一道組合問題的另解

連威翔

苗栗縣政府環保局安心即時上工計畫人員

壹、前言

在建中通訊解題第 116 期當中，筆者發現底下這道組合問題：

問題 11605：任給 n+1 個不同的自然數，且它們都小於 $2n$，試證：必可從中選出三個數，使其中兩個之和等於第三個。

問題的出處與公告解答(共兩種解法)，請讀者參考[1]。

初次發現此問題時，筆者並沒有觀看其解答，但因為思考一陣子之後仍無所獲，忍不住看了官方公布的兩種解法，才發現兩解法都很巧妙。不過，也許是因為好奇心驅使，筆者繼續研究過後，也找出了兩個新的解法。底下第二節中，筆者將分享此兩解法，希望供有興趣的讀者參考。

貳、筆者的另證

筆者對問題 11605 所找出的兩個另解當中，第一個另解的解題關鍵，在於任給的$n+1$個數之中無論其最大數為何，只要先對最大數以外的 n 個數進行適當分組，然後再利用鴿籠原理，即可證明在較小的 n 個數當中必存在兩數，滿足兩數之和等於該最大數。第一個另證如下：

證明：由題意，因為要從 n+1 個數中選出 3 個數，可知$n \geq 2$。仿照[1]中第一種解法的假設方式，假設 n+1 個數為 $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ ，且滿足 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$。對於任意滿足 $1 \leq k \leq n$ 的正整數 k，因為

$$a_{k+1} - a_k \geq 1$$

且$a_1 \geq 1$，故$n+1$個數中的最大數a_{n+1}滿足

$$a_{n+1} \geq a_n + 1 \geq a_{n-1} + 2 \geq \cdots \geq a_1 + n \geq n + 1,$$

因此 a_{n+1}的最小值為$n+1$。而a_{n+1}的最大值，當然是 $2n-1$。

假設$a_{n+1} = s$，其中 s 為正整數，上面的討論告訴我們

$$n + 1 \leq s \leq 2n - 1. \tag{1}$$

假設集合 A 中的元素為所有小於 s 的正整數，即滿足

$$A = \{1, 2, \dots, s-1\},$$

此時我們可依照 s 的奇偶性，分別透過底下兩種方式將 A 中的 $s-1$ 個正整數進行分組：

(a) 當 s 為奇數時，將 A 中的 $s-1$ 個正整數分成底下 $\frac{s-1}{2}$ 個集合：

$$\{1, s-1\}, \{2, s-2\}, \dots, \left\{\frac{s-1}{2}, \frac{s+1}{2}\right\}. \tag{2}$$

注意上述 $\frac{s-1}{2}$ 個集合均包含兩個元素，且任一集合中的兩元素之和均等於 s，即等於 a_{n+1}。接著，由(1)式可知 $n \le s-1 \le 2n-2$，因此

$$\frac{n}{2} \le \frac{s-1}{2} \le n-1,$$

故(2)處最多只有 $n-1$ 個集合。

(b) 當 s 為偶數時，將 A 中的 $s-1$ 個正整數分成底下 $\frac{s}{2}$ 個集合：

$$\{1, s-1\}, \{2, s-2\}, \dots, \left\{\frac{s}{2}-1, \frac{s}{2}+1\right\}, \left\{\frac{s}{2}\right\}. \tag{3}$$

注意上述 $\frac{s}{2}$ 個集合中，位在前面的 $\frac{s}{2}-1$ 個集合均恰含兩個元素且兩元素之和均等於 s，即等於 a_{n+1}。再次利用(1)式，可知

$$\frac{n+1}{2} \le \frac{s}{2} \le \frac{2n-1}{2} < n,$$

故(3)處最多只有 $n-1$ 個集合。

當我們由 $a_{n+1} = s$ 確定 s 值之後，先依照 s 的奇偶性選擇上面的討論項目(a)或(b)，而比 a_{n+1} 小的另外 n 個正整數

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

將會落在(2)處或(3)處的至多 $n-1$ 個集合當中，根據鴿籠原理，可知存在 a_j, a_k 兩數來自於(2)或(3)處的同一個(含有兩個元素)的集合，其中 $j \ne k$。此時，注意 a_j, a_k 兩數滿足

$$a_j + a_k = s = a_{n+1},$$

因此，我們就找到了滿足問題 11605 所求的三個數 a_j, a_k, a_{n+1}，證畢。

接下來，筆者將介紹第二個另證，其中將使用反證法(與[1]中第一個解法相同)，而解題的關鍵是從發現「題目中任意給定的 $n+1$ 個數中至少包含兩個奇數」這個事實開始的。第二個另證如下：

證明：回顧原本問題的敘述，注意小於 $2n$ 的 $2n-1$ 個正整數為

$$1,2,\ldots,2n-1,$$

其中包含了 $1,3,\ldots,2n-1$ 這 n 個奇數，以及 $2,4,\ldots,2n-2$ 這 $n-1$ 個偶數，我們將其分別表為底下的兩個集合：

$$A_1=\{1,3,\ldots,2n-1\},\qquad A_2=\{2,4,\ldots,2n-2\}.$$

關於原問題中所任給的 $n+1$ 個不同自然數，因為它們來自於 A_1 或 A_2，且 A_2 中只有 $n-1$ 個偶數，所以 $n+1$ 個數中至少包含兩個奇數。

設原問題中所任給的 $n+1$ 個不同自然數當中共有 k 個奇數，則有

$$2\le k\le n. \tag{4}$$

假設這 k 個奇數是 $s_1,s_2,\ldots,s_k$，且滿足 $s_1<s_2<\cdots<s_k$。此時，考慮底下 $k-1$ 個偶數：

$$s_k-s_1,s_k-s_2,\ldots,s_k-s_{k-1},$$

其中由(4)式可知 $1\le k-1\le n-1$。我們給出底下的集合：

$$B_k=\{s_k-s_1,s_k-s_2,\ldots,s_k-s_{k-1}\}.$$

注意我們有 $2\le s_k-s_j\le 2n-2$，其中 $1\le j\le k-1$，滿足

$$2\le s_k-s_{k-1}<s_k-s_{k-2}<\cdots<s_k-s_1\le 2n-2.$$

因此 $B_k\subseteq A_2$，且由上式知 B_k 中有 $k-1$ 個數。

在原本任給的 $n+1$ 個不同自然數中，我們已假設共有 k 個奇數，因此有 $n+1-k$ 個偶數，這些偶數都落在集合 A_2 中，且由(4)式可知

$$1\le n+1-k\le n-1.$$

若這 $n+1-k$ 個偶數不包含 B_k 中 $k-1$ 個偶數的任一個，表示這 $n+1-k$ 個偶數都落在 A_2-B_k 之中，但這是不可能的，因為

$$|A_2-B_k|=(n-1)-(k-1)=n-k$$

告訴我們 A_2-B_k 中的偶數只有 $n-k$ 個。因此，上述的 $n+1-k$ 個偶數至少包含了 B_k 中的一個偶數。假設包含 s_k-s_j 這個偶數，其中 $1\le j<k$，則它與另外兩個奇數 s_k,s_j 滿足

$$s_j + (s_k - s_j) = s_k.$$

因此，我們就找到了滿足問題 11605 所求的三個數 $s_k, s_j, s_k - s_j$，其中前兩數 s_k, s_j 為奇數且落在 A_1 中，第三數 $s_k - s_j$ 為偶數且落在 A_2 中，證畢。

參、結語

其實，筆者首次發現問題 11605 時，並非從[1]的官方網站中得知，而是某次在圖書館翻閱科學教育月刊 420 期(見[2]，以下簡稱科教月刊)至最後幾頁時所發現。第二節中筆者介紹的第一個證明，是在看過科教月刊上問題 11605 的解答後不久，於操場上走路運動時想出；第二個證明，則是在投稿本文經審稿人建議增加文章分量後，於某日起床時靈光一現而趕緊寫下的新解法。有趣的是，由[1]中解題老師對問題 11605 的解題評析內容，可知當時應該有些同學投稿時利用與奇數偶數有關的方式進行探討但答案不完整。然而本文第二節中的第二個另解，卻正好是透過與奇數偶數有關的方式來探討，並成功完成了證明。

科學教育月刊經常刊載建中通訊解題的參考解答，筆者後來才發現，各期月刊的內容也可直接在網站[3]進行閱覽與下載。本文最後，筆者要感謝建中通訊解題的主辦單位與科學教育月刊，因為有他們所提供的寶貴資訊，才促成了本文的誕生。此外，也要特別感謝本文審稿者，因為有其建議，才促使筆者找出第二節中的第二個另證。

參考資料

[1] 問題 11605，建中通訊解題第 116 期
[2] 臺北市立建國高級中學數學科，中學生通訊解題第 116 期題目參考解答及評註。科學教育月刊，420，61-65，2019
[3] 科學教育月刊各期內容 http://www.sec.ntnu.edu.tw/Monthly/SECMonthly-Latest.htm