一般形平面凸四邊形、凸五邊形類托勒密定理狹義方程式

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

壹、前言

托勒密定理(Ptolemy's theorem)嚴謹地表達出任一個平面凸四邊形兩組對邊長度乘積之和不小於兩條對角線長度的乘積，而名聞遐邇的狹義托勒密定理敘述為：任意圓內接四邊形其兩組相對邊長乘積的和等於兩條對角線長的乘積。其對照示意圖如下；見圖 1.，給定半徑為 R 的圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，令其邊長線段

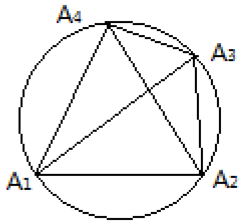

圖 1

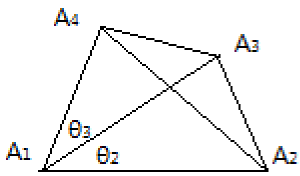

圖 2

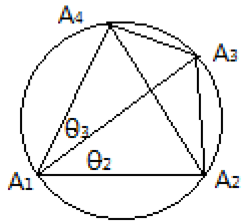

圖 3

$\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_1}=V_4$，對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$，$\overline{A_2A_4}=d_{24}$，

則此狹義托勒密定理的方程式等式內容敘述如下；$d_{13}d_{24}=V_1V_3+V_2V_4$ (1)

又見圖 2.，一般形平面凸四邊形推廣的托勒密定理方程式內容敘述於下；

$$d_{13}d_{24}\le(V_1V_3+V_2V_4) \tag{2}$$

今設定選取頂角 $A_1=\theta_3+\theta_2$，θ_3是弧長 A_3A_4的圓周角，θ_2是弧長 A_2A_3的圓周角，頂角 A_1是合角，而θ_3與θ_2則是頂角 A_1的分角。參考上圖 3.，由應用圓內接多邊形各圓周角的正弦定理知；

$$\frac{V_2}{\sin\theta_2}=\frac{V_3}{\sin\theta_3}=2R=\frac{d_{24}}{\sin A_1} \tag{3}$$

將(3)式代入(1)式中，化簡，得；

$$d_{13}\sin A_1=V_1\sin\theta_3+V_4\sin\theta_2 \tag{4}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\sin A_1}{V_4V_1}=\frac{\sin\theta_3}{V_4d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1} \tag{5}$$

方程式(4)式、(5)式為圓內接四邊形頂角的合分角正弦函數值等式關係方程式。

一般形平面凸四邊形類托勒密定理狹義方程式是要將平面凸四邊形的各邊長與對角線長編寫成類似方程式(1)式的狹義托勒密定理等式方程式，這種類似方程式無法與(1)式的簡潔、對稱、規律、唯一、精緻相比擬，主因其圖形結構完全沒有受制於圓的規範，沒有圓的完美加持。文章探討結果顯示類托勒密狹義方程式的內涵中除了出現有 $d_{13}d_{24}$、V_1V_3 與 V_2V_4 的項之外，還多出了若干個修正項的組合，使得整個類似方程式增添了幾個頂角與分角相結合的自然天成微妙適切特質，每一個修正項皆等於一純比例數值用來修正原圖使形成新構的圓內接四邊形。而這一般形類似方程式的推演證明則必須預先藉助於圓內接四邊形性質始能成就！

貳、本文

考慮一平面凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，圖 2.令其邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_1}=V_4$，兩對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$，$\overline{A_2A_4}=d_{24}$，今設定選取頂角 $A_1=\theta_3+\theta_2$， 頂角 A_1 是合角，而 θ_3 與 θ_2 則是頂角 A_1 的分角。要說明的是；在以下接續內文的敘述推論驗證過程中，所有須使用的四邊形邊長線段、頂角與其分角角度、對角線長等表示式均以此處明列的表示式為準，且在本文文體中詳盡推理演繹證明時尤需要應用到下列 4 個數學基礎性質------引理；

一、數學基本性質--引理；

引理 1. 三角函數角度的和差轉換公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

證明：略。

引理 2. 任給一個圓內四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，則此四邊形的頂角組合；

$$A_1+A_3=A_2+A_4=\pi$$ ，即對角必互為補角。

證明：略。

引理 3. 三角形正弦定理：請見下圖 3-1.，半徑 R 的圓內接三角形 $A_1A_2A_3$，令邊長

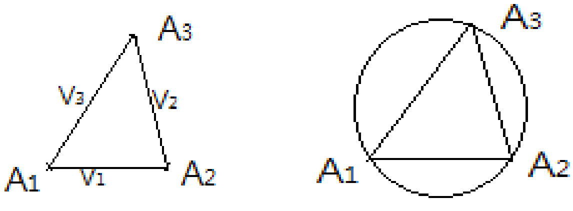

圖 3-1

線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_1}=V_3$，則精簡、對稱的正弦定理公式為：

$$\frac{V_1}{\sin A_3}=\frac{V_2}{\sin A_1}=\frac{V_3}{\sin A_2}=2R \tag{L-1}$$

證明：略。

引理 4. 圓內接多邊形各圓周角的正弦定理： 圖 3-2

給定半徑為 R 的圓內接 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$，令邊長線段 $\overline{A_iA_{i+1}}=V_i$，

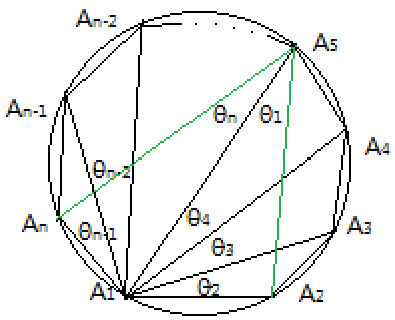

圖 3-2

$1\le i\le n$ ，且 $A_{n+1}=A_1$，而邊長 V_i 所對應的圓周角為 θ_i ，$1\le i\le n$ ，則此多邊形各邊長所對應的圓周角的正弦定理方程式為下列 (L-2)式：

$$\frac{V_1}{\sin\theta_1}=\frac{V_2}{\sin\theta_2}=\frac{V_3}{\sin\theta_3}=\cdots=\frac{V_{n-2}}{\sin\theta_{n-2}}=\frac{V_{n-1}}{\sin\theta_{n-1}}=\frac{V_n}{\sin\theta_n}=2R \tag{L-2}$$

證明：由等弦對應等圓周角及直角三角形的正弦值關係即可證明(略)。

二、圓內接五邊形頂角的合分角正弦值關係方程式與托勒密定理型等式方程式

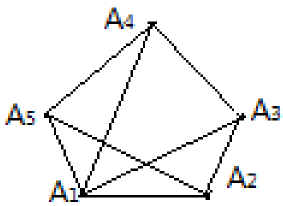

圖 4.

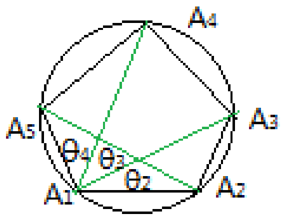

圖 5.

見圖 4.、圖 5.，任給一個平面凸五邊形與圓內接五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，令其邊長 $\overline{A_1A_2}$

$=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_1}=V_5$，對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$，$\overline{A_1A_4}=d_{14}$，$\overline{A_2A_5}=d_{25}$ ，今設定選取圓內接五邊形的頂角 $A_1=\theta_4+\theta_3+\theta_2$，$\theta_4$是弧長 A_4A_5的圓周角，θ_3是弧長 A_3A_4的圓周角，θ_2是弧長 A_2A_3的圓周角，頂角 A_1是合角，而θ_4、θ_3與θ_2則是頂角 A_1的分角。現在需應用圓內接四邊形的方程式(5)式來推證出圓內接五邊形頂角的合分角正弦值等式方程式，並順勢再應用圓內接 n 邊形各圓周角的正弦定理證明出托勒密定理型等式方程式，如下；

[1] 先選取圓內接四邊形 $A_1A_2A_4A_5$，見下圖 6.，應用圓內接四邊形方程式(5)式

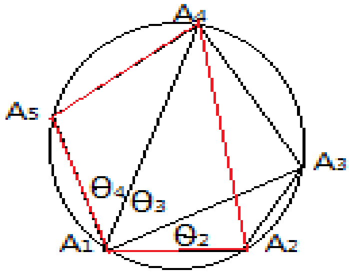

圖 6.

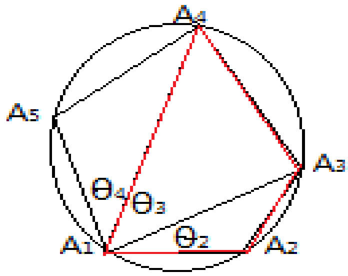

圖 7.

，可得下列對應方程式； $\dfrac{\sin A_1}{V_5V_1}=\dfrac{\sin\theta_4}{V_5d_{14}}+\dfrac{\sin(\theta_3+\theta_2)}{d_{14}V_1}$ (5-1)

[2] 其次，再選取圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，圖 7.，同理，得下列對應方程式；

$$\frac{\sin(\theta_3+\theta_2)}{d_{14}V_1}=\frac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1} \tag{5-2}$$

今將方程式(5-2)式代入(5-1)式，即得下列完整規範分佈的等式對應方程式；

$$\frac{\sin A_1}{V_5V_1}=\frac{\sin(\theta_4+\theta_3+\theta_2)}{V_5V_1}=\frac{\sin\theta_4}{V_5d_{14}}+\frac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1} \tag{10}$$

$$\Rightarrow\quad d_{13}d_{14}\sin A_1=V_1d_{13}\sin\theta_4+V_1V_5\sin\theta_3+V_5d_{14}\sin\theta_2 \tag{11}$$

(10)式、(11)式就是具規律性的圓內接五邊形頂角的合分角正弦值關係方程式！

[3] 再應用引理 4.圓內接 n 邊形各圓周角的正弦定理(L-2)式得知下列關係式；

$$\frac{V_2}{\sin\theta_2}=\frac{V_3}{\sin\theta_3}=\frac{V_4}{\sin\theta_4}=\cdots=\frac{V_n}{\sin\theta_n}=2R=\frac{d_{25}}{\sin A_1} \tag{12}$$

將(12)式代入(11)式中，化簡，得下列邊長與對角線長的乘積關係方程式；

$$d_{13}d_{14}d_{25}=V_1d_{13}V_4+V_1V_5V_3+V_5d_{14}V_2 \tag{13}$$

這方程式(13)式即為圓內接五邊形的托勒密定理型等式方程式！

三、一般形平面凸四邊形類托勒密定理狹義方程式

一般形平面凸四邊形 4 個頂點是不共圓的，但其任意 3 個頂點必共圓。需適當選出 3 個頂點共圓的一個圓來框住這凸四邊形圖形，再以此圓對這凸四邊形圖形特別規範出一個新的圓內接四邊形，並利用此新圓內接四邊形頂角的合分角性質來轉化修正再推演出一般形平面凸四邊形類托勒密定理狹義方程式。選出共圓 3 個頂點的要領是必須能夠讓被推演出的公式顯示為最簡潔型態；對一般形平面凸多邊形言，被選出的最佳共圓 3 個頂點是 A_1、A_k、A_{k+1}，而此處的 k 需滿足 $k=\frac{n+1}{2}+\frac{1}{4}\left[1+(-1)^n\right]$，且 n 則為此一般形平面凸 n 邊形的邊長數目。所以，就這裡的一般形平面凸四邊形情況，應該取定 $n=4$ 則 $k=3$，見圖 2.的四邊形，選取頂點 A_1、A_3、A_4，因而製作出其 $\Delta A_1A_3A_4$ 的外接圓，此外接圓框住很大部份的平面凸四邊形圖形，見下圖 8.，頂點 A_2 落在圓周的外側，這不失為演繹求證的一般性，A_2 也可落在圓周的內側。接下來是證明推演的詳細過程；

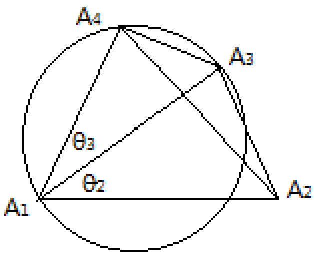

圖 8.

[1] 對圖 8.言，令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$ 與外接圓周相交於 B 點，連接 B 點與 A_3 點，再連接 B 點與 A_4 點，得下圖 9.形成一新構的圓內接四邊形 $A_1BA_3A_4$，就此新圖形應用

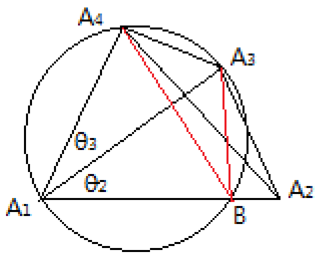

圖 9.

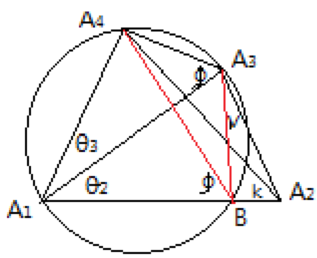

圖 10.

狹義托勒密定理的等式方程式得；　$d_{13}\cdot\overline{BA_4}=\overline{BA_1}\cdot V_3+\overline{BA_3}\cdot V_4$　　(14)

方程式(14)式中的 3 個線段 $\overline{BA_4}$ 、 $\overline{BA_1}$ 、 $\overline{BA_3}$ 是未知的量需要被轉換成已知量。

[2] 令圖 9.圖形中的 $\angle BA_3A_2=\nu$，$\angle BA_2A_4=\kappa$，$\angle A_1A_3A_4=\phi=\angle A_1BA_4$，得輔助圖 10.，

應用引理 2.得 $\angle A_3BA_2=A_4$，對 ΔA_2A_3B 言，則有 $\nu=\pi-(A_2+A_4)$，再應用引理 3.

與引理 1.的公式加以運算，得； $\overline{BA_2}=\dfrac{V_2\sin\nu}{\sin A_4}=\dfrac{V_2\sin(A_2+A_4)}{\sin A_4}$ ，

$$\overline{BA_3}=\frac{V_2\sin A_2}{\sin A_4}\quad\Rightarrow\quad \overline{BA_1}=\overline{A_1A_2}-\overline{BA_2}=V_1-\overline{BA_2}=V_1-\frac{V_2\sin(A_2+A_4)}{\sin A_4}$$ 。

[3] 對 $\Delta A_1A_3A_4$ 言，$\angle A_1A_3A_4=\phi=\pi-(A_4+\theta_3)=\angle A_1BA_4\ \Rightarrow\ \sin\phi=\sin(A_4+\theta_3)$

，對 ΔA_1BA_4 言， $\overline{BA_4}=\dfrac{V_4\sin A_1}{\sin\phi}=\dfrac{V_4\sin A_1}{\sin(A_4+\theta_3)}$ ， 對 ΔBA_2A_4 言， $\Rightarrow$

$\overline{BA_4}=\dfrac{d_{24}\sin\kappa}{\sin\phi}=\dfrac{d_{24}\sin\kappa}{\sin(A_4+\theta_3)}$ ，此處 κ 滿足 $\tan\kappa=\dfrac{V_4\sin A_1}{V_1-V_4\cos A_1}$ 。

[4] 將上述推演出的 3 線段 $\overline{BA_4}$ 、$\overline{BA_1}$ 、$\overline{BA_3}$ 代入方程式(14)式中，得下式；

$$d_{13}d_{24}\cdot\frac{\sin\kappa}{\sin(A_4+\theta_3)}=\left[V_1-\frac{V_2\sin(A_2+A_4)}{\sin A_4}\right]\cdot V_3+\frac{V_2\sin A_2}{\sin A_4}\cdot V_4$$

$$\Rightarrow\quad d_{13}d_{24}\cdot\frac{\sin\kappa}{\sin(A_4+\theta_3)}=V_1V_3\cdot\left[1-\frac{V_2\sin(A_2+A_4)}{V_1\sin A_4}\right]+V_2V_4\cdot\frac{\sin A_2}{\sin A_4}\qquad(15)$$

此處 κ 滿足 $\tan\kappa=\dfrac{V_4\sin A_1}{V_1-V_4\cos A_1}$ 的關係式。

方程式(15)式即為在選取最佳共圓 3 個頂點是 A_1 、 A_3 、 A_4 的情況下得證出的一般形平面凸四邊形類托勒密定理狹義方程式。今將此(15)式取來與圓內接四邊形的(1)式作相互對照比較，(15)式的各項均多出一個帶有分式的修正項，其餘皆同，所以稱方程式(15)式的表列型式為類托勒密定理狹義方程式。

(15)式的另一特徵是其各修正項內的角度函數俱為正弦函數，這是創新方程式。

[5] 方程式(15)式的回溯檢驗

假如令圖 2.的一般形平面凸四邊形的 4 個頂點共圓，形成一個圓內接四邊形，如

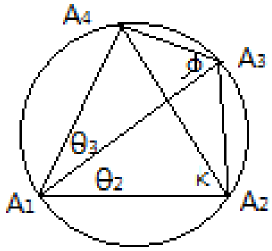

圖 11.

圖 11.，則修正項的每一純比例數值都將適當地轉換，轉換的確實情形如下所示；

(5a) 圖 11.，方程式(15)式中的圓周角 κ與 ϕ兩者必相等； $\kappa=\phi=\pi-(A_4+\theta_3)$

$$\Rightarrow\ \sin\kappa=\sin(A_4+\theta_3) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sin\kappa}{\sin(A_4+\theta_3)}=1 \qquad (15\text{-}1)$$

另由引理 2.知； $A_2+A_4=\pi \ \Rightarrow\ \sin(A_2+A_4)=0$ 且 $\sin A_2=\sin A_4$ (15-2)

(5b) 將(15-1)式與(15-2)式一起同步代入方程式(15)式中，化簡、整理，得下式；

$$d_{13}d_{24}=V_1V_3+V_2V_4 \qquad (*1)$$

(15)式蛻變成(*1)式，此(*1)式就是圓內接四邊形托勒密定理狹義方程式(1)式。

由上述(5a).與(5b).的推論知：方程式(15)式已然涵蓋統一了方程式(1)式，使得方程式(1)式成為它的特例！同時更知道；一般形平面凸四邊形與圓內接四邊形的類托勒密定理狹義方程式可以互相推演轉換。回溯檢驗完成。

[6] 方程式(15)式是包含 3 頂點 A_1、A_3、A_4共圓時所演繹證明出的結果。當這 3 頂點 A_1、A_3、A_4共圓時，還有頂點 A_2不在圓周上，由此頂點落在圓內、圓外各位置的不同情形共計有 2 種，本主題圖 8.圖形是其中的 1 種，再詳細針對另 1 種情形作推演運算，都演繹出方程式(15)式的完全相同結果。在此省略這另外 1 種相異條件情形的推演證明，不再贅述。

[7] 選取 3 個頂點共圓的方法有許多不同組合，每個組合必會產生不同的方程式轉換結果，本文選取的組合較適中，所得的結果是複雜度最緩和的。

四、一般形平面凸五邊形類托勒密定理狹義方程式

一般形平面凸五邊形其五頂點是不一定共圓的，但它的任意三個頂點必共圓，以此共圓的觀點出發並展開下列的推理演繹運算過程；先選取頂角 A_1 為合角，再依被選出的最佳共圓 3 個頂點是 A_1、A_k、A_{k+1}，而此處的代碼 k 必需滿足 $k=\dfrac{n+1}{2}+\dfrac{1}{4}\left[1+(-1)^n\right]$，且 n 為此一般形平面凸 n 邊形的邊長數目。所以，就這裡的一般形平面凸五邊形情況，應該取定 $n=5$ 則 $k=3$，見下圖 12.的五邊形，選取頂點 A_1、A_3、A_4，因而製作出其 $\Delta A_1A_3A_4$ 的外接圓，此外接圓框住很大部份的平面凸五邊形圖形，見下圖 12.，頂點 A_2、A_5 均落在圓周的外側，這不失為演繹求證的一般性，兩者也可落在圓周內側。接下來是證明推演的詳細過程；

[1] 第 1 類圖形如下圖 12.，A_1、A_3、A_4 共圓而頂點 A_2、A_5 皆落於圓的外側；

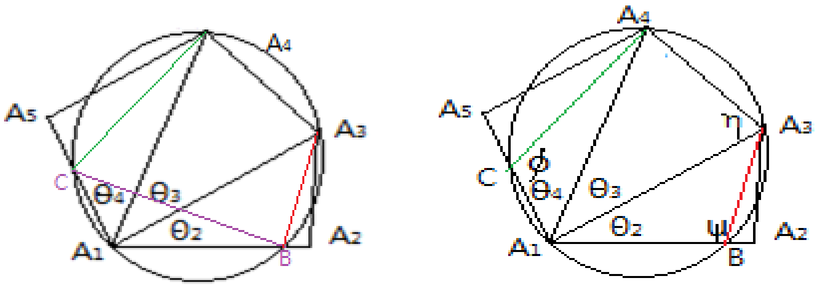

圖 12.

(a) 令邊長線段 $\overline{A_1A_2}$ 與圓周相交於 B 點，聯結 B 點與 A_3 點，使 $\angle A_1BA_3=\psi$，

則 $\angle BA_3A_2=\psi-A_2$，對圓內接四邊形 $A_1BA_3A_4$ 言；由對角互補性質 $A_3-(\psi-A_2)$

$+\theta_3+\theta_2=\pi \Rightarrow \psi=A_2+A_3+\theta_3+\theta_2-\pi \Rightarrow \angle BA_3A_2=A_3+\theta_3+\theta_2-\pi$

(b) 圖 12.中，角度 $\eta=A_3-\angle A_1A_3A_2=A_3-[\pi-A_2-\theta_2]=A_2+A_3+\theta_2-\pi$

(c) 令邊長線段 $\overline{A_1A_5}$ 與圓周相交於 C 點，聯結 C 點與 A_4 點，使 $\angle A_1CA_4=\phi$，對圓內接四邊形 $A_1A_3A_4C$ 言；由對角互補性質，$\phi+\eta=\pi \Rightarrow \phi=\pi-\eta \Rightarrow$

$\phi = 2\pi - (\ A_2 + A_3 + \theta_2)$ 且 $\angle CA_4A_5 = \phi - A_5 = 2\pi - (\ A_2 + A_3 + A_5 + \theta_2)$

(d) 對 ΔBA_3A_2 言，由正弦定理； $\dfrac{\overline{BA_2}}{\sin(\angle BA_3A_2)} = \dfrac{V_2}{\sin(\pi - \psi)} = \dfrac{\overline{BA_3}}{\sin A_2} \quad \Rightarrow$

$$\frac{\overline{BA_2}}{\sin[(A_3 + \theta_3 + \theta_2) - \pi]} = \frac{V_2}{\sin(2\pi - A_2 - A_3 - \theta_3 - \theta_2)} = \frac{\overline{BA_3}}{\sin A_2} \quad \Rightarrow$$

$$\overline{BA_2} = V_2 \cdot \frac{\sin(A_3 + \theta_3 + \theta_2)}{\sin(A_2 + A_3 + \theta_3 + \theta_2)} \quad , \quad \overline{BA_3} = V_2 \cdot \frac{-\sin A_2}{\sin(A_2 + A_3 + \theta_3 + \theta_2)}$$

(e) 對 ΔCA_4A_5 言，由正弦定理； $\dfrac{\overline{CA_5}}{\sin(\angle CA_4A_5)} = \dfrac{V_4}{\sin(\pi - \phi)} = \dfrac{\overline{CA_4}}{\sin A_5} \quad \Rightarrow$

$$\overline{CA_5} = V_4 \cdot \frac{\sin(A_2 + A_3 + A_5 + \theta_2)}{\sin(A_2 + A_3 + \theta_2)} \quad , \quad \overline{CA_4} = V_4 \cdot \frac{-\sin A_5}{\sin(A_2 + A_3 + \theta_2)}$$

(f) 對圓內接五邊形 $A_1BA_3A_4C$ 言，見上圖 12.兩圖示，並引用方程式(13)式得；

$$d_{13}d_{14} \cdot \overline{BC} = (V_1 - \overline{A_2B}) \cdot d_{13} \cdot \overline{CA_4} + (V_1 - \overline{A_2B}) \cdot (V_5 - \overline{CA_5}) \cdot V_3 + (V_5 - \overline{CA_5}) \cdot d_{14} \cdot \overline{BA_3}$$

將(d).與(e).推理中的 $\overline{BA_2}$ 、 $\overline{BA_3}$ 與 $\overline{CA_4}$ 、 $\overline{CA_5}$ 的表示式同步一起代入上式中，得；

$$d_{13}d_{14} \cdot \overline{BC} = \left[V_1 - V_2 \frac{\sin(A_3 + \theta_3 + \theta_2)}{\sin(A_2 + A_3 + \theta_3 + \theta_2)} \right] \cdot d_{13} \cdot \frac{-V_4 \sin A_5}{\sin(A_2 + A_3 + \theta_2)} \ +$$

$$\left[V_1 - V_2 \frac{\sin(A_3 + \theta_3 + \theta_2)}{\sin(A_2 + A_3 + \theta_3 + \theta_2)} \right] \cdot \left[V_5 - V_4 \frac{\sin(A_2 + A_3 + A_5 + \theta_2)}{\sin(A_2 + A_3 + \theta_2)} \right] \cdot V_3 \ +$$

$$\left[V_5 - V_4 \frac{\sin(A_2 + A_3 + A_5 + \theta_2)}{\sin(A_2 + A_3 + \theta_2)} \right] \cdot d_{14} \cdot \frac{-V_2 \sin A_2}{\sin(A_2 + A_3 + \theta_3 + \theta_2)} \qquad (13\text{-}1)$$

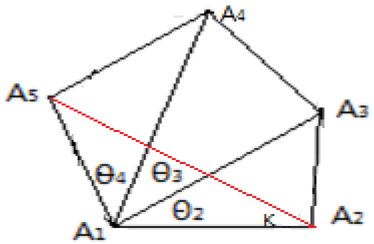

圖 13.

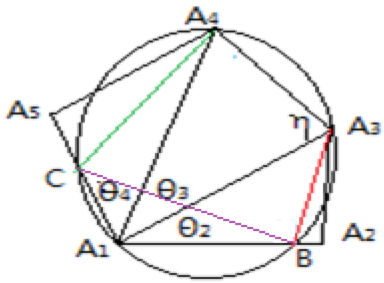

圖 14.

(g) 對圖 13.言，一段對角線 $\overline{A_2A_5}=d_{25}$ ，令角度 $\angle A_1A_2A_5=\kappa$，對 $\Delta A_1A_2A_5$ 言，

由正弦定理得； $d_{25}\sin\kappa=V_5\sin A_1$ ，對圖 14.言，圓周角 $\angle CA_1A_3=\angle CBA_3=\theta_4+\theta_3$

$\Rightarrow\ \angle A_1BC=\angle A_1BA_3-\angle CBA_3=\psi-(\theta_4+\theta_3)=A_2+A_3+\theta_2-\theta_4-\pi$ ，對 ΔA_1BC 言，

$$\overline{BC}=\frac{\overline{A_1C}\cdot\sin A_1}{\sin(\angle A_1BC)}=\frac{-(V_5-\overline{A_5C})\cdot\sin A_1}{\sin(A_2+A_3+\theta_2-\theta_4)}\quad\Rightarrow\quad\overline{BC}=-d_{25}\cdot(1-\frac{\overline{A_5C}}{V_5})\cdot\frac{\sin\kappa}{\sin(A_2+A_3+\theta_2-\theta_4)}$$

，此處 κ 滿足 $\tan\kappa=\dfrac{V_5\sin A_1}{V_1-V_5\cos A_1}$ 的關係式 $\Rightarrow$

$$\overline{BC}=\left\{-d_{25}\cdot\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{\sin\kappa}{\sin(A_2+A_3+\theta_2-\theta_4)}\right\}$$

，則(13-1)式化為；

$$d_{13}d_{14}d_{25}\cdot\left\{\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin\kappa}{\sin(A_2+A_3+\theta_2-\theta_4)}\right\}=V_1d_{13}V_4\cdot\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin A_5}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}+V_1V_5V_3\cdot\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]+V_5d_{14}V_2\cdot\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin A_2}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\tag{16}$$

同樣地，(16)式中的 κ 滿足 $\tan\kappa=\dfrac{V_5\sin A_1}{V_1-V_5\cos A_1}$ 的關係式 。

方程式(16)式就是第 1 類的一般形平面凸五邊形類托勒密定理狹義方程式！

(h) 方程式(16)式的相關性回溯檢驗

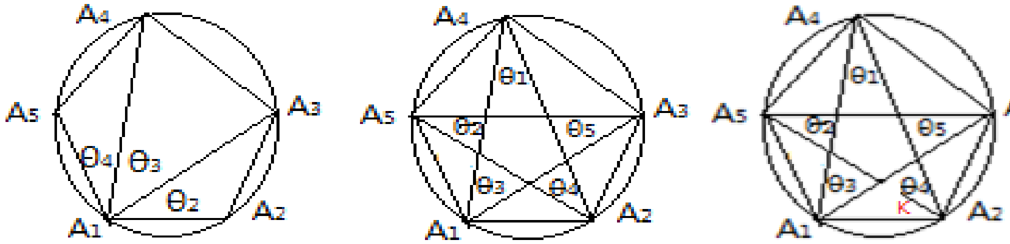

圖 15.

(h1) 由圖 15.清楚的看到圓內接五邊形各頂角的合分角關係為 $A_1=\theta_4+\theta_3+\theta_2$，$A_2=\theta_5+\theta_4+\theta_3$，$A_3=\theta_1+\theta_5+\theta_4$，$A_4=\theta_2+\theta_1+\theta_5$，$A_5=\theta_3+\theta_2+\theta_1$，而右圖的圓內接五角星形內表明出 $\theta_5+\theta_4+\theta_3+\theta_2+\theta_1=\pi$ ，所以，方程式(16)式中的

$$A_3+\theta_3+\theta_2=\theta_5+\theta_4+\theta_3+\theta_2+\theta_1=\pi \quad\Rightarrow\quad \sin(A_3+\theta_3+\theta_2)=0 \qquad \text{(h-1)}$$

$$A_2+A_3+\theta_3+\theta_2=A_2+\theta_5+\theta_4+\theta_3+\theta_2+\theta_1=\pi+A_2 \quad\Rightarrow$$

$$\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)=\sin(\pi+A_2)=-\sin A_2\neq 0 \qquad \text{(h-2)}$$

$$A_2+A_3+A_5+\theta_2=2(\theta_5+\theta_4+\theta_3+\theta_2+\theta_1)=2\pi\Rightarrow\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)=0 \qquad \text{(h-3)}$$

$$A_2+A_3+\theta_2=\theta_5+\theta_4+\pi=\pi-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+\pi=2\pi-A_5$$

$$\Rightarrow\quad \sin(A_2+A_3+\theta_2)=\sin(2\pi-A_5)=-\sin A_5\neq 0 \qquad \text{(h-4)}$$

$$A_2+A_3+\theta_2-\theta_4=\theta_5+\pi \quad\Rightarrow\quad \sin(A_2+A_3+\theta_2-\theta_4)=-\sin\theta_5=-\sin\kappa \qquad \text{(h-5)}$$

(h2) 如果令平面凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 的 5 個頂點共圓，則將上述的(h-1)式、(h-2)式、(h-3)式、(h-4)式、(h-5)式等五式一起同時代入方程式(16)式中，(16)式中所有[ ]內的項都將退化成為 1，使方程式(16)式蛻變成方程式(13)式，是故方程式(16)式實已涵蓋統一了方程式(13)式，讓(13)式成為(16)式的特例！相關性驗證完成。

[2] 第 2 類圖形如下圖 16.，頂點 A_2 落於圓的外側且頂點 A_5 落於圓的內側；

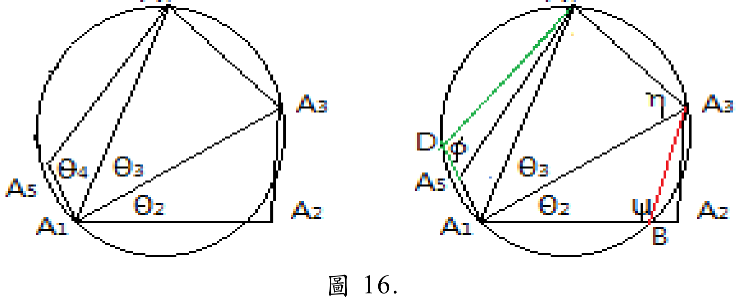

圖 16.

[3] 第 3 類圖形如下圖 17.，頂點 A_2 落於圓的內側且頂點 A_5 落於圓的外側；

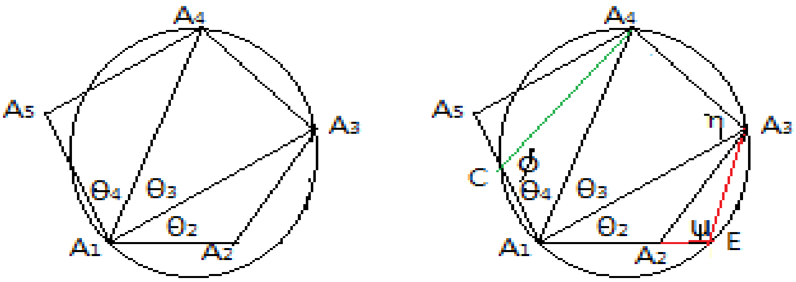

圖 17.

[4] 第 4 類圖形如下圖 18.，A_1、A_3、A_4 共圓而頂點 A_2、A_5 皆落於圓的內側；

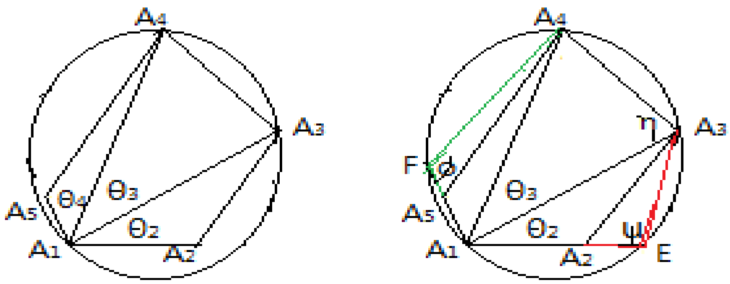

圖 18.

再仿效上述第 1 類型圖形內完整推演運算過程，這第 2 類、第 3 類、第 4 類圖形必也得證出完全相同的方程式(16)式。在此省略這三類圖形的演繹證明流程。

[5] 方程式(16)式型態裡有 2 個 [ ] 的修正項及 3 個分式項，現在要解讀此修正項的意義；

第 1 個修正項是 $\left[1-\dfrac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]$，請參考圖 12.、圖 13.、圖 14.、圖 15.、圖 16.、圖 17.、圖 18.，[ ]內的 $\dfrac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}$ 分式項乃表示線段 $\overline{BA_2}$、$\overline{EA_2}$ 與 $\overline{A_1A_2}=V_1$ 的比值，而 $1-\dfrac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}$ 則表示著大於 1 或小於 1 的正實數，乘上這修正項正實數將有放大或縮小數量、線段的效果，使得修正好的線段 $\overline{A_1B}$、$\overline{A_1E}$ 恰能成為新構的輔助形圓內接五邊形的一個有效邊長！同理，另外第 2 個

修正項也扮演著重要且具備相同功能意義的就是 $\left[1-\dfrac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]$ 。

而 3 個分式項：$\dfrac{-\sin\kappa}{\sin(A_2+A_3+\theta_2-\theta_4)}$、$\dfrac{-\sin A_2}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}$、$\dfrac{-\sin A_5}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}$ 也同時扮演了正實數有放大或縮小數量、線段的效果，使得修正好的線段恰能成為新構圖圓內接五邊形的有效邊長。

綜合以上 4 種類型詳盡的推理引證與檢驗，確認了美妙嚴謹的方程式(16)式即為前所未知而令人新奇的一般形平面凸五邊形類托勒密定理狹義方程式！同時又確認；一般形平面凸五邊形與圓內接五邊形的類托勒密定理狹義方程式(16)式與(13)式兩者在選取 3 頂點 A_1、A_3、A_4共圓的條件下是可以互相推演轉換。

[6] 現在要將一般形平面凸五邊形的方程式(16)式以縮減圖形法來導證出一般形平面凸四邊形的類托勒密定理狹義方程式(15)式。以下為縮減證明的詳細過程；

(6a) 對方程式(16)式等號左側的單一項先以圖 13.的 $d_{25}\sin\kappa=V_5\sin A_1$ 作轉換，將

$$d_{13}d_{14}d_{25}\cdot\left\{\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin\kappa}{\sin(A_2+A_3+\theta_2-\theta_4)}\right\}$$ 轉換變動成

$$d_{13}d_{14}V_5\cdot\left\{\left[1-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{V_5\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin A_1}{\sin(A_2+A_3+\theta_2-\theta_4)}\right\}$$ ，再運算成；

$$d_{13}d_{14}\cdot\left\{\left[V_5-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin A_1}{\sin(A_2+A_3+\theta_2-\theta_4)}\right\}$$ ，則(16)式轉化成

$$d_{13}d_{14}\cdot\left\{\left[V_5-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin A_1}{\sin(A_2+A_3+\theta_2-\theta_4)}\right\}=V_1d_{13}V_4\cdot$$

$$\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin A_5}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\quad+\quad V_1V_3\cdot$$

$$\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot\left[V_5-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\quad+\quad d_{14}V_2\cdot$$

$$\left[V_5-\frac{V_4\sin(A_2+A_3+A_5+\theta_2)}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)}\right]\cdot\frac{-\sin A_2}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)} \tag{16-1}$$

(6b) 將圖 13.凸五邊形的頂點 A_5 平移趨近到 A_1，為使消除 $\Delta A_4A_5A_1$ 而縮減成一般形平面凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，如下圖 19.，則 $d_{14}=V_4$，$\theta_4=0$，$A_5=0$，$V_5=0$，

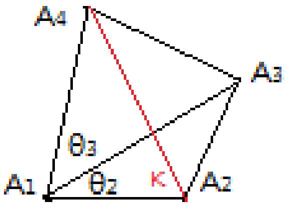

圖 19.

再將 $\theta_4=0$，$A_5=0$，$V_5=0$ 直接代入方程式(16-1)式中，化簡運算得下式；

$$d_{13}d_{14}\cdot\frac{V_4\sin A_1}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)} = V_1V_3\cdot\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot\left[-V_4\right]+d_{14}V_2\cdot V_4\cdot$$

$$\frac{\sin A_2}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)} \tag{16-2}$$

(6c) 再將 $d_{14}=V_4$ 代入上列方程式(16-2)式中，約去公因式 V_4，得下式；

$$d_{13}\cdot\frac{V_4\sin A_1}{\sin(A_2+A_3+\theta_2)} = V_1V_3\cdot\left[1-\frac{V_2\sin(A_3+\theta_3+\theta_2)}{V_1\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)}\right]\cdot\left[-1\right]+V_4V_2\cdot$$

$$\frac{\sin A_2}{\sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)} \tag{16-3}$$

(6d) 見圖 19.，將上列方程式(16-3)式中的各角度組合作轉換，其過程如下；

$$A_2+A_3+\theta_2=2\pi-A_4-\theta_3 \;\Rightarrow\; \sin(A_2+A_3+\theta_2)=-\sin(A_4+\theta_3) \tag{6d*-1}$$

$$A_3+\theta_3+\theta_2=2\pi-A_2-A_4 \;\Rightarrow\; \sin(A_3+\theta_3+\theta_2)=-\sin(A_2+A_4) \tag{6d*-2}$$

$$A_2+A_3+\theta_3+\theta_2=2\pi-A_4 \;\Rightarrow\; \sin(A_2+A_3+\theta_3+\theta_2)=-\sin A_4 \tag{6d*-3}$$

將(6d*-1)式、(6d*-2)式、(6d*-3)式三者一起同步代入(16-3)式中，化簡得下式；

$$d_{13}\cdot\frac{V_4\sin A_1}{\sin(A_4+\theta_3)}=V_1V_3\cdot\left[1-\frac{V_2\sin(A_2+A_4)}{V_1\sin A_4}\right]+V_2V_4\cdot\frac{\sin A_2}{\sin A_4} \tag{16-4}$$

再觀察圖 19.，對 $\Delta A_1A_2A_4$ 言，必有關係式 $d_{24}\sin\kappa=V_4\sin A_1$ 存在，代入(16-4)式中，

得；$$d_{13}d_{24}\cdot\frac{\sin\kappa}{\sin(A_4+\theta_3)}=V_1V_3\cdot\left[1-\frac{V_2\sin(A_2+A_4)}{V_1\sin A_4}\right]+V_2V_4\cdot\frac{\sin A_2}{\sin A_4} \tag{16-5}$$

，此處 κ 滿足 $\tan\kappa=\dfrac{V_4\sin A_1}{V_1-V_4\cos A_1}$ 的關係式 。

此方程式(16-5)式即為一般形平面凸四邊形的類托勒密定理狹義方程式(15)式。

綜上所述即確認：推廣的一般形平面凸五邊形的類托勒密定理狹義方程式(16)式實已完全涵蓋統合了圓內接五邊形、一般形平面凸四邊形及圓內接四邊形等 3 種圖形的類托勒密定理狹義方程式(13)式、(15)式、(1)式。

參、結 論

1. 綜合全文推證演繹的結果再來對照比較作者之前所發表的一般形平面凸五邊形、一般形平面凸四邊形等兩相鄰交叉對角線長度乘積的餘弦表示式方程式，以歸納列式比對如下，可以清楚分辨出其 3 類方程式的相異特殊型態結構；

(1a) 平面凸四邊形其 3 類方程式的相異特殊型態結構分別明列於下；

i. 圓內接四邊形托勒密定理狹義方程式； $$d_{13}d_{24}=V_1V_3+V_2V_4 \tag{1}$$

ii. 推廣的一般形平面凸四邊形的類托勒密定理狹義方程式(15)式；

$$d_{13}d_{24}\cdot\frac{\sin\kappa}{\sin(A_4+\theta_3)}=V_1V_3\cdot\left[1-\frac{V_2\sin(A_2+A_4)}{V_1\sin A_4}\right]+V_2V_4\cdot\frac{\sin A_2}{\sin A_4} \tag{15}$$

需註明的是(15)式中的 κ 滿足 $\tan\kappa=\dfrac{V_4\sin A_1}{V_1-V_4\cos A_1}$ 的關係式 。

iii. 推廣的一般形平面凸四邊形的托勒密定理餘弦表示式方程式；

$$d_{13}{}^2d_{24}{}^2=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4) \tag{17}$$

(1b) 平面凸五邊形其 3 類方程式的相異特殊型態結構分別明列於下；

i. 圓內接五邊形托勒密定理狹義方程式；

$$d_{13}d_{14}d_{25} = V_1 d_{13} V_4 + V_1 V_5 V_3 + V_5 d_{14} V_2 \tag{13}$$

ii. 推廣的一般形平面凸五邊形的類托勒密定理狹義方程式(16)式；

$$d_{13}d_{14}d_{25} \cdot \left\{ \left[1 - \frac{V_4 \sin(A_2 + A_3 + A_5 + \theta_2)}{V_5 \sin(A_2 + A_3 + \theta_2)}\right] \cdot \frac{-\sin\kappa}{\sin(A_2 + A_3 + \theta_2 - \theta_4)} \right\} = V_1 d_{13} V_4 \cdot$$

$$\left[1 - \frac{V_2 \sin(A_3 + \theta_3 + \theta_2)}{V_1 \sin(A_2 + A_3 + \theta_3 + \theta_2)}\right] \cdot \frac{-\sin A_5}{\sin(A_2 + A_3 + \theta_2)} \quad + \quad V_1 V_5 V_3 \cdot$$

$$\left[1 - \frac{V_2 \sin(A_3 + \theta_3 + \theta_2)}{V_1 \sin(A_2 + A_3 + \theta_3 + \theta_2)}\right] \cdot \left[1 - \frac{V_4 \sin(A_2 + A_3 + A_5 + \theta_2)}{V_5 \sin(A_2 + A_3 + \theta_2)}\right] \quad + \quad V_5 d_{14} V_2 \cdot$$

$$\left[1 - \frac{V_4 \sin(A_2 + A_3 + A_5 + \theta_2)}{V_5 \sin(A_2 + A_3 + \theta_2)}\right] \cdot \frac{-\sin A_2}{\sin(A_2 + A_3 + \theta_3 + \theta_2)} \tag{16}$$

需註明的是(16)式中的 κ 滿足 $\tan\kappa = \dfrac{V_5 \sin A_1}{V_1 - V_5 \cos A_1}$ 的關係式。

iii. 一般形平面凸五邊形兩相鄰交叉對角線長度乘積的餘弦表示式方程式；

$$(d_{13}d_{24})^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 + (V_2V_5)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2 + A_4)$$

$$- 2V_5V_1V_2V_3\cos(A_1 + A_3) - 2V_2^2V_4V_5\cos A_5 \tag{18}$$

方程式(17)式、(18)式的證明需詳閱參考文獻表列中的篇目：平面凸多邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式(上)與(下)全文，必能明辨其內涵。也可知悉任一種平面凸多邊形都能尋找出其 3 類方程式的相異特殊型態結構。

2. 因任意三個不共直線的點必定共圓，使得適當選定多邊形中三個頂點共圓的特徵要領成為思考研析的重要方針，亦是引導推理解題的有效概念。當選取多邊形中不同組三個頂點共圓的情況時會推演出相異的方程式結果，而這些結果應該是類同的，只是相異修正項分別出現在方程式內不同位置的轉換。所以，一般形平面凸多邊形各圖形都必將證明出 2 個或 2 個以上的相異型態內涵方程式。

3. 對照比較圓內接多邊形與一般形平面凸多邊形的相對應方程式內涵，發現非常有趣的

事是；第 i.類圓內接多邊形方程式內涵裡僅單純出現通過被選定頂角 A_1 的所有對角線長及頂角 A_1 的對應弦長 d_{2n} 和各邊長等乘積組合，而後者第 ii.類方程式內涵裡卻出現了多邊形的多個頂角與分角的各相異組合，也多形成好幾個修正項。修正項內盡是由 sine 函數形成分式項組合。第 iii.類方程式內涵裡每一項都顯示出長度四次方的量綱，而角度僅呈現頂角組合的 cosine 函數型。相對地，後者 ii.與 iii.類方程式裡的內涵更具豐富與多樣化。本文為作者承續圓內接多邊形頂角的合分角正弦值、餘弦值關係方程式研究後的另一延伸自我發想的探討作品，在此希望拋出一個研討方向以導引探索出最佳方案來推演出廣泛的一般形平面凸多邊形頂角的合分角正弦、餘弦值與對角線長、各邊長等關係方程式！

參考文獻

李輝濱，平面凸多邊形內臨近周邊兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式。**科學教育月刊 422 期，423 期**，2019 年 9、10 月出版發行。

李輝濱，平面凸六邊形內中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。**數學傳播季刊 169 期，2019 年 3 月**出版發行。

李輝濱，平面凸七邊形內中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。**科學教育月刊 417 期，2019 年 4 月**出版發行。

蔡聰明，**數學拾貝---星空燦爛的數學**，2000，三民書局。

林聰源，**數學史---古典篇**，1995，凡異出版社。

項武義，**基礎幾何學**，2011，五南圖書出版公司。

E.W. Hobson : *A treatise on plane and Advanced trigonometry*, Dover , 1957 .

Z.A. Melzek : *Invitation to geometry*, John Wiley and Sons , 1983 .