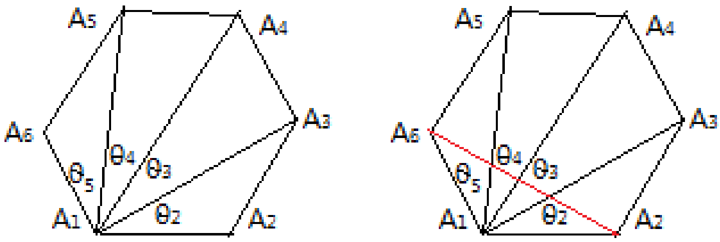

圖 4.

一、數學基本性質--引理；

引理 **1**. 三角函數角度的和差轉換公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

證明：略。

引理 2. 任給一個圓內四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ ，則此四邊形的頂角組合；

$$A_1 + A_3 = A_2 + A_4 = \pi$$ ，即對角必互為補角。

證明：略。

引理 3. 三角形正弦定理：請見下圖 5.，半徑 R 的圓內接三角形 $A_1A_2A_3$，令邊長線段 $\overline{A_1A_2} = V_1$， $\overline{A_2A_3} = V_2$ ， $\overline{A_3A_1} = V_3$，則精簡、對稱的正弦定理公式為：

$$\frac{V_1}{\sin A_3} = \frac{V_2}{\sin A_1} = \frac{V_3}{\sin A_2} = 2R \tag{5}$$

證明：略。

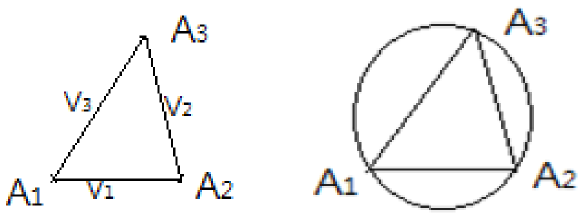

圖 5.

引理 4. 圓內接多邊形各圓周角的正弦定理： 圖 6.

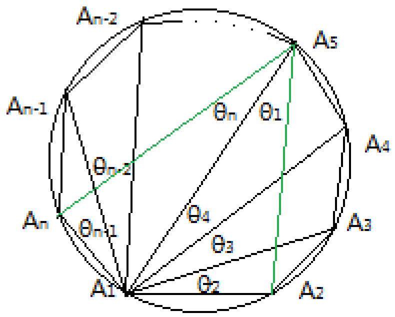

圖 6

給定半徑為 R 的圓內接 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$ ，令邊長線段 $\overline{A_1A_2} = V_1$，$\overline{A_2A_3} = V_2$ ，$\overline{A_3A_4} = V_3$，…，$\overline{A_{n-2}A_{n-1}} = V_{n-2}$ ，$\overline{A_{n-1}A_n} = V_{n-1}$ ，$\overline{A_nA_1} = V_n$ ，而邊長 V_1 所對應的圓周角為 θ_1，V_2 所對應的圓周角為 θ_2，V_3 所對應的圓周角為 θ_3，…，V_{n-2} 所對應的圓周角為 θ_{n-2}，V_{n-1} 所對應的圓周角為 θ_{n-1}，V_n 所對應的圓周角為 θ_n，則此多邊形各邊長所對應的圓周角的正弦定理方程式為下列 (L-2)式：

$$\frac{V_1}{\sin\theta_1}=\frac{V_2}{\sin\theta_2}=\frac{V_3}{\sin\theta_3}=\cdots=\frac{V_{n-2}}{\sin\theta_{n-2}}=\frac{V_{n-1}}{\sin\theta_{n-1}}=\frac{V_n}{\sin\theta_n}=2R \tag{6}$$

證明：由等弦對應等圓周角及直角三角形的正弦值關係即可證明(略)。

二、圓內接六邊形頂角的合分角正弦函數值關係方程式

參考圖 7.半徑 R 的圓內接六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ ，對圖 8.中的四邊形 $A_1A_2A_4A_6$ 言，應用方程式(2)式可得；$\dfrac{\sin A_1}{V_6V_1}=\dfrac{\sin(\theta_5+\theta_4+\theta_3+\theta_2)}{V_6V_1}=\dfrac{\sin(\theta_5+\theta_4)}{V_6d_{14}}+\dfrac{\sin(\theta_3+\theta_2)}{d_{14}V_1}$ ，又對圓內接四邊形 $A_1A_4A_5A_6$ 與 $A_1A_2A_3A_4$ 言，圖 9.與圖 10.，應用方程式(2)式可得 $\dfrac{\sin(\theta_5+\theta_4)}{V_6d_{14}}=\dfrac{\sin\theta_5}{V_6d_{15}}+\dfrac{\sin\theta_4}{d_{15}d_{14}}$ 與 $\dfrac{\sin(\theta_3+\theta_2)}{d_{14}V_1}=\dfrac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\dfrac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1}$ 代回上列運算式，即得下列完整的圓內接六邊形角度與對角線長、邊長線段關係方程式(7)式；

$$\frac{\sin A_1}{V_6V_1}=\frac{\sin(\theta_5+\theta_4+\theta_3+\theta_2)}{V_6V_1}=\frac{\sin\theta_5}{V_6d_{15}}+\frac{\sin\theta_4}{d_{15}d_{14}}+\frac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1} \tag{7}$$

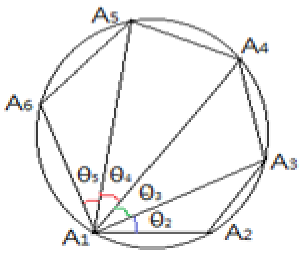

圖 7.

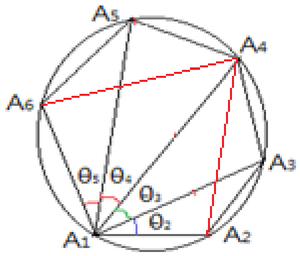

圖 8.

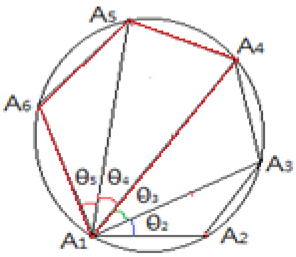

圖 9.

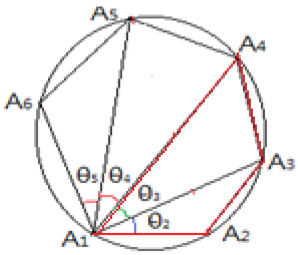

圖 10.

將方程式(7)式等號兩側的所有分式項同步乘以 $V_1V_6d_{13}d_{14}d_{15}$ 值，而得下式；

$$d_{13}d_{14}d_{15}\sin A_1=V_1d_{13}d_{14}\sin\theta_5+V_1V_6d_{13}\sin\theta_4+V_1V_6d_{15}\sin\theta_3+V_6d_{14}d_{15}\sin\theta_2 \tag{8}$$

方程式(7)式、(8)式稱為圓內接六邊形頂角的合分角正弦函數值關係方程式。

三、圓內接六邊形類托勒密定理狹義方程式

方程式(8)式等號兩側的所有各項同步乘以 $2R$，即得出下列結構式；

$$d_{13}d_{14}d_{15}\cdot 2R\sin A_1 = V_1 d_{13}d_{14}\cdot 2R\sin\theta_5 + V_1V_6 d_{13}\cdot 2R\sin\theta_4 + V_1V_6 d_{15}\cdot 2R\sin\theta_3 +$$

$$V_6 d_{14}d_{15}\cdot 2R\sin\theta_2 \qquad (8\text{-}1)$$

對(8-1)式再應用引理 4.圓內接多邊形各圓周角的正弦定理，得出下列方程式；

$$d_{13}d_{14}d_{15}d_{26} = V_1 d_{13}d_{14}V_5 + V_1V_6 d_{13}V_4 + V_1V_6 d_{15}V_3 + V_6 d_{14}d_{15}V_2 \qquad (9)$$

方程式(9)式稱為圓內接六邊形類托勒密定理狹義方程式。(9)式的方程式內涵型態其等號左側項全然是對角線長連乘積，而等號右側各項則為邊長線段與對角線長連乘積，整體方程式型態與(3)式同類型，故稱為類托勒密定理狹義方程式。

四、一般形平面凸六邊形類托勒密定理狹義方程式

一般形平面凸六邊形 3 個頂點是不共圓的，但其任意 3 個頂點必共圓。需適當選出 3 個頂點共圓的一個圓來框住這凸六邊形圖形，再以此圓對這凸六邊形圖形特別規範出一個新的圓內接六邊形，並利用此新圓內接六邊形頂角的合分角性質來轉化修正再推演出一般形平面凸六邊形類托勒密定理狹義方程式。選出共圓 3 個頂點的要領是必須能夠讓被推演出的公式顯示為最簡潔型態；對一般形平面凸多邊形言，被選出的最佳共圓 3 個頂點是 A_1、A_k、A_{k+1}，而此處的 k 需滿足 $k=\dfrac{n+1}{2}+\dfrac{1}{4}\left[1+(-1)^n\right]$，且 n 則為此一般形平面凸 n 邊形的邊長數目。所以，就這裡的一般形平面凸六邊形情況，應該取定 $n=6$ 則 $k=4$，見下圖 11.的六邊形，選取頂點 A_1、A_4、A_5，因而製作出其 $\Delta A_1A_4A_5$ 的外接圓，此外接圓框住很大部份的平面凸六邊形圖形，見下圖 12.，頂點 A_2 落在圓周的內側，頂點 A_3 落在圓周的外側，頂點 A_5 落在圓周的外側，這樣的分佈結構不失為演繹求證的一般性。

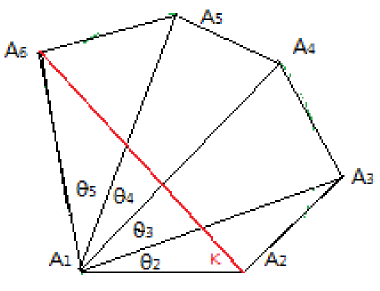

圖 11.

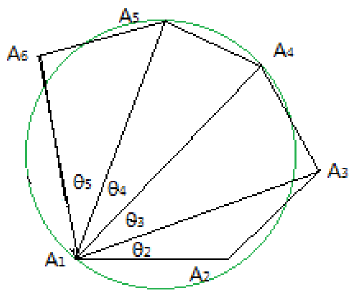

圖 12.

已選定圖 12.的共圓三角形 $\Delta A_1A_4A_5$ 後，即展開主題方程式的探討，過程如下；

(1) 延長邊長線段 $\overline{A_1A_2}$ 直至與圓周相交於 B 點，見下圖 13.，且圓周又與線段 $\overline{A_1A_3}$、$\overline{A_1A_6}$ 分別相交於 C、D 點，聯結 B 點與 C 點成線段 $\overline{BC}$，再連結 C 點與 A_4 點成 $\overline{A_4C}$，A_5 點與 D 點成 $\overline{A_5D}$，得一個新的圓內接六邊形 $A_1BCA_4A_5D$ 圖形並框住原凸六邊形，輔助線作圖完成。接下來要詳細找出兩圖形的相關線段關係。

(2) 令 $\angle A_1CA_4 = \Omega$，$\angle A_1A_5A_4 = \psi$，$\angle A_1DA_5 = \delta$，如圖 14.所示，對 $\Delta A_1A_2A_3$ 言，

$\angle A_1A_3A_2 = \pi - \theta_2 - A_2$，再由 $\angle A_1A_3A_4 = A_3 - \angle A_1A_3A_2 \Rightarrow$

$\angle A_1A_3A_4 = A_2 + A_3 + \theta_2 - \pi$，對圓內接四邊形 $A_1CA_4A_5$ 言，由引理 2.知，圓內接四邊形的對角互為補角，得；$\angle A_3A_4C = A_4 - (\pi - \theta_3 - \theta_4) = A_4 + \theta_3 + \theta_4 - \pi \Rightarrow$

$$\angle A_3CA_4 = \pi - \angle A_1A_3A_4 - \angle A_3A_4C = 3\pi - (A_2 + A_3 + A_4) - (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$$

對 ΔA_3CA_4 言，由引理 3.知；$\dfrac{\overline{A_4C}}{\sin(\angle A_1A_3A_4)} = \dfrac{\overline{A_3C}}{\sin(\angle A_3A_4C)} = \dfrac{V_3}{\sin(\angle A_3CA_4)} \Rightarrow$

$$\overline{A_3C} = \frac{-V_3\sin(A_4 + \sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i) + (\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]} \quad , \quad \overline{A_4C} = \frac{-V_3\sin[(\sum_{i=2}^{3}A_i) + \theta_2]}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i) + (\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]} \quad , \Rightarrow$$

$$\overline{CA_1} = d_{13} - \overline{A_3C} = d_{13} + \frac{V_3\sin(A_4 + \sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i) + (\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]} = d_{13}\left\{1 + \frac{V_3\sin(A_4 + \sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{d_{13}\sin\left[\left(\sum_{i=2}^{4}A_i\right) + \left(\sum_{i=2}^{4}\theta_i\right)\right]}\right\}$$

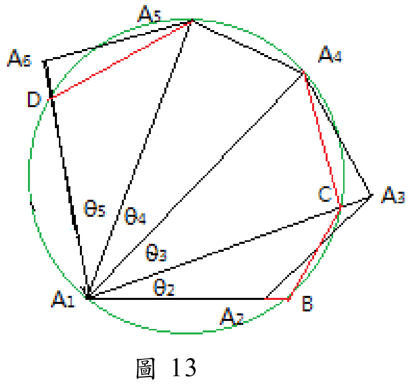

圖 13

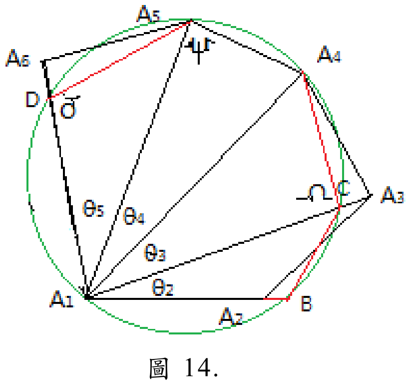

圖 14.

(3) 由 $\Omega=\pi-\angle A_3CA_4=(A_2+A_3+A_4)+(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-2\pi \Rightarrow \psi=\pi-\Omega=3\pi-(A_2+A_3+A_4)-(\theta_2+\theta_3+\theta_4)$，對另一圓內接四邊形 A_1BCA_4 言，可得；

$\angle BCA_1=\angle BCA_4-\Omega=[\pi-(\theta_2+\theta_3)]-\Omega=3\pi-(A_2+A_3+A_4)-(2\theta_2+2\theta_3+\theta_4)$

$\Rightarrow \angle B=\pi-\theta_2-\angle BCA_1=(A_2+A_3+A_4)+(\theta_2+2\theta_3+\theta_4)-2\pi$，對 ΔA_1BC 言，

由引理 3.得；$\overline{BC}=\overline{CA_1}\cdot\dfrac{\sin\theta_2}{\sin(A_2+A_3+A_4+\theta_2+2\theta_3+\theta_4)}$ 且 $d_{13}\sin\theta_2=V_2\sin A_2$

$$\Rightarrow \overline{BC}=V_2\cdot\left\{1+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{d_{13}\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]}\right\}\cdot\frac{\sin A_2}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_3]}$$ 且

$$\overline{A_1B}=\left[\ d_{13}+\frac{V_3\sin(A_4+\theta_3+\theta_4)}{\sin(A_2+A_3+A_4+\theta_2+\theta_3+\theta_4)}\ \right]\cdot\frac{\sin(A_2+A_3+A_4+2\theta_2+2\theta_3+\theta_4)}{\sin(A_2+A_3+A_4+\theta_2+2\theta_3+\theta_4)}$$

$$=\left\{d_{13}+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]}\right\}\cdot\frac{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_2+\theta_3]}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_3]}$$

，另對 $\Delta A_1A_2A_3$ 言，由引理 3.正弦定理可得；$d_{13}=\dfrac{V_1\sin A_2}{\sin(A_2+\theta_2)}=\dfrac{V_2\sin A_2}{\sin\theta_2}$，

將 d_{13} 寫成 V_2 的關係式代回上述的新線段 $\overline{A_1B}$ 中，得 $\Rightarrow \overline{A_1B}=$

$$\left\{\frac{V_2\sin A_2}{\sin\theta_2}+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]}\right\}\cdot\frac{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_2+\theta_3]}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_3]},$$

因線段 $\overline{A_1B}$ 包含了邊長 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_1B}$ 的表示式裡就要展現出 V_1 的量，故改 $\overline{A_1B}=$

$$V_1\cdot\left\{\frac{V_2\sin A_2}{V_1\sin\theta_2}+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_1\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]}\right\}\cdot\frac{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_2+\theta_3]}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_3]}$$

(4) 再令 $\angle A_1A_5D=\zeta$，如下圖 15.所示。對圓內接四邊形 $A_1A_4A_5D$ 言，由引理 2.知，

$\angle A_6A_5D=A_5-\angle A_4A_5D=A_5-[\pi-(\theta_5+\theta_4)]=A_5+\theta_5+\theta_4-\pi \Rightarrow$

$\zeta+\psi=\pi-(\theta_5+\theta_4) \Rightarrow \zeta=(A_2+A_3+A_4)+(\theta_2+\theta_3-\theta_5)-2\pi \Rightarrow$ 對 ΔA_1A_5D 言，

$\delta=\pi-\theta_5-\zeta=3\pi-(A_2+A_3+A_4)-(\theta_2+\theta_3)=A_5+A_6+\theta_5+\theta_4-\pi$，$\Rightarrow$

$\angle A_6DA_5=\pi-\delta=2\pi-(A_5+A_6+\theta_5+\theta_4)$，對 ΔA_6A_5D 言，由引理 3.可得；

$$\frac{\overline{A_6D}}{\sin(\angle A_6A_5D)}=\frac{\overline{A_5D}}{\sin(\angle A_1A_6A_5)}=\frac{V_5}{\sin(\angle A_6DA_5)}\qquad\Rightarrow$$

$$\overline{A_6D}=\frac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{\sin[(\sum_{i=5}^{6}A_i)+(\sum_{i=4}^{5}\theta_i)]}\ ,\qquad \overline{A_5D}=\frac{-V_5\sin A_6}{\sin[(\sum_{i=5}^{6}A_i)+(\sum_{i=4}^{5}\theta_i)]}\ ,\ \Rightarrow$$

$$\overline{DA_1}=V_6-\overline{A_6D}=V_6-\frac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{\sin[(\sum_{i=5}^{6}A_i)+(\sum_{i=4}^{5}\theta_i)]}=V_6\left\{1-\frac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6\sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\}\ ,$$

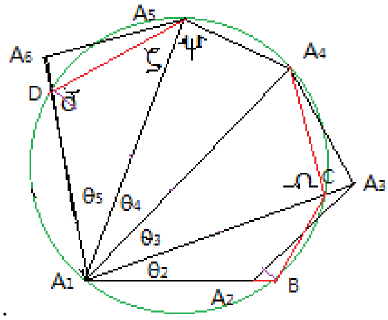

圖 15

(5) 因 $\angle A_1BD=\angle A_1A_5D=\zeta$，對 ΔA_1BD 言，由引理 3.可得； $\overline{BD}\sin\zeta=\overline{DA_1}\sin A_1$，因 $\zeta=(A_2+A_3+A_4)+(\theta_2+\theta_3-\theta_5)-2\pi\ =2\pi-(A_5+A_6+\theta_5+\theta_4+\theta_5)\ \Rightarrow$

$$\overline{BD}=V_6\left\{1-\frac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6\sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot\frac{\sin A_1}{-\sin[A_5+A_6+\theta_4+2\theta_5]}\ ,$$

見圖 11.，對 $\Delta A_1A_2A_6$ 言，由引理 3.可得； $d_{26}\sin\kappa=V_6\sin A_1\quad\Rightarrow$

$$\overline{BD}=d_{26}\left\{1-\frac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6\sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot\frac{-\sin\kappa}{\sin[A_5+A_6+\theta_4+2\theta_5]}$$

，此處 κ 滿足圖 11.內 $\Delta A_1A_2A_6$ 中的 $\tan\kappa=\dfrac{V_6\sin A_1}{V_1-V_6\cos A_1}$ 的關係式。

(6) 演繹至此，新的圓內接六邊形 $A_1BCA_4A_5D$ 所有邊長與對角線長都找到了，現在要應用方程式(9)式，並對照圖 13.結構以寫出新的圓內接六邊形的相對應線段關係式，得詳情細節如下； $\overline{CA_1}\cdot d_{14}d_{15}\cdot\overline{BD}=\overline{A_1B}\cdot\overline{CA_1}\cdot d_{14}\cdot\overline{A_5D}+$

$$\overline{A_1B}\cdot\overline{DA_1}\cdot\overline{CA_1}\cdot V_4+\overline{A_1B}\cdot\overline{DA_1}\cdot d_{15}\cdot\overline{A_4C}+\overline{DA_1}\cdot d_{14}d_{15}\cdot\overline{BC} \tag{10}$$

將本標題四敘述下的(2)、(3)、(4)、(5)節內文裡獲得的各對應表示式代入此方程式(10)式中，並按序編排、運算、整理得下列的運算流程式(11)式；

$$d_{13}d_{14}d_{15}d_{26}\cdot\left\{1+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{d_{13}\sin\left[\left(\sum_{i=2}^{4}A_i\right)+\left(\sum_{i=2}^{4}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot\left\{1-\frac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6\sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot$$

$$\frac{-\sin\kappa}{\sin[(\sum_{i=5}^{6}A_i)+(\sum_{i=4}^{5}\theta_i)+\theta_5]}=V_1d_{13}d_{14}V_5\cdot\left\{\frac{V_2\sin A_2}{V_1\sin\theta_2}+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_1\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]}\right\}\cdot$$

$$\frac{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_2+\theta_3]}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_3]}\cdot\left\{1+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{d_{13}\sin\left[\left(\sum_{i=2}^{4}A_i\right)+\left(\sum_{i=2}^{4}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot$$

$$\frac{-\sin A_6}{\sin[(\sum_{i=5}^{6}A_i)+(\sum_{i=4}^{5}\theta_i)]}+V_1V_6d_{13}V_4\cdot\left\{\frac{V_2\sin A_2}{V_1\sin\theta_2}+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_1\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]}\right\}\cdot$$

$$\frac{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_2+\theta_3]}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_3]}\cdot\left\{1-\frac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6\sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot$$

$$\left\{1+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{d_{13}\sin\left[\left(\sum_{i=2}^{4}A_i\right)+\left(\sum_{i=2}^{4}\theta_i\right)\right]}\right\}+V_1V_6d_{15}V_3\cdot$$

$$\left\{\frac{V_2\sin A_2}{V_1\sin\theta_2}+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_1\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]}\right\}\cdot\frac{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_2+\theta_3]}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_3]}\cdot$$

$$\left\{1-\frac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6\sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot\frac{-\sin[(\sum_{i=2}^{3}A_i)+\theta_2]}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]}+V_6d_{14}d_{15}V_2\cdot$$

$$\cdot\left\{1-\frac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6\sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot\left\{1+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{d_{13}\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]}\right\}\cdot$$

$$\frac{\sin A_2}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_3]} \tag{11}$$

，此處 κ 滿足圖 11.內 $\Delta A_1A_2A_6$ 中的 $\tan\kappa=\dfrac{V_6\sin A_1}{V_1-V_6\cos A_1}$ 的關係式。

這等式方程式(11)式即稱為一般形平面凸六邊形類托勒密定理狹義方程式。

(7) 方程式(11)式中各修正項的幾何意義

方程式(11)式型態裡有 5 個 { } 的修正項及 3 個分式項,現在要解讀此修正項的意義;每個修正項皆等於一純比例數值正實數用來修正原六邊形圖使形成新構的圓內接六邊形。第 1 個修正項是 $\left\{1+\dfrac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{d_{13}\sin\left[\left(\sum_{i=2}^{4}A_i\right)+\left(\sum_{i=2}^{4}\theta_i\right)\right]}\right\}$，請見圖 13.、圖 14.、圖 15.，表示新構圓內接六邊形的第 1 個對角線長 $\overline{CA_1}$ 與原凸六邊形第 1 對角線長 d_{13} 的比值，這純比例數值是個正實數，可放大或縮小線段長度，用來修正原六邊形圖使形成新構圓內接六邊形。同理，$\left\{1-\dfrac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6\sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\}$ 表示邊長 $\overline{DA_1}$ 與 V_6 的比值。第 3 個組合修正項是 $\left\{1-\dfrac{V_5\sin(A_5+\sum_{i=4}^{5}\theta_i)}{V_6\sin\left[\left(\sum_{i=5}^{6}A_i\right)+\left(\sum_{i=4}^{5}\theta_i\right)\right]}\right\}\cdot\dfrac{-\sin\kappa}{\sin[(\sum_{i=5}^{6}A_i)+(\sum_{i=4}^{5}\theta_i)+\theta_5]}$

表示 $\overline{BD}$ 與 d_{26} 的比值。接著第 4 個組合修正項是

$$\left\{\frac{V_2\sin A_2}{V_1\sin\theta_2}+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{V_1\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]}\right\}\cdot\frac{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_2+\theta_3]}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_3]}$$ 表示

邊長 $\overline{A_1B}$ 與 V_1 的比值。第 5 個修正項是 $\dfrac{-\sin A_6}{\sin[(\sum_{i=5}^{6}A_i)+(\sum_{i=4}^{5}\theta_i)]}$ 表示 $\overline{A_5D}$ 與 V_5 的比

值。第 6 個修正項是 $\dfrac{-\sin[(\sum_{i=2}^{3}A_i)+\theta_2]}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]}$ 表示邊長 $\overline{A_4C}$ 與 V_3 的比值。第 7 個修

正項是 $\dfrac{\sin\theta_2}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_3]}$ 表示 $\overline{BC}$ 與 $\overline{CA_1}$ 的比值。第 8 個組合修正項是

$$\left\{1+\frac{V_3\sin(A_4+\sum_{i=3}^{4}\theta_i)}{d_{13}\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)]}\right\}\cdot\frac{\sin A_2}{\sin[(\sum_{i=2}^{4}A_i)+(\sum_{i=2}^{4}\theta_i)+\theta_3]}$$

表示 $\overline{BC}$ 與 V_2 的比值。這些比值可能是大於 1 也可能是小於 1 的正實數。
乘上這些修正項正實數將有放大或縮小數量、線段的效果，使得修正好的線段恰能成為新構圖圓內接六邊形的有效邊長、對角線長。

(8) 方程式(11)式的統合方程式(9)式

(8a) 見下圖 16.，先釐清並明瞭圓內接六邊形中各頂角的分角組合內涵結構；由圓內接六邊形各邊長與其對應圓周角性質知；$\theta_6+\theta_5+\theta_4+\theta_3+\theta_2+\theta_1=\pi$，合分角關係；$A_1=\theta_5+\theta_4+\theta_3+\theta_2$，$A_2=\theta_6+\theta_5+\theta_4+\theta_3$，$A_3=\theta_1+\theta_6+\theta_5+\theta_4$，

$A_4=\theta_2+\theta_1+\theta_6+\theta_5$，$A_5=\theta_3+\theta_2+\theta_1+\theta_6$，$A_6=\theta_4+\theta_3+\theta_2+\theta_1$ 。

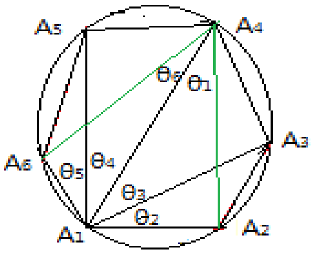

圖 16.

(8b) 假如令此一般形平面凸六邊形的 6 個頂點共圓，形成一個圓內接六邊形，則方程式(11)式中的 $A_4+\theta_3+\theta_4=\theta_6+\theta_5+\theta_4+\theta_3+\theta_2+\theta_1=\pi$

$$\Rightarrow \quad \sin(A_4+\theta_3+\theta_4)=0 \tag{8b -1}$$

$$A_2 + A_3 + A_4 + \theta_4 + \theta_3 + \theta_2 = 2\pi + \theta_6 + \theta_5 + \theta_4 = 2\pi + \angle A_1 A_2 A_4 \quad \Rightarrow$$

$$\sin(A_2 + A_3 + A_4 + \theta_4 + \theta_3 + \theta_2) = \sin(\angle A_1 A_2 A_4) = \frac{d_{14}}{2R} \neq 0 \tag{8b -2}$$

$$A_5 + \theta_5 + \theta_4 = \theta_6 + \theta_5 + \theta_4 + \theta_3 + \theta_2 + \theta_1 = \pi$$

$$\Rightarrow \quad \sin(A_5 + \theta_5 + \theta_4) = 0 \tag{8b -3}$$

$$A_5 + A_6 + \theta_5 + \theta_4 = \theta_6 + \theta_5 + \theta_4 + \theta_3 + \theta_2 + \theta_1 + A_6 = \pi + A_6$$

$$\Rightarrow \quad \sin(A_5 + A_6 + \theta_5 + \theta_4) = \sin(\pi + A_6) = -\sin A_6 \neq 0 \tag{8b -4}$$

$$A_5 + A_6 + \theta_5 + \theta_4 + \theta_5 = \pi + A_6 + \theta_5 = 2\pi - \theta_6$$

$$\Rightarrow \quad \sin(A_5 + A_6 + \theta_5 + \theta_4 + \theta_5) = \sin(2\pi - \theta_6) = -\sin\theta_6 = \frac{-V_6}{2R} \neq 0 \tag{8b -5}$$

$$A_2 + A_3 + A_4 + \theta_4 + 2\theta_3 + 2\theta_2 = 2\pi + \theta_6 + \theta_5 + \theta_4 + \theta_3 + \theta_2 = 3\pi - \theta_1$$

$$\Rightarrow \quad \sin(A_2 + A_3 + A_4 + \theta_4 + 2\theta_3 + 2\theta_2) = \sin(3\pi - \theta_1) = \sin\theta_1 = \frac{V_1}{2R} \neq 0 \tag{8b -6}$$

$$A_2 + A_3 + A_4 + \theta_4 + 2\theta_3 + \theta_2 = 2\pi + \theta_6 + \theta_5 + \theta_4 + \theta_3 = 2\pi + A_2$$

$$\Rightarrow \quad \sin(A_2 + A_3 + A_4 + \theta_4 + 2\theta_3 + \theta_2) = \sin(2\pi + A_2) = \sin A_2 = \frac{d_{13}}{2R} \neq 0 \tag{8b -7}$$

再由　$A_2 + A_3 + \theta_2 = \theta_5 + \theta_6 + \theta_4 + \pi = \pi + \angle A_1 A_2 A_4$

$$\Rightarrow \quad \sin(A_2 + A_3 + \theta_2) = -\sin(\angle A_1 A_2 A_4) = -\frac{d_{14}}{2R} \neq 0 \tag{8b -8}$$

將此(8b -j)式，j=1,2,3, … ,7,8 等一起同步代入方程式(11)式中，化簡，得；

$$d_{13}d_{14}d_{15}d_{26} \cdot \frac{-\sin\kappa}{-\sin\theta_6} = V_1 d_{13} d_{14} V_5 \cdot \left\{\frac{V_2 \sin A_2}{V_1 \sin\theta_2}\right\} \cdot \frac{V_1}{d_{13}} + V_1 V_6 d_{13} V_4 \cdot \left\{\frac{V_2 \sin A_2}{V_1 \sin\theta_2}\right\} \cdot \frac{V_1}{d_{13}}$$

$$+\ V_1V_6d_{15}V_3\cdot\left\{\frac{V_2\sin A_2}{V_1\sin\theta_2}\right\}\cdot\frac{V_1}{d_{13}}\ +\ V_6d_{14}d_{15}V_2\cdot\frac{\sin A_2}{\sin A_2} \tag{12}$$

方程式(12)式的型態是在圓內接六邊形的規範條件下形成的。見下圖 17.，

$\kappa=\theta_6\ \Rightarrow\ \sin\kappa=\sin\theta_6$ ，又對圖 18.中的 $\Delta A_1A_2A_3$ 言，$d_{13}=\overline{A_1A_3}=\overline{A_2A_3}\cdot\dfrac{\sin A_2}{\sin\theta_2}$

$=V_2\cdot\dfrac{\sin A_2}{\sin\theta_2}\ \Rightarrow\ d_{13}\sin\theta_2=V_2\sin A_2\ \Rightarrow$ (12)式中的 $\left\{\dfrac{V_2\sin A_2}{V_1\sin\theta_2}\right\}\cdot\dfrac{V_1}{d_{13}}=1$ ，

$\dfrac{-\sin\kappa}{-\sin\theta_6}=1$ ，$\dfrac{d_{13}}{V_2}\cdot\dfrac{\sin\theta_2}{\sin A_2}=1$ ，因此，方程式(12)式必精簡蛻變成下式；

$$d_{13}d_{14}d_{15}d_{26}=V_1d_{13}d_{14}V_5+V_1V_6d_{13}V_4+V_1V_6d_{15}V_3+V_6d_{14}d_{15}V_2 \tag{12*}$$

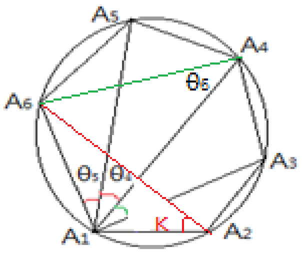

圖 17

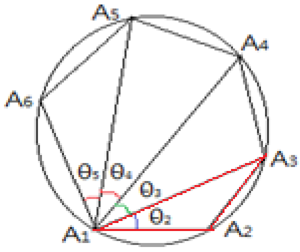

圖 18

此方程式(12*)式就是圓內接六邊形類托勒密定理狹義方程式的(9)式。

(8c) 由上述(8a).與(8b).的推論知：方程式(11)式已然涵蓋統一了方程式(9)式，使得方程式(9)式成為它的特例！同時更知道；一般形平面凸六邊形與圓內接六邊形類托勒密定理狹義方程式可以互相推演轉換。統合證明檢驗完成。

【待續】