一道 AMC12 的代幣遊戲題

蘇柏奇[*] 游淑媛

苗栗縣立興華高級中學

在 2004 年 AMC12 試題中看到一個代幣遊戲，其規則為：「每回合持有最多代幣者須分給其他每一位參與者 1 枚代幣，並放 1 枚代幣於回收桶中；當有一位參與者沒有代幣時，則遊戲結束。」並問 A、B、C 三人玩此遊戲，在遊戲開始時分別持有 15、14、13 枚代幣，則遊戲開始到結束，共進行了多少回合？我們以數對(15,14,13)代表 A、B、C 之代幣數，操作三次：

$$(15,14,13) \to (12,15,14) \to (13,12,15) \to (14,13,12)\text{，}$$

發現過程中，三人依序變成持有最多代幣者，因此，三人都分給他人一次（數量減少 3 枚）、收到兩次（數量增加 2 枚），合計經三回合後，三人的代幣數皆少 1，進一步得：

$$(15,14,13) \xrightarrow{3次} (14,13,12) \xrightarrow{3次} (13,12,11) \xrightarrow{3次} \ldots \xrightarrow{3次} (3,2,1) \to (0,3,2)$$

故原題所問之回合數為：$(15-3)\times 3+1=37$。

本文將討論一般的情形。先討論若有多人同時持有最多代幣時，該如何分？不妨設 A、B 兩人最多時，即設 (x,x,y)，$x>y$，此時，有兩種分法：

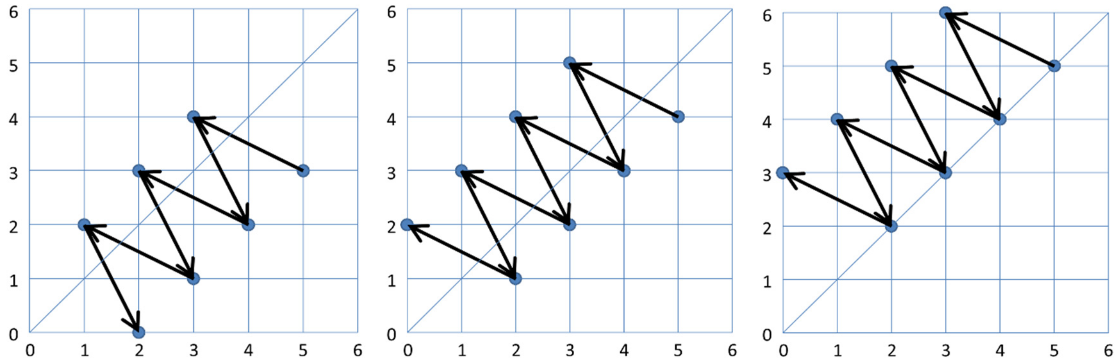
1. 由 A 分給其他人 $(x,x,y)\to(x-3,x+1,y+1)$；
2. 由 B 分給其他人 $(x,x,y)\to(x+1,x-3,y+1)$；

兩種情形 $(x-3,x+1,y+1)$ 及 $(x+1,x-3,y+1)$ 皆再變成 $(x-2,x-2,y+2)$。亦即不論由誰先分，都得到相同結果，故後續遇到多人同為持有最多者，不妨規定由編號較前者將代幣分給其他人，並規定初始狀態 (x,y,z) 必有 $x\ge y\ge z$。以下將依序討論兩人、三人及多人的情形，藉由移動時的循環，得到簡化計算回合數的方法。

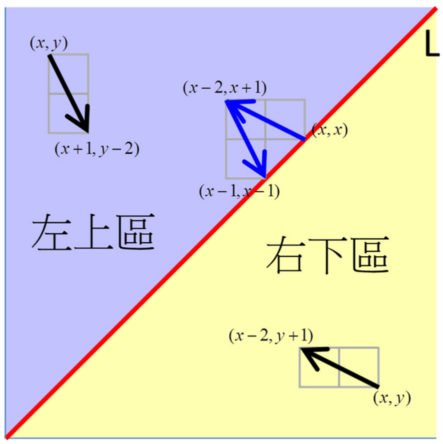
壹、兩人的情形

我們操作(5,3)、(5,4)、(5,5)，並將移動過程標示在直角坐標平面：

*為本文通訊作者

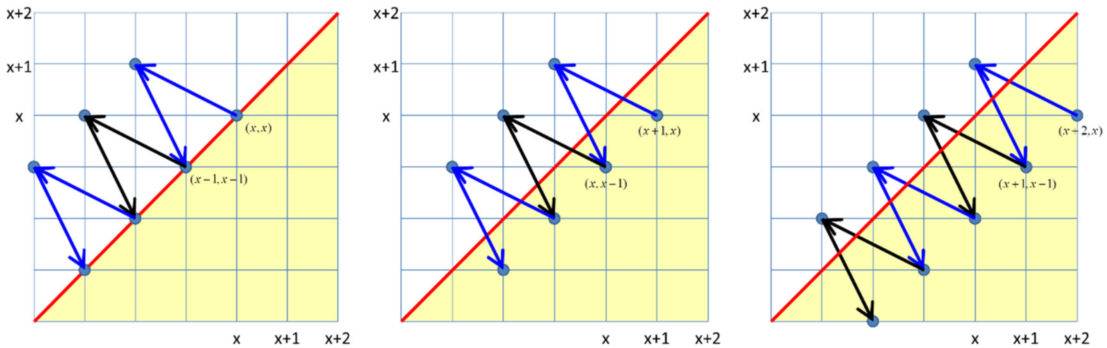


發現移動的方式和象棋中的馬走日的方式相同，直線 L: $y=x$ 將平面分割為左上區與右下區，移動方式有二：



$$\begin{cases}(x,y) & \rightarrow & (x-2,y+1) & ,x\geq y\\(x,y) & \rightarrow & (x+1,y-2) & ,x<y\end{cases}$$

因為初始狀態 (x,y) 必有 $x\geq y$，故起始點會在右下區或 L 上。依照規則，會逐漸向 L 靠近，直至落在 L 或左上區：(1)當落在 L 上時，經過兩個回合，又回到 L 上；(2)進入左上區者，則會反覆在兩區間移動。進一步歸納三種情形如下：



不難得到 $\begin{cases}(x, & x) & \rightarrow & (x-2, & x+1) & \rightarrow & (x-1, & x-1)\\(x+1, & x) & \rightarrow & (x-1, & x+1) & \rightarrow & (x, & x-1)\\(x+2, & x) & \rightarrow & (x, & x+1) & \rightarrow & (x+1, & x-1)\end{cases}$，歸納結論如下：

> 結論 1
>
> $(x+t,x)$, $t=0,1,2$, $x>2$ 經過兩回合變成 $(x+t-1,x-1)$ 。

再討論結束遊戲的回合數。先考慮：任意情形皆能完成嗎？若兩人持有數皆小於 2 枚時，即(1,1)，遊戲無法結束。若數對移成(1,1)，則此數對也無法形成一堆狀態，用反推的方式，得到 $(x+2,y-1)or(x-1,y+2)\to(x,y)$.亦即 $(3,0)or(0,3)\to(1,1)$ ，但(3,0)、(0,3)皆已完成遊戲，即沒有數對能移動為(1,1)。接著考慮：除了(1,1)外，任意情形皆能完成嗎？

假設 (x,y) 經過 r 回合 $(x,y)\xrightarrow{r\text{次}}(x-2r,y+r)$ 仍在右下區或 L 上（但第 r+1 回合會到左上區），分三類討論如下：

1. $(x-2r,y+r)=(p,p)$ ：（由 $x-2r=y+r$ 得 x, y 滿足 $x-y=3r$ ）

   $(x-2r,y+r)$ 經 $2(x-2r-2)$ 回合變成 $(2,2)$ ，再經 1 回合變成 $(0,3)$ ；

   $$(x,y)\underbrace{\to\ldots\to}_{r\text{次}}(x-2r,y-r)\underbrace{\to\ldots\to}_{2(x-2r-2)\text{次}}(2,2)\underbrace{\to}_{1\text{次}}(0,3)$$

   即共經 $r+2(x-2r-2)+1=2x-3r-3=2x-(x-y)-3=x+y-3$ 回合變成 $(3,0)$.
2. $(x-2r,y+r)=(p+1,p)$ ：（由 $x-2r=y+r+1$ 得 x, y 滿足 $x-y=3r+1$ ）

   $(x-2r,y+r)$ 經 $2(x-2r-2)$ 回合變成 $(2,1)$ ，再經 1 回合變成 $(0,2)$ ；

   $$(x,y)\underbrace{\to\ldots\to}_{r\text{次}}(x-2r,y-r)\underbrace{\to\ldots\to}_{2(x-2r-2)\text{次}}(2,1)\underbrace{\to}_{1\text{次}}(0,2)$$

   即共經 $r+2(x-2r-2)+1=2x-3r-3=2x-(x-y-1)-3=x+y-2$ 回合變成 $(0,2)$.
3. $(x-2r,y+r)=(p+2,p)$ ：（由 $x-2r=y+r+2$ 得 x, y 滿足 $x-y=3r+2$ ）

   $(x-2r,y+r)$ 經 $2(x-2r-3)$ 回合變成 $(3,1)$ ，再經 2 回合變 $(2,0)$ ；

   $$(x,y)\underbrace{\to\ldots\to}_{r\text{次}}(x-2r,y-r)\underbrace{\to\ldots\to}_{2(x-2r-3)\text{次}}(3,1)\underbrace{\to(1,2)\to}_{2\text{次}}(2,0)$$

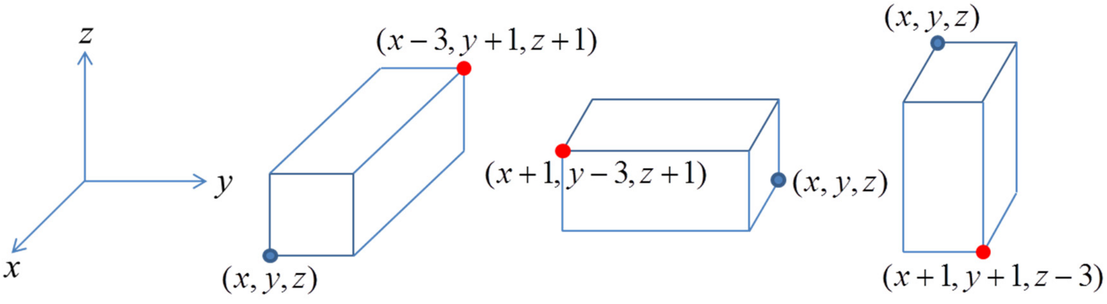
   即共經 $r+2(x-2r-3)+2=2x-3r-4=2x-(x-y-2)-4=x+y-2$ 回合變成 $(2,0)$.

第二、三項之結果可以合併，歸納結論如下：

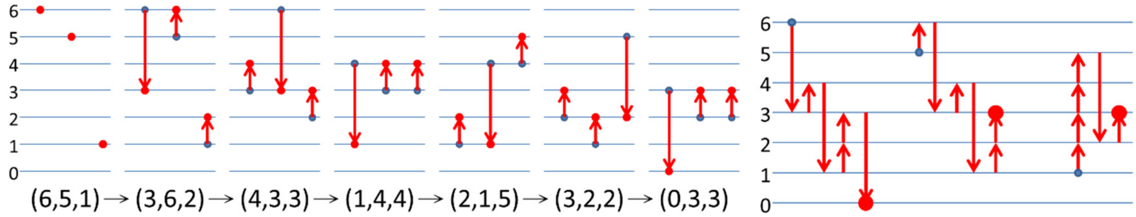
> 結論 2
>
> 1. (1,1)無法結束遊戲。
> 2. 完成 $(x,y)\neq(1,1)$ 所需的回合數為 $\begin{cases}x+y-3,\text{當 } x-y=3r\\ x+y-2,\text{當 } x-y\neq 3r\end{cases}$ 。

貳、三人的情形

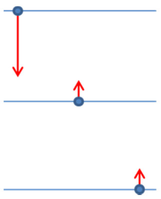
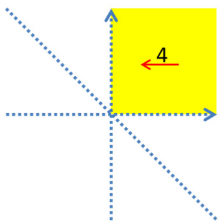
若將三人持有代幣數的數對標示在空間坐標中，則三種遊戲進行方式之點的移動路徑相當於穿越 $3\times1\times1$ 長方體的對角線：

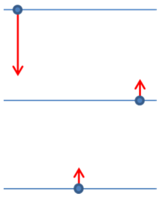
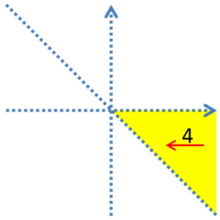
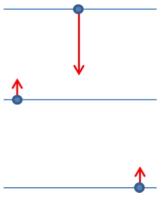
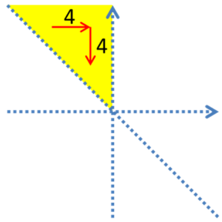
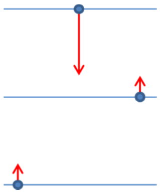
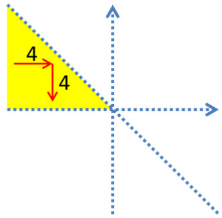
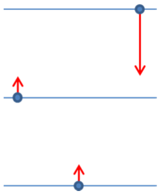
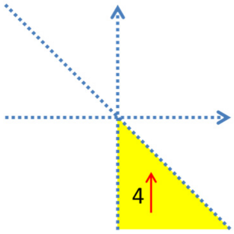
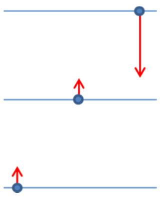
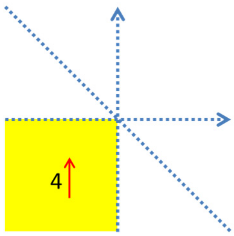


因不易在空間坐標中標示移動路徑，改用下列方式來記錄(6,5,1)變成(0,3,3)的過程，簡記如右下：

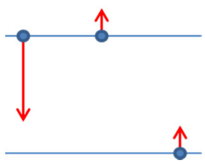
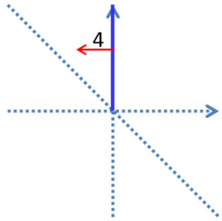
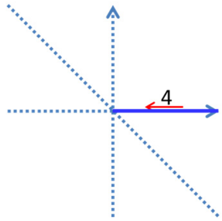
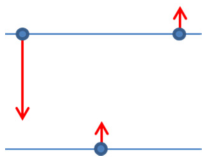
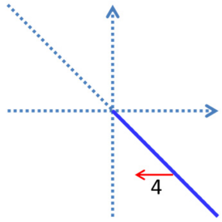
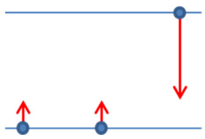
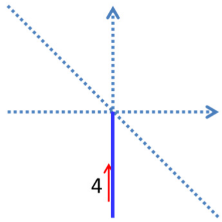
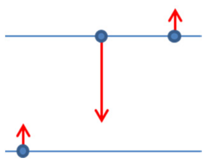
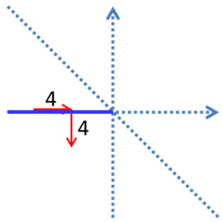


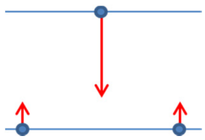
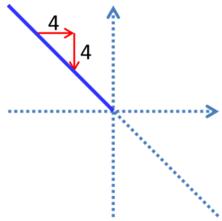
在過程發現兩堆差才是重點，定義 $\begin{cases} s = x-y \\ t = y-z \end{cases}$，就 s、t 的正負與移動方式分析如下，另外，移動後的情況記為 (x',y',z')，並定義 $\begin{cases} s' = x'-y' \\ t' = y'-z' \end{cases}$：

x, y, z 關係	s, t 關係	兩堆差變化	兩堆差坐標位置變化
$x>y>z$ 	$s>0$ $t>0$	$(x,y,z)\to(x-3,y+1,z+1)$ $\begin{cases} s'=(x-3)-(y+1)=s-4 \\ t'=(y+1)-(z+1)=t \end{cases}$	

<table>
<tr><th>x, y, z 關係</th><th>s, t 關係</th><th>兩堆差變化</th><th>兩堆差坐標位置變化</th></tr>
<tr><td>$x > z > y$
</td><td>$s > 0$
$t < 0$
$s + t > 0$</td><td>$(x, y, z) \to (x-3, y+1, z+1)$
$\begin{cases} s' = (x-3)-(y+1) = s-4 \\ t' = (y+1)-(z+1) = t \end{cases}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$y > x > z$
</td><td>$s < 0$
$t > 0$
$s + t > 0$</td><td rowspan="2">$(x, y, z) \to (x+1, y-3, z+1)$
$\begin{cases} s' = (x+1)-(y-3) = s+4 \\ t' = (y-3)-(z+1) = t-4 \end{cases}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$y > z > x$
</td><td>$s < 0$
$t > 0$
$s + t < 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>$z > x > y$
</td><td>$s > 0$
$t < 0$
$s + t < 0$</td><td rowspan="2">$(x, y, z) \to (x+1, y+1, z-3)$
$\begin{cases} s' = (x+1)-(y+1) = s \\ t' = (y+1)-(z-3) = t+4 \end{cases}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$z > y > x$
</td><td>$s < 0$
$t < 0$</td><td></td></tr>
</table>

以下討論兩軸及 $s+t=0$ 上的情形：

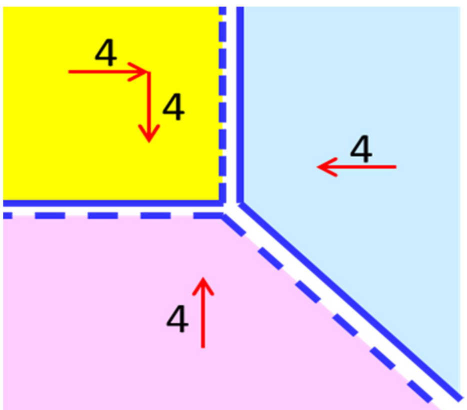
<table>
<tr><th>x, y, z 關係</th><th>s, t 關係</th><th>兩堆差變化</th><th>兩堆差坐標位置變化</th></tr>
<tr><td>$x=y>z$
</td><td>$s=0$
$t>0$</td><td rowspan="3">$(x,x,y)\to(x-3,x+1,y+1)$
$\begin{cases} s'=s-4 \\ t'=t \end{cases}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$x>y=z$
</td><td>$s>0$
$t=0$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$x=z>y$
</td><td>$s>0$
$t<0$
$s+t=0$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$x=y<z$
</td><td>$s=0$
$t<0$</td><td>$(x,x,y)\to(x+1,x+1,y-3)$
$\begin{cases} s'=s \\ t'=t+4 \end{cases}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$x<y=z$
</td><td>$s<0$
$t=0$</td><td>$(x,y,y)\to(x+1,y-3,y+1)$
$\begin{cases} s'=s+4 \\ t'=t-4 \end{cases}$</td><td>
</td></tr>
</table>

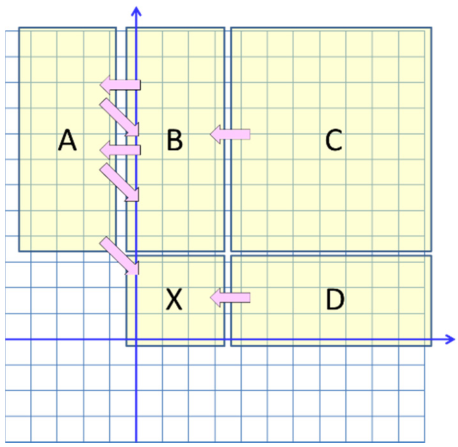
x, y, z 關係	s, t 關係	兩堆差變化	兩堆差坐標位置變化
$x = z < y$ 	$s < 0$ $t > 0$ $s + t = 0$	$(x, y, x) \to (x+1, y-3, x+1)$ $\begin{cases} s' = s + 4 \\ t' = t - 4 \end{cases}$	

根據上述討論結果，歸納分割為三個區域，

1. 右方藍色區域$\begin{cases} s \geq 0 \\ s + t \geq 0 \end{cases}$（含兩個邊界）的點會向左移動 4 格；
2. 左上黃色區域$\begin{cases} s < 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$（含其中一個邊界）的點會右移 4 格下移 4 格；
3. 下方紫色區域$\begin{cases} t < 0 \\ s + t < 0 \end{cases}$（不含邊界）的點會上移 4 格，

各區域的移動方式如下圖左：





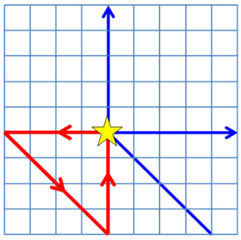
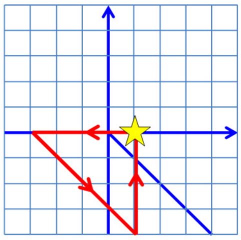
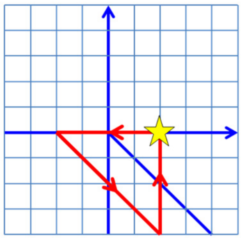
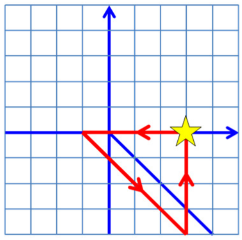
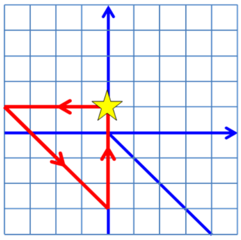
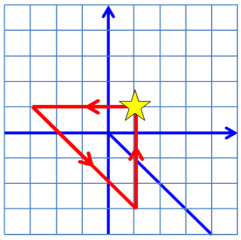
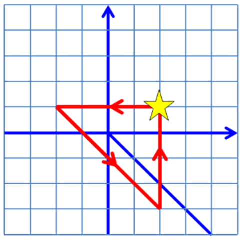
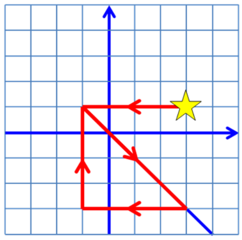
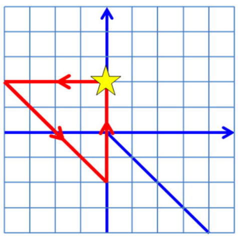
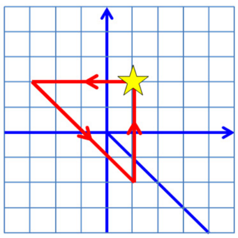
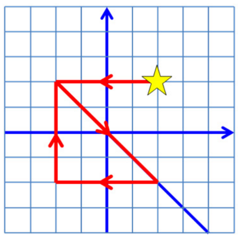
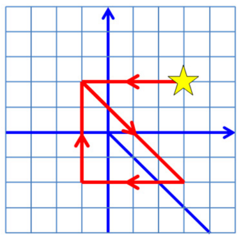
我們考慮 (x, y, z)，$x \geq y \geq z$，因為$\begin{cases} s = x - y \geq 0 \\ t = y - z \geq 0 \end{cases}$，所以初始位置必在第一象限或 x, y 兩軸的正向上，根據上述區域的移動方式，將平面分成五個區域 A 區$\begin{cases} -4 \leq s < 0 \\ t \geq 4 \end{cases}$、B 區$\begin{cases} s \geq 0 \\ t \geq 4 \end{cases}$、C 區$\begin{cases} s \geq 4 \\ t \geq 4 \end{cases}$、D 區$\begin{cases} s \geq 4 \\ 0 \leq t \leq 3 \end{cases}$、X 區$\begin{cases} 0 \leq s \leq 3 \\ 0 \leq t \leq 3 \end{cases}$（如上圖右），設初始狀況為

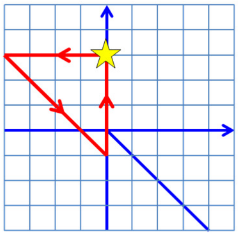
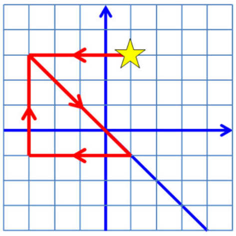
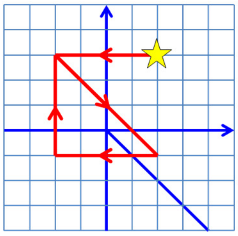
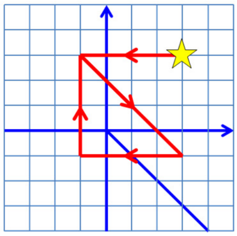
$(x+s+t, x+t, x)$，並設 $\begin{cases} s=4h+s' \\ t=4k+t' \end{cases}$，$0 \le s', t' \le 3$，即初始狀態為 $(x+4h+s'+4k+t', x+4k+t', x)$，且為 s-t 平面上的點 $(4h+s', 4k+t')$，分別討論如下：

1. B 區 $(s', 4k+t')$ 向左移動 4 單位進入 A 區，再右移 4 單位、下移 4 單位進入 B 或 X 區，合併兩回合之變化為下移 4 單位，故 B 區的點經 $2k$ 回合後變成 X 區 (s', t')；
2. C 區 $(4h+s', 4k+t')$ 每回合左移 4 單位，先經 h 回合後進入 B 區 $(s', 4k+t')$，B 區的點兩回合下移 4 單位，經 $2k$ 回合後變成 X 區 (s', t')，即 C 區的點經 $h+2k$ 回合變成 X 區 (s', t')；
3. D 區 $(4h+s', t')$ 每回合向左移動 4 單位，經 h 回合後變成 X 區 (s', t')；

上述討論可合併為 B、C、D 三區的點經過 $h+2k$ 回合變成 X 區 (s', t')。

接下來討論 X 區 (s', t') 的回合數。發現 X 區 16 個點的移動會產生循環，列表如下：

t \ s	**0**	**1**	**2**	**3**
0				
1				
2				

t \ s	0	1	2	3
3				

不難看出，可分成兩種循環模式：

1. 當 $0 \le s+t \le 3$：經過三次移動後，回到原來的 s、t 狀態且因各堆代幣各少 1 個，

$$(a,b,c)\xrightarrow{3\text{次}}(a-1,b-1,c-1)\xrightarrow{3\text{次}}(a-2,b-2,c-2)\xrightarrow{3\text{次}}(a-3,b-3,c-3)\xrightarrow{3\text{次}}\ldots$$

2. 當 $4 \le s+t \le 6$：不會回到原來的 s、t 狀態，但經過一個回合後，即開始循環，

$$(a,b,c)\longrightarrow(a-3,b+1,c+1)\xrightarrow{3\text{次}}(a-4,b,c)\xrightarrow{3\text{次}}(a-5,b-1,c-1)\xrightarrow{3\text{次}}\ldots$$

得到結論：

結論 3

1. 當 $0 \le s+t \le 3$ 時，若 (a,b,c) 經過 $3r$ 回合仍未完成遊戲，

   則 $(a,b,c)\xrightarrow{3r\text{次}}(a-r,b-r,c-r)$.

2. 當 $4 \le s+t \le 6$ 時，若 (a,b,c) 經過 $1+3r$ 回合仍未完成遊戲，

   則 $(a,b,c)\xrightarrow{1+3r\text{次}}(a-3-r,b+1-r,c+1-r)$.

以下討論 X 區 16 個點 $(x+s+t,x+t,x)$，$0 \le s,t \le 3$ 的回合數。首先，當三人持有數皆少於 3 枚時，即 (1,1,1)、(2,2,2)、(2,1,1)及(2,2,1)無法結束遊戲，另外，以反推方式得(4,1,1)形成(1,2,2)，亦無法結束遊戲。而根據結論 3，只要找出 X 區中回合數少的情形即可，定義 (x_0+s+t,x_0+t,x_0) 最少回和數為 i，則結束遊戲的回和數即為 $3(x-x_0)+i$，先討論 $0 \le s+t \le 3$ 的情形：

(s, t)	遊戲過程	i	x_0	回合數 $3(x-x_0)+i$
(0,0)	(1,1,1)、(2,2,2) 無法結束遊戲 $(3,3,3)\longrightarrow(0,4,4)$	1	3	$3x-8$，$x\ge 3$
(0,1)	(2,2,1)無法結束遊戲 $(3,3,2)\longrightarrow(0,4,3)$	1	2	$3x-5$，$x\ge 2$
(0,2)	$(3,3,1)\longrightarrow(0,4,2)$	1	1	$3x-2$，$x\ge 1$
(0,3)	$(4,4,1)\longrightarrow(1,5,2)\longrightarrow(2,2,3)\longrightarrow(3,3,0)$	3	1	$3x$，$x\ge 1$
(1,0)	(2,1,1) 無法結束遊戲 $(3,2,2)\longrightarrow(0,3,3)$	1	2	$3x-5$，$x\ge 2$
(1,1)	$(3,2,1)\longrightarrow(0,3,2)$	1	1	$3x-2$，$x\ge 1$
(1,2)	$(4,3,1)\longrightarrow(1,4,2)\longrightarrow(2,1,3)\longrightarrow(3,2,0)$	3	1	$3x$，$x\ge 1$
(2,0)	$(3,1,1)\longrightarrow(0,2,2)$	1	1	1
	$(4,2,2)\longrightarrow(1,3,3)\longrightarrow(2,0,4)$	2	2	$3x-4$，$x\ge 2$
(2,1)	$(4,2,1)\longrightarrow(1,3,2)\longrightarrow(2,0,3)$	2	1	$3x-1$，$x\ge 1$
(3,0)	(4,1,1) 無法結束遊戲 $(5,2,2)\longrightarrow(2,3,3)\longrightarrow(3,0,4)$	2	2	$3x-4$，$x\ge 2$

再看 $4\le s+t\le 6$ 的情形，此區的點經過一回合後會進入循環，且將三人持有數重新由大而小排列後，即為 $0\le s+t\le 3$ 的情形，藉此得到下表：

(s, t)	遊戲過程	回合數 $1+3(x-x_0)+i$，$x\ge 1$
(1,3)	$(x+4,x+3,x)\longrightarrow(x+1,x+4,x+1)\xrightarrow{3(x+1)-4\text{次}}(0,3,4)$	$3x$
(2,2)	$(x+4,x+2,x)\longrightarrow(x+1,x+3,x+1)\xrightarrow{3(x+1)-4\text{次}}(0,2,4)$	$3x$
(2,3)	$(x+5,x+3,x)\longrightarrow(x+2,x+4,x+1)\xrightarrow{3(x+1)-1\text{次}}(0,2,3)$	$3x+3$

(3,1)	$(x+4,x+1,x)\longrightarrow(x+1,x+2,x+1)\xrightarrow{3(x+1)-5\text{次}}(3,0,3)$	$3x-1$
(3,2)	$(x+5,x+2,x)\longrightarrow(x+2,x+3,x+1)\xrightarrow{3(x+1)-2\text{次}}(3,0,2)$	$3x+2$
(3,3)	$(x+6,x+3,x)\longrightarrow(x+3,x+4,x+1)\xrightarrow{3(x+1)\text{次}}(2,3,0)$	$3x+4$

歸納上述討論，以刪除線表示無法結束遊戲的情形，並將完成 $(x+s+t,x+t,x)$，$\begin{cases}s=4h+s'\\t=4k+t'\end{cases}$，$0\le s',t'\le 3$ 所需回合數以表格呈現如下：

t' \ s'	0	1	2	3
0	~~(1,1,1)~~、~~(2,2,2)~~ $h+2k+3x-8$, $x\ge 3$	~~(2,1,1)~~ $h+2k+3x-5$, $x\ge 2$	(3,1,1)需 1 回合 $h+2k+3x-4$, $x\ge 2$	~~(4,1,1)~~ $h+2k+3x-4$, $x\ge 2$
1	~~(2,2,1)~~ $h+2k+3x-5$, $x\ge 2$	$h+2k+3x-2$, $x\ge 1$	$h+2k+3x-1$, $x\ge 1$	$h+2k+3x-1$, $x\ge 1$
2	$h+2k+3x-2$, $x\ge 1$	$h+2k+3x$, $x\ge 1$	$h+2k+3x$, $x\ge 1$	$h+2k+3x+2$, $x\ge 1$
3	$h+2k+3x$, $x\ge 1$	$h+2k+3x$, $x\ge 1$	$h+2k+3x+3$, $x\ge 1$	$h+2k+3x+4$, $x\ge 1$

參、多人的情形

前節利用兩堆差將空間坐標降為 s-t 平面坐標，並將結果歸納成 X 區之 16 點，在更多人 $(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$，$x_1\ge x_2\ge\ldots\ge x_{n-1}$ 的情形時，兩堆差 $d_i=x_i-x_{i+1}\ge 0$，$i=1\sim n-1$ 無法以平面坐標來呈現，不難得到多人遊戲的兩堆差 X 為滿足 $0\le d_i\le n$ 的點 $(d_1,d_2,\ldots,d_{n-1})$ 共有 $(n+1)^{n-1}$ 個，數量太多以致於不予逐一討論。

前節逐一討論了三人遊戲 B、C、D 區進入 X 區的方式，多人遊戲分割區域更多。如同三人遊戲之 D 區，多人遊戲也有類似 D 區的區域 $d_1>n$，$0\le d_2,d_3,\ldots,d_{n-1}\le n$，此時，第一人持有最多，每回合 d_1 減少 $n+1$，其他 d_i 則無變化；再如區域 $d_2>n$，$0\le d_1,d_3,d_4,\ldots,d_{n-1}\le n$，第一人持有最多，經一回合後，$d_1$ 減少 $n+1$，其他 d_i 則無變

化，因 $-n<d_1<0$，變成第二人持有最多，再經一回合，持有數為 $(x_1-n+1,x_2-n+1,x_3+2,...,x_n+2)$，可能第一人 x_1-n+1 或第三人 x_3+2 最多，下一回合有兩種可能：

$$\begin{cases}(x_1-2n+1, & x_2-n+2, & x_3+3, & ..., & x_n+3), x_1-n+1\geq x_3+2\\(x_1-n+2, & x_2-n+2, & x_3-n+2, & ..., & x_n+3), x_1-n+1< x_3+2\end{cases}$$

後續，得把第四人納入考慮，所以再下一回合有三種可能，情況變得相對複雜，不逐一討論。

n 人遊戲存在 n 種分法，移動過程會逐步使得兩堆差 $-n\leq d_i\leq n$，n 人遊戲 $(x_1,x_2,...,x_n)$，兩堆差 $(d_1,d_2,...,d_{n-1})$，經一回合後為 $(x_1^{'},x_2^{'},...,x_n^{'})$，兩堆差 $(d_1^{'},d_2^{'},...,d_{n-1}^{'})$。定義 $v_i=d_i^{'}-d_i$ 來表示兩堆差的變化。當 x_j 為最大值時，由 $\begin{cases}x_j^{'}=x_j-n\\x_i^{'}=x_i+1, i\neq j\end{cases}$ 算得：

$$\begin{cases}d_{j-1}^{'}=x_{j-1}^{'}-x_j^{'}=(x_{j-1}+1)-(x_j-n)=(x_{j-1}-x_j)+(1+n)=d_{j-1}+(1+n)\\d_j^{'}=x_j^{'}-x_{j+1}^{'}=(x_j-n)-(x_{j+1}+1)=(x_j-x_{j+1})-(1+n)=d_{j-1}-(1+n)\\d_i^{'}=x_i^{'}-x_{i+1}^{'}=(x_i+1)-(x_{i+1}+1)=x_i-x_{i+1}=d_i, i\neq j-1, j\end{cases};$$

再得：

$$\begin{cases}v_{j-1}=d_{j-1}^{'}-d_{j-1}=(1+n)\\v_j=d_j^{'}-d_{j-1}=-(1+n)\\v_i=d_i^{'}-d_i=0, i\neq j-1, j\end{cases}$$ ；歸納如下：

結論 4

當 x_j 為最大值時，定義 $v_i=d_i^{'}-d_i$ 表示兩堆差的變化，則 $\begin{cases}v_{j-1}=(1+n)\\v_j=-(1+n)\\v_i=0, i\neq j-1, j\end{cases}$。

本節探討：(一)產生循環的充要條件；(二)X 區內進入循環所需次數上界。

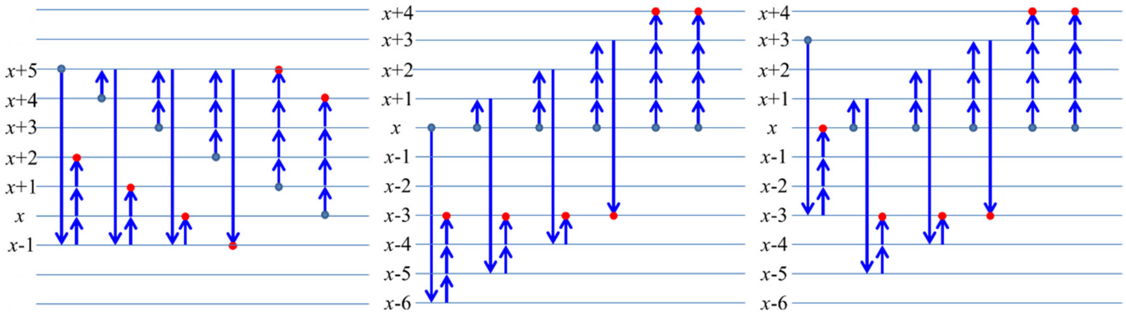
（一）產生循環的充要條件

由結論 4，列出 4~6 人遊戲之 4~6 種分法所對應的 $(v_1,v_2,v_3,...,v_{n-1})$ 如下表，當出現

n 人輪流為持有最多者時，經此 n 回合後，兩堆差總變化為 0，回到此 n 回合開始前的兩堆差狀況，故此 n 回合形成一循環。

持有最多者 \ n	4	5	6
第一人	$(-5,0,0)$	$(-6,0,0,0)$	$(-7,0,0,0,0)$
第二人	$(5,-5,0)$	$(6,-6,0,0)$	$(7,-7,0,0,0)$
第三人	$(0,5,-5)$	$(0,6,-6,0)$	$(0,7,-7,0,0)$
第四人	$(0,0,5)$	$(0,0,6,-6)$	$(0,0,7,-7,0)$
第五人		$(0,0,0,6)$	$(0,0,0,7,-7)$
第六人			$(0,0,0,0,7)$

顯然，當任一個兩堆差 $d_i > n$ 時，某人會連續成為持有最多者，故無法在 n 回合內由 n 人輪流為持有最多者，亦即只有 X 區內的點有可能形成循環。何時會在 n 回合內由 n 人輪流為持有最多者，進而產生循環？考慮 X 區內的三個特例 $(x+5,x+4,x+3,x+2,x+1,x)$、(x,x,x,x,x,x) 及 $(x+3,x,x,x,x,x)$，經四回合後，皆為第 5 人最多，第五回合由第 5 人分給其他人，符合 n 人輪流為持有最多者的情形：



討論三種一般情形，在經過 j 回合後，x_{j+1} 為持有最多者中編號最小的人，由第 $j+1$ 人分給其他參與者，亦即第 k 回合由編號 k 之參與者分給其他人，進而產生循環：

1. $d_i = 1,\ i = 1 \sim n-1$

持有數量為 $(x+n-1, x+n-2, \dots, x+1, x)$，進行 j 回合後得

$\begin{cases} x_i = x - i + j - 1, 1 \le i \le j \\ x_i = x + n - i + j, j < i \le n \end{cases}$ 。

2. $d_i = 0$, $i = 1 \sim n-1$

持有數量為 $(x, x, ..., x)$，每人持有數量皆相等，因當持有數量最多者不只一人時，依規定由編號最小的人分給其他人，進行 j 回合後得 $\begin{cases} x_i = x - n + j - 1, 1 \le i \le j \\ x_i = x + j, j < i \le n \end{cases}$ 。

3. $1 \le d_1 \le n$, $d_i = 0$, $i = 2 \sim n-1$

持有數量為 $(x + d_1, x, ..., x)$，進行 j 回合後得 $\begin{cases} x_1 = x + d_1 - n + j - 1 \\ x_i = x - n + j - 1, 2 \le i \le j \\ x_i = x + j, j < i \le n \end{cases}$ 。

從中觀察：假設初始狀態 $(x_1, x_2, ..., x_n)$，其中 $x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_n$，若能第 k 回合由編號 k 之參與者分給其他人，則產生循環。假設前 j 回合之中，皆滿足第 k 回合由編號 k 之參與者分給其他人($0 \le k \le j$)，須滿足第 k+1 回合由編號 k+1 之參與者分給其他人，即編號 k+1 之參與者有 $x_{k+1} + k$ 枚為持有最多者，顯然，此時編號 k+1 持有數不小於編號大於 k+1 之參與者，僅須確保編號 k+1 持有數大於編號小於 k+1 之參與者，此 k 人中持有最多者為持有 $x_1 - n + k - 1$ 枚之 1 號參與者，即得 $x_{k+1} + k > x_1 - n + k - 1$，化簡得 $x_1 - x_{k+1} < n + 1$，對 $1 \le k \le n-1$ 時皆須滿足 $x_1 - x_{k+1} < n + 1$，即須滿足：$\begin{cases} x_1 - x_2 < n + 1 \\ x_1 - x_3 < n + 1 \\ ... \\ x_1 - x_n < n + 1 \end{cases}$，因 $x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_n$，只須滿足 $x_1 - x_n < n + 1$ ...①，但若完成 $n-1$ 回合時，第 1 人與第 n 人數量同時為最多，依規則由第 1 人分給其他人，但因兩人數量相同，可視為由第 n 人分給其他人，即當 $x_1 - x_n = n + 1$ ...②，也形成循環。由①、②歸納如下：

結論 5

形成循環的充要條件為 $x_1 - x_n \le n+1$，並有

$(x_1, x_2, ..., x_n) \xrightarrow{n回合} (x_1 - 1, x_2 - 1, ..., x_n - 1)$ 。

註：三人遊戲 $s+t=4$ 時，依結論 5 即開始循環，如：

$(7,5,3) \to (4,6,4) \to (5,3,5) \to (2,4,6) = (6,4,2)$，即 $(7,5,3) \xrightarrow{3回合} (6,4,2)$。而前節根據 $s-t$ 平面上位置來歸納得須經一回合才開始循環，如：

$(7,5,3) \to (4,6,4) \to (5,3,5) \to (2,4,6) \to (3,5,3)$，即 $(7,5,3) \to (4,6,4) \xrightarrow{3回合} (3,5,3)$。

兩者最大的差別在於是否根據持有數量多寡而重新排列，所得結果並不矛盾。

（二）X 區內進入循環所需次數上界

X 區($0 \le d_i \le n$)的 $(n+1)^{n-1}$ 個點皆滿足 $0 \le x_1 - x_n \le n(n-1)$，符合結論 5 條件 $x_1 - x_n \le n+1$的點形成循環，其它的點是否與前節三人遊戲一樣，經過若干回合後，也會進入循環？考慮 $x_1 - x_n > n+1$ ...①的情形：

1. 經一回合進入循環：

   持有數量 $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$，經 1 回合為 $(x_1 - n, x_2 + 1, ..., x_{n-1} + 1, x_n + 1)$，
   第 2 人 $x_2 + 1$最多與第 n 人 $x_n + 1$最少，相差為 $x_2 - x_n \le n+1$，故得經 1 回合進入循環。

2. 經兩回合進入循環：

   持有數量 $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$，經 1 回合為 $(x_1 - n, x_2 + 1, ..., x_{n-1} + 1, x_n + 1)$，
   第二人 $x_2 + 1$最多、第 n 人 $x_n + 1$最少，相差 $x_2 - x_n$，
   (因 $x_1 - x_n > n+1$，故第 1 人 $x_1 - n$一定比第 n 人 $x_n + 1$持有更多)
   若 $x_2 - x_n > n+1$ ...②，則經第二回合為 $(x_1 - n + 1, x_2 - n + 1, ..., x_{n-1} + 2, x_n + 2)$，
   此時有兩種可能（第一人最多或第三人最多），分別討論如下：

   (1) 第一人 $x_1 - n + 1$最多、第 n 人 $x_n + 2$最少，相差 $x_1 - x_n - n - 1$，

   若 $\begin{cases} x_1 - n + 1 \ge x_3 + 2 \\ x_1 - x_n - n - 1 \le n+1 \end{cases}$（化簡得 $\begin{cases} x_1 - x_3 \ge n+1 \\ x_1 - x_n \le 2n+2 \end{cases}$ ...③），則開始進入循環。

由①、②、③得：若$\begin{cases} x_2 - x_n > n+1 \\ x_1 - x_3 \ge n+1 \\ n+1 < x_1 - x_n \le 2n+2 \end{cases}$，則經 2 回合進入循環。

(2) 第三人 x_3+2 最多、第 n 人 x_n+2 最少，相差 $x_3 - x_n$，

若$\begin{cases} x_1 - n+1 < x_3+2 \\ x_3 - x_n \le n+1 \end{cases}$（化簡得$\begin{cases} x_1 - x_3 < n+1 \\ x_3 - x_n \le n+1 \end{cases}$…④），則開始進入循環。

由①、②、④得：$\begin{cases} x_1 - x_n > n+1 \\ x_2 - x_n > n+1 \\ x_1 - x_3 < n+1 \\ x_3 - x_n \le n+1 \end{cases}$，而因 $x_1 \ge x_2$，若 $x_2 - x_n > n+1$ 必有 $x_1 - x_n > n+1$，

故簡化得若$\begin{cases} x_2 - x_n > n+1 \\ x_1 - x_3 < n+1 \\ x_3 - x_n \le n+1 \end{cases}$則經 2 回合進入循環。

由上可得判斷經 2 回合進入循環的條件，顯然經更多回合進入循環的條件更加繁雜。

結論 6：X 區 $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$ 中：

1. 若$\begin{cases} x_1 - x_n > n+1 \\ x_2 - x_n \le n+1 \end{cases}$，則經 1 回合進入循環。

2. 若$\begin{cases} x_2 - x_n > n+1 \\ x_1 - x_3 \ge n+1 \\ n+1 < x_1 - x_n \le 2n+2 \end{cases}$或$\begin{cases} x_2 - x_n > n+1 \\ x_1 - x_3 < n+1 \\ x_3 - x_n \le n+1 \end{cases}$，則經 2 回合進入循環。

接著討論 n 人遊戲進入循環所需回和數的上界，顯然，$d_i = n$, $i = 1 \sim n-1$時，進入循環所需回合數最多，考慮六人遊戲 $d_i = 6$， $i = 1 \sim 5$ 的特例，$(x+30, x+24, x+18, x+12, x+6, x)$經過 10 回合後，最多 $x+16$ 與最少 $x+10$ 之差為 6，開始進入循環，前 10 回合之過程如下：

$$
\begin{array}{cccccc}
x+30 & x+24 & x+18 & x+12 & x+6 & x \\
\downarrow & & & & & \\
x+24 & x+25 & x+19 & x+13 & x+7 & x+1 \\
 & \downarrow & & & & \\
x+25 & x+19 & x+20 & x+14 & x+8 & x+2 \\
\downarrow & & & & & \\
x+19 & x+20 & x+21 & x+15 & x+9 & x+3 \\
 & & \downarrow & & & \\
x+20 & x+21 & x+15 & x+16 & x+10 & x+4 \\
 & \downarrow & & & & \\
x+21 & x+15 & x+16 & x+17 & x+11 & x+5 \\
\downarrow & & & & & \\
x+15 & x+16 & x+17 & x+18 & x+12 & x+6 \\
 & & & \downarrow & & \\
x+16 & x+17 & x+18 & x+12 & x+13 & x+7 \\
 & & \downarrow & & & \\
x+17 & x+18 & x+12 & x+13 & x+14 & x+8 \\
 & \downarrow & & & & \\
x+18 & x+12 & x+13 & x+14 & x+15 & x+9 \\
\downarrow & & & & & \\
x+12 & x+13 & x+14 & x+15 & x+16 & x+10
\end{array}
$$

從中可歸納：

先經 1 回合，第 2 人持有最多為 $x+n(n-2)+1$，第 n 人持有最少為 $x+1$，相差 $n(n-2)$；

再經 2 回合，第 3 人持有最多為 $x+n(n-3)+3$，第 n 人持有最少為 $x+3$，相差 $n(n-3)$；

再經 3 回合，第 4 人持有最多為 $x+n(n-4)+6$，第 n 人持有最少為 $x+6$，相差 $n(n-4)$；

推得共經過 $\sum_{i=1}^{n-2} i$ 回合，第 $n-1$ 人持有最多為 $x+n+\sum_{i=1}^{n-2} i$，第 n 人持有最少為 $x+\sum_{i=1}^{n-2} i$，相差 n，開始進入循環。歸納如下：

> 結論 7：X 區 $(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n)$ 中：
>
> n 人遊戲進入循環所需回和數的上界為 $\sum_{i=1}^{n-2} i$。

肆、結語

本遊戲規則是由持有最多的人分給其他參與者 1 枚並放 1 枚代幣於回收桶，故參與者代幣總合每回合少 1，除了少數狀況外，皆能結束遊戲。多人遊戲時，不論是 X 區的點數與進入 X 區的過程都相當多類，雖然存在規律，但無法具體得出每種狀況的算式，然而可以利用 EXCEL 的 VBA 來協助處理這種反覆規律的變化。以五人遊戲為例，撰寫 VBA 程式碼如附錄，輸入初始狀態後，按執行按鈕，即可列出每一回合的變化，並用函數在 G 欄計算每回合最大值與最小值的差（如 G2=MAX(B2:F2)-MIN(B2:F2)）。在下兩例中，第 2 回合開始，每五個回合為一個循環，分別經過 16、15 回合結束遊戲。藉此 VBA 程式的輔助將有助於計算與歸納，但若僅以此來歸納，或將失去探索過程的樂趣。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	最大與最小之差	
2	初始狀態	19	8	7	2	2	17	執行
3	第 1 回合	14	9	8	3	3	11	
4	第 2 回合	9	10	9	4	4	6	
5	第 3 回合	10	5	10	5	5	5	
6	第 4 回合	5	6	11	6	6	6	
7	第 5 回合	6	7	6	7	7	1	
8	第 6 回合	7	2	7	8	8	6	
9	第 7 回合	8	3	8	3	9	6	
10	第 8 回合	9	4	9	4	4	5	
11	第 9 回合	4	5	10	5	5	6	
12	第 10 回合	5	6	5	6	6	1	
13	第 11 回合	6	1	6	7	7	6	
14	第 12 回合	7	2	7	2	8	6	
15	第 13 回合	8	3	8	3	3	5	
16	第 14 回合	3	4	9	4	4	6	
17	第 15 回合	4	5	4	5	5	1	
18	第 16 回合	5	0	5	6	6	6	

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	最大與最小之差	
2	初始狀態	13	9	6	3	2	11	執行
3	第 1 回合	8	10	7	4	3	7	
4	第 2 回合	9	5	8	5	4	5	
5	第 3 回合	4	6	9	6	5	5	
6	第 4 回合	5	7	4	7	6	3	
7	第 5 回合	6	2	5	8	7	6	
8	第 6 回合	7	3	6	3	8	5	
9	第 7 回合	8	4	7	4	3	5	
10	第 8 回合	3	5	8	5	4	5	
11	第 9 回合	4	6	3	6	5	3	
12	第 10 回合	5	1	4	7	6	6	
13	第 11 回合	6	2	5	2	7	5	
14	第 12 回合	7	3	6	3	2	5	
15	第 13 回合	2	4	7	4	3	5	
16	第 14 回合	3	5	2	5	4	3	
17	第 15 回合	4	0	3	6	5	6	
18	第 16 回合						0	

參考資料

2004 年 AMC12 試題　第七題
https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2004_AMC_12A_Problems/Problem_7

附錄：五人遊戲的 EXCEL VBA 程式碼

```
Sub 按鈕 1_Click()
    With Sheets("工作表")
        .Activate
        Range("B2:F10000").Select
        Selection.ClearContents
        X1 = .Cells(1, 2).Value
        X2 = .Cells(1, 3).Value
        X3 = .Cells(1, 4).Value
```

```
                X4 = .Cells(1, 5).Value
                X5 = .Cells(1, 6).Value
                MX = 3
                Do Until X1 <= 0 Or X2 <= 0 Or X3 <= 0 Or X4 <= 0 Or X5 <= 0
                    If X1 >= X2 And X1 >= X3 And X1 >= X4 And X1 >= X5 Then
                            X1 = X1 - 5
                            X2 = X2 + 1
                            X3 = X3 + 1
                            X4 = X4 + 1
                            X5 = X5 + 1
                     ElseIf X2 > X1 And X2 >= X3 And X2 >= X4 And X2 >= X5 Then
                            X1 = X1 + 1
                            X2 = X2 - 5
                            X3 = X3 + 1
                            X4 = X4 + 1
                            X5 = X5 + 1
                     ElseIf X3 > X1 And X3 > X2 And X3 >= X4 And X3 >= X5 Then
                            X1 = X1 + 1
                            X2 = X2 + 1
                            X3 = X3 - 5
                            X4 = X4 + 1
                            X5 = X5 + 1
                     ElseIf X4 > X1 And X4 > X2 And X4 > X3 And X4 >= X5 Then
                            X1 = X1 + 1
                            X2 = X2 + 1
                            X3 = X3 + 1
                            X4 = X4 - 5
                            X5 = X5 + 1
                     ElseIf X5 > X1 And X5 > X2 And X5 > X3 And X5 > X4 Then
                            X1 = X1 + 1
                            X2 = X2 + 1
                            X3 = X3 + 1
                            X4 = X4 + 1
                            X5 = X5 - 5
                   End If
                    .Cells(MX, 2).Value = X1
                    .Cells(MX, 3).Value = X2
                    .Cells(MX, 4).Value = X3
                    .Cells(MX, 5).Value = X4
                    .Cells(MX, 6).Value = X5
                    MX = MX + 1
                Loop
            End With
        End Sub
```