

---

# 國小五年級數學非例行性問題 非形式推理之個案研究

詹勳國<sup>1\*</sup> 蘇宇祥<sup>2</sup>

<sup>1</sup>國立屏東大學 應用數學系

<sup>2</sup>高雄市立小港國民小學

## 摘要

本研究探討國小五年級學生面對數學非例行性問題的表現，分析數學探究活動實施前後，非形式推理數學內容面向、層級與歷程的差異與改變。研究方法為質性研究輔以量化分析，先施以前測，再進行三次數學探究活動，最後進行後測。參與者為 1 位教師和 18 位學生。藉由分析問卷、活動紀錄與晤談紀錄發現：經過數學探究活動後，數學內容面向增加「因數倍數面向」、「圖像聯想推理面向」及「數字關係推理面向」。因為學生推理時引用許多證據建立主張，並產生反駁，所以推理層級組成更加充分。最後，選擇 6 位學生進行個案研究，非形式推理歷程分為第一類逐漸變為複雜、第二類立場改變、第三類由複雜變為簡單後再變為更加複雜。學生透過含有討論與思考的活動才能有效增進推理的解題能力，而探究活動是其中一個適合讓學生增進推理能力的教學方式。

**關鍵詞：**非形式推理、數學非例行性問題、國小高年級學生

## 壹、緒論

「數學」有多種解釋與定義，其中之一為「數量形和運算，與其基礎及之後的延伸與應用」，「例行性」數學題目指的是「遇到問題立即可以使用經驗程序解題」，大部分的數學練習題、習作與考試題目都屬於這一類，評量檢驗受試者執行標準作業程序的能力，包含基本連結力、執行、耐心與細心。

另一類為「非例行性」數學題目，受

試者一時之間無法立即使用任何程序解題，少數學校考試題目有這類的性質，競賽式的題目大部分都屬於這一類，檢驗受試者「數學解題」的能力。按照波利亞的解題程序理論四個階段「了解題意、擬定計畫、執行計畫、回顧驗證」(Polya, 1945)，擬定計畫指的是連結解題工具，例如：找數學內容面向、圖解、方程式、表格、猜測與檢驗...等。這是「數學解題」能力的核心。

台南第二中學教師甄試出了一道「猜年齡」數學考題難倒網友(張榮祥, 2015):

---

\* 為本文通訊作者

「A、B 兩男士好奇地詢問 C 女士的年齡，C 女士列出 11 個可能的答案：35、36、38、42、45、46、51、55、57、61、62。」「接著 C 女士將她年齡的十位數字告訴 A 男士，將她年齡的個位數字告訴 B 男士。A 男士說：『我不知道 C 的年齡，但我想 B 也不知道。』B 男士說：『我原本也不知道 C 的年齡，但現在知道了。』A 男士說：『哦，那現在我也知道了。』請問 C 女士的年齡是幾歲。」，這問題改編自 2015 年針對 14 歲新加坡與亞洲奧林匹亞競試的題目 (Cheryl's Birthday)。

解答之一：首先，A 男士說：『我不知道 C 的年齡』，這句無法推理出任何訊息，第二句『但我想 B 也不知道』可以推理出女士年齡十位數字不可能是 3 與 5，因為若是 3 與 5，38 與 57 的個位數只出現一次，B 男士就有可能知道年齡。因此可知 A 男士被告知十位數 4 或 6。接著，B 男士說：『我原本也不知道 C 的年齡，但現在知道了』，可見聽到 A 男士說明後，代表十位數 4 或 6 的個位數必須是唯一，B 男士才會回答知道，那麼答案就是 61 歲。解題方法是分析推理法，不是嚴格的「三段式」推理，而是「非形式推理」(informal reasoning)。這題是標準的非例行性題目，國小高年級可以「了解題意」，並且理解題目要求選擇一個正確年齡，因此研究選擇這題作為非例行性數學問題。

非形式推理具有非結構的特性 (Sadler, 2004)，屬於生活慣用的思考歷程，Means 與 Voss (1996)和 Kuhn (1991)

表示非形式推理是將對自己的主張提出反論點或重新評估的重要能力。非形式推理重視個人的批判思考能力 (Sadler, 2004; Osborne, Erduran, & Simon, 2004; Wu & Tsai, 2007)，2000 年開始非形式推理逐漸受到教育界的重視 (Driver, Newton, & Osborne, 2000; Osborne, Erduran, & Simon, 2004)，國內也陸續有許多的研究(李松濤、林煥祥、洪振方，2010。林樹聲、黃柏鴻，2009。林宗進、林樹聲、陳映均，2010。林樹聲、黃柏鴻，2009。張緯文、林樹聲，2014。靳知勤、楊惟程、段曉林，2010。劉湘瑤、李麗菁、蔡今中，2007。蘇衍丞、林樹聲，2012)。包含的科目有科學類、社會議題與作文論證，獨缺數學，可能的原因之一是：數學解答往往要求黑白分明，容易形成題型，立即變成「例行性」問題，失去非形式推理問題特性。

數學非形式推理要求學生能用數學知識提出清晰、價值、能修正的主張、論點、證據、反論點、反駁等推理層級行動，若是過於容易的題目，往往形成壓倒性答案，然後鴉雀無聲，無法進行討論。能促發這樣的問題難尋，「猜年齡」問題雖然答案困難，但是關於實際年齡(整數)情境問題，可以使用生活化，非邏輯非形式語言進行溝通討論，國小中高年級都可以「了解題意」，藉此探究學生數學類的解題與論證歷程。

九年一貫數學領域(教育部，2008)的理念強調演算、抽象及推論三大能力，其中推論能力解釋為「發展邏輯思考，用

來分析證據、提出支持或否定假設的論點」，而落實能力指標為

「C-C-01 能理解數學語言（符號、用語、圖表、非形式化演繹等）的內涵。」其中第一個 c 指的是連結，第二個 c 指的是溝通，沒特別標示年級是一至九年級都需要發展此能力，教科書沒有針對這指標設計專門單元，目前沒有相關研究。十二年國民基本教育課程綱要數學領域（教育部，2016）指標為

「r-III-3 觀察情境或數學內容面向中的數量關係，並用文字或符號正確表述，協助推理與解題」

r 代表關係類別，III 代表國小高年級，3 為流水號。十二年國教數學領域將「推理與解題」正式安排至高年級學習。這個安排恰當嗎？教材教法要如何安排？因此，有必要進行國小高年級學生數學非例行性問題非形式推理解題之研究。

大部分非形式推理都以質性方式研究（Sadler, 2004; Sadler & Zeidler, 2004; 2005），Wu & Tsai（2007）針對學生的非形式推理進行質量兼具的研究，以定性指標與定量測量分析，本研究參考此架構，設計對數學題目探討綜合分析架構。將定性指標分為數學內容分析以及推理層級，再以計算數學內容面向次數與推理層級之分數作為定量分析。探討數學探究活動促使學生深度思考的程度，應用於數學教室瞭解數學探究活動如何影響學生非形式推理的表現。

本研究目的為探討國小五年級學生非

例行性數學問題非形式推理的數學內容、層級與歷程，研究問題為：

- (一) 研究對象對於非例行性數學問題非形式推理有哪些數學面向？
- (二) 研究對象對於非例行性數學問題非形式推理的推理層級為何？
- (三) 研究對象對於非例行性數學問題非形式歷程？經過數學科探究教學前後的差異與改變為何？

## 貳、理論架構

本研究採取推理產物（數學內容面向與推理層級）定性與定量評量學生推理表現，推理產物隨著探究活動的改變與參與度說明推理歷程。

### 一、非形式推理層級與數學推理內容面向

推理是按邏輯規範推理思考的歷程，或說是解決問題時合理思考的歷程（張春興，1989），可以分為形式推理和非形式推理。「論證」是指一個人利用證據去支持自己或反對他人意見、主張或結論的過程，可以藉由口語或書寫來表達，因而有所謂的口語論證和書寫論證。學者 Kuhn（1992）認為「論證是指一個人利用證據去支持自己或反對他人意見、主張或結論的過程」。從學生提出主張與理由、反論點、支持論點、證據等質與量的表現上，可以看出論證能力，支持的論點，若能針對反論點的理由提出反駁的學生，更被視為具有較高層次的論證能力（Sadler &

Donnelly, 2006; Zeidler, Osborne, Erduran, Simon, & Monk, 2003)。

廣義的非形式推理類似「辯論」或「論證」，各科都需要用它，例如：國文文章的評議，社會議題的剖析，自然科學的驗證，哲學的辯證等，探討小六學生社會性科學議題論證技能之差異與改變的研究都呈現，學生課堂中參與論證的發言者能提出論點、反論點，或使用反駁，可以使用寫作進行非形式推理與論證(林樹聲、黃柏鴻，2009；蘇衍丞、林樹聲，2012；張緯文、林樹聲，2014；靳知勤、楊惟程、段曉林，2009)。

研究區分為二大類，一是各科共通的

「非形式推理層級」，又稱品質、策略、技巧。依據 Wu 與 Tsai (2007) 根據先前學者的研究歸納成「主張」、「證據」、「反主張」、「反駁」四面向，每一面相又可以細分指標，進而可以量化，例如：提出完整主張架構、無基本數學概念錯誤、提出客觀支持主張的論點製作成活動評分規準。Wu 與 Tsai (2007) 提出架構以定性指標與定量測量分析高中學生的非形式推理與議題討論中的決策的結果，本研究參考此架構針對數學科之議題探討，並依照此架構設計出針對數學議題探討之非形式推理綜合分析架構(圖 1)。

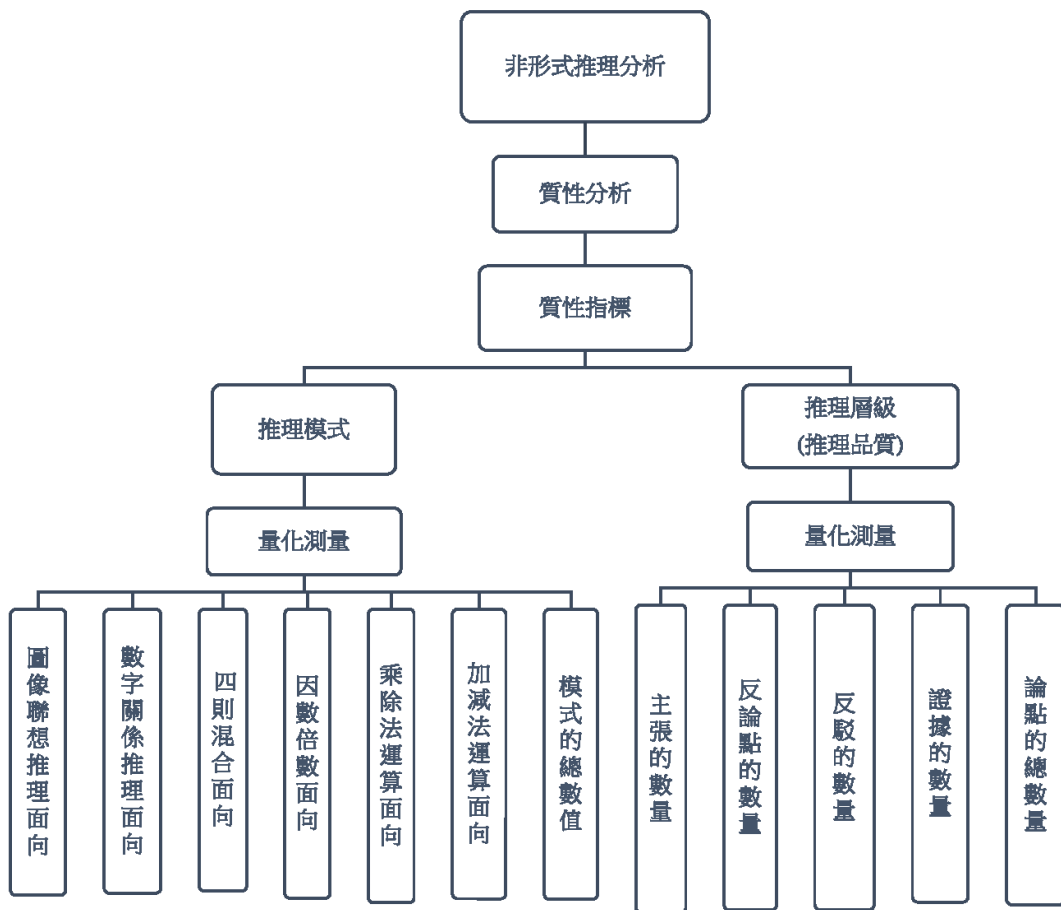


圖 1

另外一大類是數學推理內容面向，論辯的學科內容，學生參與討論時所使用的數學內容，因為討論的題目是關於推理出年齡，和正整數有關，所以會合理「連結」相關的數學知識，數學測驗題目的數學內容面向，依照小學五年級程度，可以有加減法運算面向、乘除法運算面向、因數倍數面向、四則混合面向、數字關係推理面向、圖像聯想推理面向、以上的總次數值。

## 二、非形式推理歷程

2000 年開始非形式推理逐漸受到教育界的重視，並且對於非形式推理有許多的研究(Driver, Newton, & Osborne, 2000; Osborne, Erduran, & Simon, 2004; Sadler, 2004)，教育學者常利用論證分析非形式推理的過程，而論證本身屬於一種非形式推理型態，「論證」本身已成為表徵非形式推理歷程的一項重要工具(李松濤、林煥祥、洪振方, 2010)。Berland 和 McNeill(2010)指出，歷程可由三種不同的面向加以描述，包括(1)教學情境，(2)推理產物，(3)推理過程，並設計歷程架構圖，可由三種不同的面向加以描述，包括推理層級，推理數學內容，推理過程，圖方格越向右，代表學生在該方格內所述的特徵愈複雜。本研究參考 Berland 和 McNeill (2010) 之論證歷程架構修改成數學非形式推理歷程架構圖如圖 2。

## 三、探究式活動

探究式教學來自杜威的教育哲學理念，

知識產生於學生與環境互動，學生沒有問題情境的刺激不會啟發學習，應該藉由孩子好奇心將外面世界帶入教室，並將各種訊息聚焦在學習上面(林秀珍, 2007)。近年研究指出，探究教學法相較於傳統教學法有許多優點，對於學生的自主發展以及自主學習能力有正面的影響，但探究教學法本身也有相對的缺點以及限制(Lawson, 1995)。探究式教學能讓學生主動探索、自主研究，採取議題的探究式活動，可以培養學生批判思考與創造性思考及解決問題的能力。探究式教學之議題討論具有多元、開放的特性，並且牽涉到情意方面的推理與判斷(Sadler & Zeidler, 2005; 林宗進、林樹聲、陳映均, 2010)，能提供學生討論或應用。與非形式推理的能力(靳知勤、楊惟程、段曉林, 2010)，學生處理探究及思考數學科議題時，往往不具有共識，這反而能讓學生討論和辯論的空間，並且能讓學生查閱和判斷資料，進而提出自己論點(劉湘瑤、李麗菁、蔡今中, 2007; 林樹聲、黃柏鴻, 2009)。而形式上分組討論比較適合論證活動，如此可以顯示學生的思考，並讓老師評量與同儕能對話(劉新、林如愷、李秀玉、楊雯仙、張永達, 2006; Duschl & Osborne, 2002) 本研究選擇的數學議題具有以上的特性，符合探究思考議題之範疇，研究對象藉由針對數學內容進行非形式推理的分組討論，過程中將產生不同面向的討論，可以從中培養非形式推理的能力。

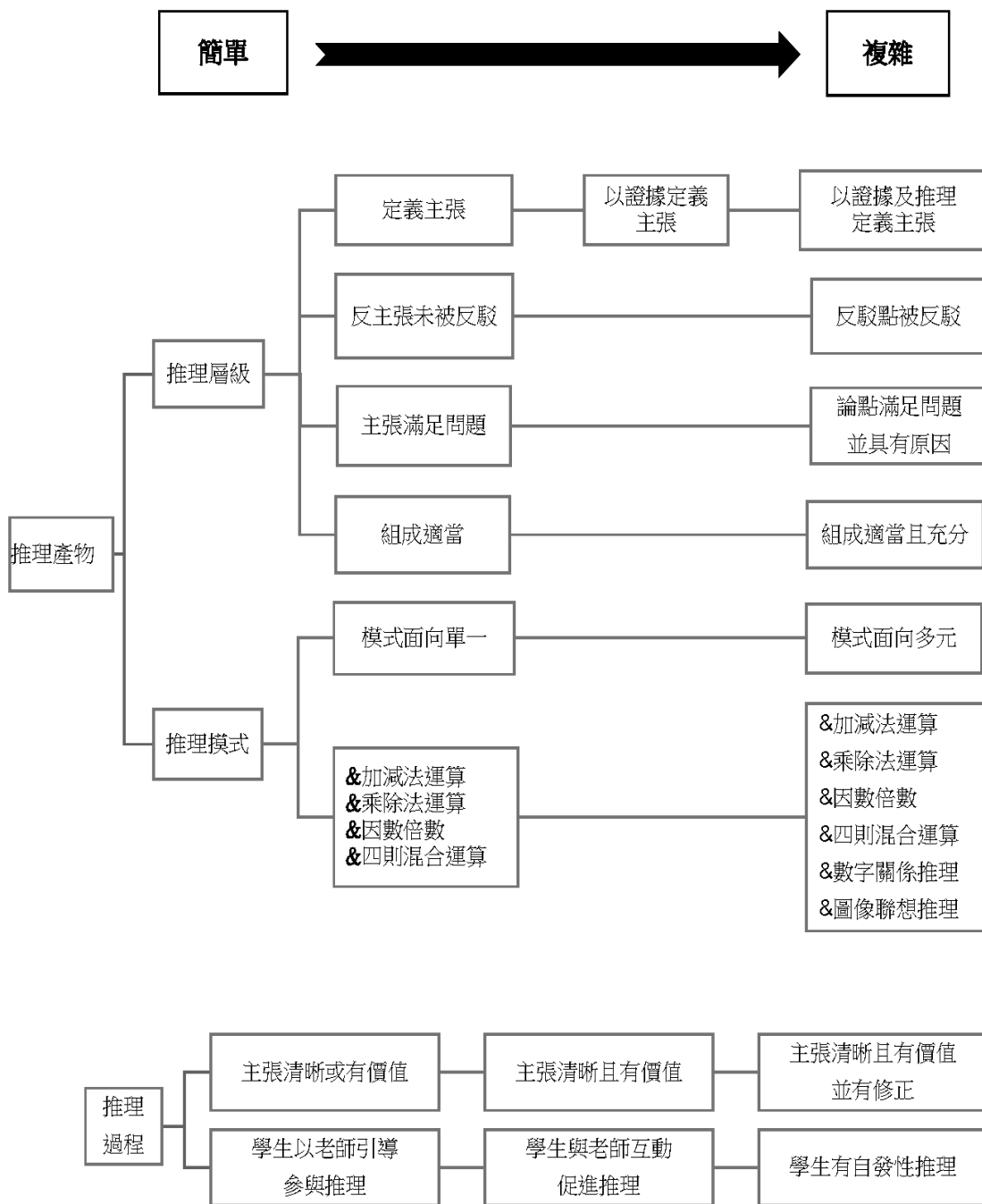


圖 2

探究教學可分為引導式探究以及非引導式探究，引導式探究教師的角色非常重要，重點在設置教學情境以及協助學生進

入探究，鼓勵與指導學生如何推理。非引導式探究學生扮演積極主動的角色，教師只有協助並不給學生指導，期望學生能夠

依自身的能力進行探究，進而培養學習的積極態度。探究問題的開放程度高低可將探究教學區分為驗證式探究、結構性探究、引導式探究與開放式探究四種類型（Colburn, 2004）。王美芬與熊召弟（1995）將探究教學歸納出發現式探究教學法、推理式探究教學法與實驗式探究教學法三種類型。本研究依學習內容之特性，活動設計選擇較偏向於發現式探究教學以及開放式探究教學，藉此提升學生的推理能力並讓學生得到能夠自我學習的能力。

### 參、研究方法

研究者於高雄市某國小五高年級徵求有意願參與研究計畫課程之學生，根據調查該班學生並無進行非形式推理活動的學習經驗，而本研究於研究對象彈性課程時間進行。研究對象為 18 位國小五年級學生，利用前測問卷結果及第一次活動記錄比較學生推理層級之變化，立意取樣挑選前後推理層級差異大、差異小及無差異各 2 位研究對象一共 6 位做為晤談對象，進行個案研究。

研究對象進行前測後將 18 位高年級學生進行異質性分組，各組分別同時在彈性課程上同時進行非形式推理之討論，過程中研究者引導討論，避免學生離題及產生錯誤概念，並且對於討論內容進行總結。討論結束後以立意取樣決定晤談對象進行晤談，討論內容及晤談之逐字稿文本依照研究者設計之分析架構進行分析，依照分析結果歸納學生推理層級及推理歷程之變

化。

先進行前測，分組，第一次非形式推理探究活動，兩週後學生進行第二次非形式推理活動，第二次活動結束後，對第一次推理活動之晤談對象進行第二次晤談，將研究對象重新進行異質性分組，進行第三次 40 分鐘之同步非形式推理，並對第一次推理活動後之晤談對象進行第三次晤談，最後對所有研究對象施以後測，活動結束後進行結果分析，依照前測及後測之分析結果比較研究對象經過非形式推理討論後之變化，並且最後依前測、第一次討論活動、第二次討論活動、第三次討論活動及後測之分析結果歸納出學生在進行非形式推理之推理歷程。

本研究所使用的工具分為晤談大綱、活動評分規準、前測及後測問卷，以上研究工具由研究者參考 Wu 與 Tsai（2007）提出之分析架構針對數學科探究式教學所設計：本研究工具針對數學科探究式活動設計而成，目的在於了解學生進行非形式推理之數學內容面向與層級，提出四個問題，以下為非形式推理前測問卷題目：

問題一：你認為以上题目的解答為何？要如何計算？請說出你的看法和理由？（評測學生「提出主張的能力」）

問題二：承問題一，你是因為什麼原因或證據而有這樣的看法和理由？（探討學生「提出證據」支持其主張的能力）

問題三：若同學跟你有相反的意見，認為

有不同的結果或答案，他可能用哪些理由呢？（評估學生提出「反論點」的能力）。

問題四：承問題三，你會再增加補強什麼理由或證據，來說服同學你的答案或計算方式是正確的？（瞭解學生提出「反駁能力」）。

推理層級分為主張、證據、反駁點及反論點，依照活動評分規準，主要計算研究對象在進行各次非形式推理探究活動之推理層級，推理層級之分數由評分規準針對主張、證據、反論點及反駁進行評分，研究對象各推理片段依評分規準由 4~10 分進行評分，推理片段依據主張、證據、反論點及反駁四個向度進行計算，並且將總分與推理片段之數量進行平均，根據四個向度所得之總分最高 40 分，最低 16 分。

為了使資料具有可信賴性，研究者於資料分析及評分後，另請數學教育碩士研

究生進行相同的資料分析確認，並請數學教育研究領域之專家學者審查，計算評分者間之一致性並且進行修正。研究過程中一共分析前測問卷 18 份、後測問卷 18 份、三次非形式推理討論記錄文本 3 份，於前測及後測中一共分析 144 個推理片段，其中有 37 個片段分析結果不一致，一致度為 74.89%，在三次非形式推理探究活動中一共分析 647 個推理片段，其中有 81 個片段分析結果不一致，一致度為 87.43%，不一致的部分經過研究者及數學教育研究領域之研究生共同討論後，取得共識並酌以修改，研究者資料分析範例如表 1 所示。

經過各次非形式推理活動後，再請學生針對前測所提出的四個問題，寫上經過各次非形式推理後的想法，藉此做為後測問題參考，以了解學生經過非形式推理後對於議題的看法。

表 1、分析範例

| 分析類型 | 內容   | 研究者                  | 研究生                  | 共同討論  |
|------|--|----------------------|----------------------|---|
| 一致   | a2：<br>3+4+5+6=18 十位數<br>可能是偶數。  | 主張（加減法運算面向，5 分）      | 主張（加減法運算面向，5 分）      | 主張（加減法運算面向，5 分）   |
| 不一致  | b2：<br>數字裡面只有 55 是<br>十位數跟個位數相<br>同的，這樣比較有<br>可能兩個人才有可<br>能猜到答案，因此<br>我認為答案是 55。 | 反駁（數字關係<br>推理面向，7 分） | 證據（數字關係<br>推理面向，7 分） | 研究對象引用這<br>段資料來佐證下<br>一段對話中所提<br>出之主張，故判<br>斷為證據（數字<br>關係推理面向，7<br>分） |



半結構式晤談大綱目的在了解學生進行非形式推理的歷程，大綱設計完成後，請數學教育研究領域之專家學者審查並修正以便學生能確切瞭解其內容及用語。晤談於非形式推理活動結束後一對一進行，晤談逐一針對非形式推理活動中該生的論點、反論點、反駁等推理層級與學生討論時所涉及面向之推理數學內容面向予以深入晤談，研究者利用半結構式晤談（semi-structured interviews）以了解學生對於該論點之思考結果。每位學生的晤談時間約為 20~30 分鐘。晤談大綱針對其推理層級與數學內容面向擬訂，例如：你在之前沒有這個主張，為什麼第一次活動後你會改變你的想法呢？

晤談大綱、活動評分規準、前測及後測問卷編製完成後，交由數學教育研究領域之專家學者及研究生審查並修正，以確定內容效度。在質性資料的分析過程中，研究者與研究生比較及分析資料，最後計算研究者間的一致性為 **74.89%**。

研究對象並無非形式推理活動的學習經驗，研究者於活動前以日常生活之題目，先進行一次簡單的非形式推理活動，藉此讓學生了解非形式推理的進行方法，使學生了解非形式推理活動，之後依前測、第一次非形式推理探究活動、第二次非形式推理探究活動、第三次討論活動及後測之順序依序進行研究，最後收集各次活動之文本記錄及晤談之逐字稿文本進行資料分

析。藉由分析各次推理活動、前測、後測及晤談之記錄，了解在經過非形式推理後，學生的推理產物及推理過程之歷程變化。

前測由問卷結果了解學生之推理層級，將研究對象先依推理層級分為高、中、低等級。即 18 人共分為異質之 3 組，每組 6 人（高級推理層級 2 人 A1 及 a1、中級推理層級 2 人 B1 及 b1、低級推理層級 2 人 C1 及 c1），依此類推。研究者選擇 6 位（A1a1A2a2a3b3）晤談，對象進行 3 次半結構式晤談（semi-structured interviews），藉以追蹤並了解 6 位晤談對象推理之歷程變化。三次晤談記錄皆於事後轉譯成逐字稿進行文本分析。後測最後再對全班施以非形式推理之後測，將研究對象之後測文本進行分析，藉由受測結果探討受測同學於各次活動結束後之推理數學內容面向及推理層級的狀況。

本研究分析前測問卷、三次推理活動討論記錄、三次活動後晤談之逐字稿、後測問卷，歸納學生的非形式推理數學內容及層級，以及學生的非形式推理歷程。推理數學內容面向方面預設「加減法運算面向」、「乘除法運算面向」、「因數倍數面向」及「四則混合計算面向」，研究過程中學生提出了「數字關係推理面向」、「圖像聯想推理面向」等不同之面向，研究者根據學生實際研究時提出之面向進行修正或增加，推理數學內容面向範例如表 2。

表 2、推理數學內容面向範例

| 面向       | 範例  |
|----------|---|
| 加減法運算面向  | a2：因為 $3+4+5+6=18$ 十位數可能是偶數。  |
| 乘除法運算面向  | A1：裡面的數字只有 55 可以被 11 整除。  |
| 因數倍數面向   | A1：42、51、36、45 都是 3 的倍數。  |
| 四則混合計算面向 | C3： $57+55=112$ ， $57-55=2$ ， $112-2=110$ ， $110\div 2=55$ ，答案可能是 55。 |
| 數字關係推理   | b2：裡面的數字裡面只有 55 是十位數跟個位數相同的，這樣比較有可能兩個人才有可能猜到答案，因此我認為答案是 55。           |
| 圖像聯想推理   | A2：把有關連的數字連起來之後的圖形看起來很像 2，所以答案應該會有 2。                                 |

## 肆、研究結果

研究開始確認學生了解題意，確認中低程度學生皆能用自己的方式說出題目要求，知道要在數字中選擇一個答案。

### 一、數學內容面向的改變與推理探究活動反省

經過三次非形式推理探究活動，第一組發言次數較前兩次討論活動多，提出論點之面向較前兩次討論活動多元，但討論之面向集中於「加減法運算面向」。第二組論點的面向增加，發言次數提高，討論過程提出之面向偏向於「加減法運算面向」。第三組論點的面向多元，討論過程面向廣泛，並無特別集中於單一面向，主要集中於「加減法運算面向」及「乘除法運算面向」。綜合三次非形式推理探究活動，提出論點主要集中於「加減法運算面向」以及「乘除法運算面向」上，第三次非形式推

理探究活動時，研究對象皆有提出「因數倍數面向」、「四則混合計算面向」、「數字關係推理面向」及「圖像聯想推理面向」，雖然主要還是以「加減法運算面向」及「乘除法運算面向」為主。

表 3 為研究對象於各次探究活動提出各討論面向之人數分佈，前測時研究對象所討論的面向較少，由於數學單元相關學習次序，以及數學單元之熟練度，多人提出「加減法運算相關面向」，在非形式推理活動的過程中，研究對象因為互相討論不同的論點，而產生多元的討論面向，但第二次討論活動時，因為對於特定面向進行深入的討論，而使得推理數學內容面向的面向相對減少。後測時研究對象整理前三次討論中的不同面向之論點，能產生較多的推理數學內容面向之面向。因為數學單元相關學習次序，以及數學單元學習之熟練度，所以討論所涉及之面向仍多偏向於「加減法運算面向」。

表 3、探究活動討論數學面向人數分佈

|        | 前測 |     | 第一次推理活動 |     | 第二次推理活動 |     | 第三次推理活動 |     | 後測 |     |
|--------|----|-----|---------|-----|---------|-----|---------|-----|----|-----|
|        | 人數 | 比例  | 人數      | 比例  | 人數      | 比例  | 人數      | 比例  | 人數 | 比例  |
| 加減法運算  | 16 | 89% | 14      | 78% | 13      | 72% | 17      | 94% | 16 | 89% |
| 乘除法運算  | 14 | 78% | 14      | 78% | 12      | 67% | 16      | 89% | 14 | 78% |
| 因數倍數   | 0  | 0%  | 4       | 22% | 0       | 0%  | 1       | 6%  | 1  | 6%  |
| 四則混合計算 | 7  | 39% | 5       | 28% | 3       | 17% | 10      | 56% | 9  | 50% |
| 數字關係推理 | 0  | 0%  | 3       | 17% | 0       | 0%  | 10      | 56% | 6  | 33% |
| 圖像聯想推理 | 0  | 0%  | 1       | 6%  | 2       | 11% | 4       | 22% | 3  | 17% |
| 總人次    | 37 |     | 41      |     | 30      |     | 58      |     | 49 |     |

佈題之後先確認所有成員了解題意，接著並不給任何提示，先讓學生回答紙筆問卷，優點是在進行探究討論之前，先「紙筆思考」，類似「學習單」，再帶著已經有初步推理的想法主張進入活動，讓每個學生更容易參與討論，老師不站在講台，一直巡視教室各組，必要時介入小組工作並給予支持，提供相同的機會給予分享、回饋。監控個別發展，若遇到非數學問題，給予淡化處理，有時要檢查學生是否了解其他學生提出的意見與解法，提醒學生要傾聽，注意禮貌。執行的精神去時做到以學生為中心，因為整個過程並沒有出現壓倒性的解答，每一種提出的思考都要求學生理解與思考合理性，並作出反應，建議有沒有證據？合理嗎？強調理解每種說法的理解。

## 二、推理層級

推理層級分為主張、證據、反駁點及反論點，這四個向度對依據「非形式推理架構設計評分規準」進行評量，表示研究對象推理層級的成績，評分數據能比較研究對象於各次非形式推理活動之推理層級之變化。第一組第一次的推理層級低於前測，但後測的推理層級則明顯較高，研究對象 C1 及 c1 後測的推理層級低於前測及各次討論活動，而其餘研究對象在後測的推理層級表現皆高於前測及各次討論活動。第二組各次討論活動的推理層級高於前測，但是後測的推理層級低於討論活動，C2 的推理層級在各次活動中逐步增加。第三組後測中的推理層級較高，B3、b3 及 c3 的推理層級在各次活動中逐步增加，研究對象 A3 及 a3 的推理層級表現與第一組相似，後測的推理層級都高於前測。圖 3 為

18 位研究對象於前測三次非形式推理探究活動、後測之推理層級分析結果總平均，研究對象於各次推理活動之推理層級平均表現，比較各次平均表現的變化能夠知道研究對象於各次推理活動中之推理層級變化趨勢。

前測之推理層級平均表現高於第一次非形式推理探究活動中的表現，但研究對象在經過第一次非形式推理探究活動後推理層級在各次討論活動中逐步增加，而到後測時研究對象的推理層級平均表現提升，而研究對象在後測時推理層級平均評分最高。

### 三、非形式推理之推理歷程

參考非形式推理之推理歷程架構，歸納研究對象於各次活動之推理歷程整理成圖，圖中顏色越深代表學生在該方格內所

述的特徵愈複雜，能夠了解研究對象於各次非形式推理活動之推理歷程之變化。

研究對象 a1 前測、三次非形式推理探究活動與後測之表現，推理數學內容面向增加，推理層級變的更加複雜，推理歷程逐漸由簡單變為複雜。第一次晤談 a1 認為第一次討論活動後自己的論點較為正確，討論後主張沒有太大的改變，但討論所涉及的面向增加，推理層級也變為更加複雜。

研究者：「在經過討論之後，那你的看法有改變嗎？」

a1：「我覺得答案應該是 61，感覺其他人提出的答案不是對的，我的答案是用刪去法得到的，其他人沒有說出比較好的理由，所以我覺得我的想法是對的。」(2017/04/11, a1)

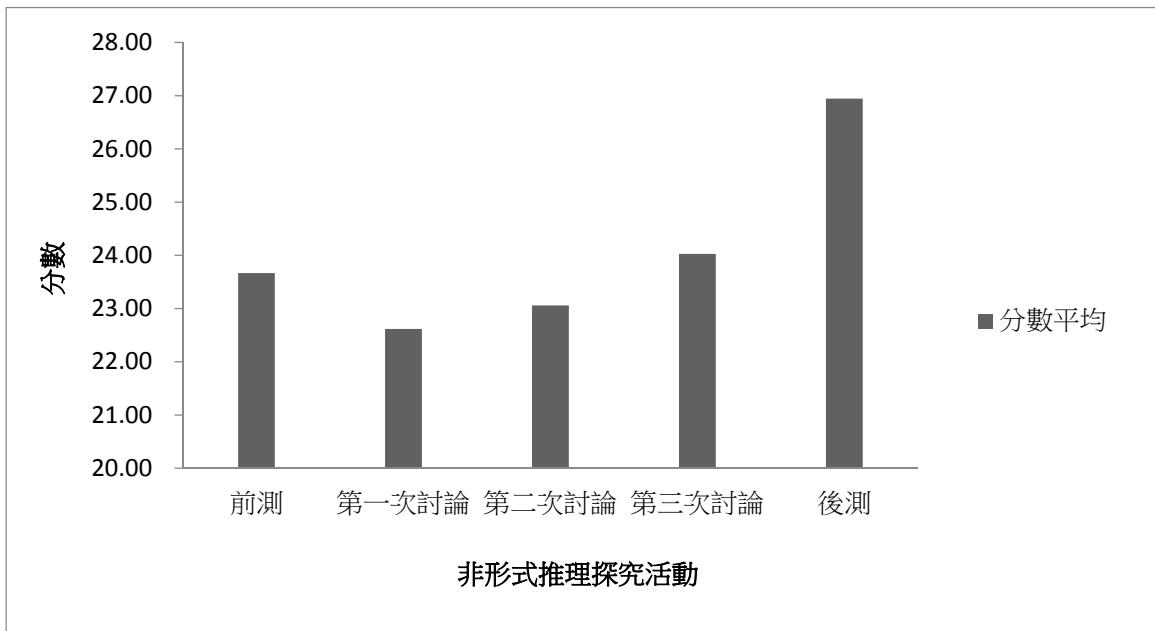


圖 3、各次探究活動推理層級總平均



第二次晤談，a1 仍然贊同自己的論點，對於議題的概念更加固定，並且對於議題進行主動推理。

研究者：「在經過討論之後，你更加堅持自己的想法嗎？」

a1：「對，大家討論之後，我有跟其他人說我的方法，他們覺得我的答案比較有可能，比較相信我的答案，不過感覺 55 也蠻有可能的。」  
(2017/04/21, a1)

題的看法沒有太大的改變，論點更加充分且增加了許多支持自己論點的證據。

研究者：「最後你認為討論題的答案應該是多少？」

a1：「我還是覺得答案是 61，原因跟上次一樣，我跟其他人討論之後他們也覺得我的答案是對的，我覺得應該沒有錯，本來覺得 55 好像有可能，可是大家只是說因為他數字重複出現比較好猜。」(2017/05/08, a1)

第三次晤談，a1 贊同自己的論點，對於議

整理 a1 的歷程如圖 4。

| 推理歷程 | 複雜度  |  | 簡單 $\longrightarrow$ 複雜                                   |  |  |  |
|------|------|--|---|--|--|--|
|      | 項目特性 | 前測   | 第一次非形式推理活動  | 第二次非形式推理活動   | 第三次非形式推理活動   | 後測   |
| 推理層級 | 定義主張 | 以證據定義主張  | 以證據定義主張   | 以證據定義主張  | 以推理及證據定義主張   | 以推理及證據定義主張   |
|      | 反駁論點 | 無反駁  | 具有反駁  | 具有反駁   | 具有反駁   | 具有反駁   |
|      | 主張構成 | 組成適當   | 組成適當  | 組成適當且充分  | 組成適當且充分  | 組成適當且充分  |
|      | 主張根據 | 主張具有許多證據   | 主張具有許多證據  | 主張具有許多證據   | 主張具有許多證據   | 主張具有許多證據   |
| 推理內容 | 數學面向 | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 乘除法運算</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 乘除法運算</li> <li>● 四則混合計算</li> <li>● 圖像聯想推理</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 乘除法運算</li> <li>● 數字關係推理</li> <li>● 圖像聯想推理</li> <li>● 因數倍數</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 乘除法運算</li> <li>● 數字關係推理</li> <li>● 圖像聯想推理</li> </ul> |
| 推理過程 | 主張特性 | 主張清晰且有價值   | 主張清晰且有價值  | 主張清晰且有價值   | 主張清晰且有價值並有修正   | 主張清晰且有價值並有修正   |
|      | 學生參與 | 以問卷進行推理  | 因團體中不同的主張進行推理   | 學生主動推理以支持主張  | 學生主動推理以支持主張  | 學生主動推理以支持主張  |

圖 4、研究對象 a1 五次非形式推理活動中之推理歷程。



研究對象 A1 的表現，過程中推理數學內容面向逐漸增加，推理層級變的更加複雜，但在第二次活動之後，針對論點提出的證據較少，推理歷程逐漸由簡單變為複雜。第一次晤談發現 A1 第一次討論活動後論點沒有太大的改變，但推理層級變為更加複雜，推理數學內容面向增加，研究對象因團體中不同的主張進行推理。

研究者：「在經過討論之後你的看法有改變嗎？」

A1：「沒什麼太大的改變，我覺得我的答案應該沒有錯，所以我之前的想法也沒有太大的改變。」(2017/04/11, A1)

第二次晤談 A1 仍然贊同自己的論點，討論過程受到不同論點的影響，推理層級主張增加了修正，並且對於議題進行主動推

理，但對於論點所提出的證據較少。

研究者：「在經過這兩次的討論你認為你想法上有改變嗎？」

A1：「我覺得答案是 38，不過有人說答案是 55，有人說答案是 61，我覺得他們的想法好像也有道理。」(2017/04/21, A1)

第三次晤談 A1 對自己的論點仍然贊同，對於議題的看法沒有太大的改變，仍然較少提出支持論點的證據。

研究者：「最後你認為討論題的答案應該是多少？」

A1：「大家討論完之後，我還是覺得答案是 38，我覺得我的想法比較正確。」(2017/05/08, A1)

整理 A1 的歷程如圖 5。

| 推理歷程 | 複雜度  |   | 簡單 → 複雜  |  |  |  |
|------|------|---|--|--|--|--|
|      | 項目特性 | 前測  | 第一次非形式推理活動   | 第二次非形式推理活動   | 第三次非形式推理活動   | 後測   |
| 推理層級 | 推理   | 定義主張  | 以推理及證據定義主張   | 以推理及證據定義主張   | 以證據定義主張  | 以推理及證據定義主張   |
|      | 層級   | 反駁論點  | 具有反駁   | 具有反駁   | 具有反駁   | 具有反駁   |
|      | 主    | 主張構成  | 組成適當且充分  | 組成適當且充分  | 組成適當且充分  | 組成適當且充分  |
|      | 張    | 主張根據  | 主張具有許多證據   | 主張具有許多證據   | 主張具有少量證據   | 主張具有少量證據   |
| 產物   | 推理內容 | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 乘除法運算</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 乘除法運算</li> <li>● 四則混合計算</li> <li>● 圖像聯想推理</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 乘除法運算</li> <li>● 四則混合計算</li> <li>● 數字關係推理</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 乘除法運算</li> <li>● 四則混合計算</li> <li>● 圖像聯想推理</li> </ul> |
| 推理過程 | 主張特性 | 主張清晰且有價值  | 主張清晰且有價值   | 主張清晰且有價值並有修正   | 主張清晰且有價值並有修正   | 主張清晰且有價值並有修正   |
|      | 學生參與 | 以問卷進行推理   | 因團體中不同的主張進行推理  | 學生主動推理以支持主張  | 學生主動推理以支持主張  | 學生主動推理以支持主張  |

圖 5、研究對象 A1 五次非形式推理活動中之推理歷程。



研究對象 a2 前測與三次非形式推理探究活動的推理歷程並無太大的變化，但後測能夠充分的表達自己的想法，推理層級在所有活動中評分最高。

第一次晤談 a2 所討論的面向較單一，推理數學內容面向較沒變化，推理層級也沒有太大的變化。

研究者：「你跟大家討論之後有更多的想法嗎？」

a2：「我覺得討論之後，我的答案還是一樣。」(2017/04/11, a2)

第二次晤談 a2 對於議題較無特定的主張，受到其他論點的影響，推理數學內容面向較為單一，對於議題會因團體中不同的主張進行推理，而沒有對於議題進行深入的討論，使得推理層級沒有變為更加複雜，推理歷程也無太大的變化。

研究者：「在經過這兩次的討論你覺得你的想法有改變嗎？」

a2：「我有聽到別人說答案可能是 55，也有人說答案是 38。」(2017/04/21, a2)

第三次晤談 a2 之前的討論中，對於議題較無特定的主張，較容易受到其他論點的影響，但在第三次討論之後，a2 產生固定的論點，後測能根據固定的論點進行推理，推理層級變為更加複雜，並且主動推理以支持主張。

研究者：「你的看法是在經過討論的時候改變的嗎？還是你本來就這麼想？」

a2：「經過大家的討論後，我覺得答案應該是 55，感覺因為 55 是唯一數字重複的答案兩個人比較可能猜到，所以這個答案比較有可能。」(2017/05/08, a2)

整理 a2 的歷程如圖 6。

| 推理歷程 | 項目特性 | 簡單 → 複雜  |                    |               |                     | 後測                  |
|------|------|----------|--------------------|---------------|---------------------|---------------------|
|      |      | 前測       | 第一次非形式推理活動         | 第二次非形式推理活動    | 第三次非形式推理活動          |                     |
| 推理產物 | 定義主張 | 以證據定義主張  | 以證據定義主張            | 以證據定義主張       | 以證據定義主張             | 以推理及證據定義主張          |
|      | 反駁論點 | 具有反駁     | 具有反駁               | 無反駁           | 具有反駁                | 具有反駁                |
|      | 主張構成 | 組成適當     | 組成適當               | 組成適當          | 組成適當                | 組成適當且充分             |
|      | 主張根據 | 主張具有許多證據 | 主張具有許多證據           | 主張具有許多證據      | 主張具有少量證據            | 主張具有許多證據            |
| 推理內容 | 數學面向 | ● 加減法運算  | ● 加減法運算<br>● 乘除法運算 | ● 加減法運算       | ● 加減法運算<br>● 四則混合計算 | ● 加減法運算<br>● 四則混合計算 |
| 推理過程 | 主張特性 | 主張清晰且有價值 | 主張清晰且有價值           | 主張清晰且有價值      | 主張清晰且有價值            | 主張清晰且有價值            |
|      | 學生參與 | 以問卷進行推理  | 因團體中不同的主張進行推理      | 因團體中不同的主張進行推理 | 因團體中不同的主張進行推理       | 學生主動推理以支持主張         |

圖 6、研究對象 a2 五次非形式推理活動中之推理歷程。

研究對象 A2 在第二次非形式推理探究活動中立場轉換，之後反駁減少，推理層級變為簡單，推理數學內容面向減少。可能因為立場轉變時對於反論點進行重新思考，產生面向集中且深入的討論，推理歷程由前測到第二次活動時，逐漸變為複雜，立場轉變推理歷程由複雜變為簡單。根據晤談資料 A2 討論的面向更加廣泛，但對於原本該立場的論點不再具有反駁，推理歷程相對由複雜變為簡單。

第一次晤談 A2 因為團體有不同的主張而且不是明顯的正確，所以認為自己的論點可能是對的有參考價值。

研究者：「所以你覺得題目的答案是 38 囉？」

A2：「我自己是覺得答案是 38，可是有人說答案是 55，也有人說答案是 38 或 57，感覺這些答案也很有可能。」  
(2017/04/11, A2)

第二次晤談 A2 受到其他論點的影響，並且認為對方的證據較為充足，進而改變了自己的立場。

研究者：「你為什麼會改變你的看法呢？」

A2：「因為他們說 55 是唯一數字重複的答案，兩個人比較可能猜到，我也覺得蠻有道理的，所以我現在覺得答案是 55。」(2017/04/21, A2)

第三次晤談 A2 改變立場之後，討論的面向更加多元，但對於原本立場的論點不再具有反駁。

研究者：「最後你認為討論題的答案應該是多少？」

A2：「我覺得答案應該是 55，之前討論的時候我覺得答案是 38，因為他的個位數沒有重複，感覺是比較有可

能的答案，但是 57 好像也是一樣，這樣就不知道哪一個才是答案了，後來覺得大家說答案是 55 的理由比較有可能，而且也沒有其他數字跟 55 有一樣的特色，所以答案應該是 55。」(2017/05/08, A2)

整理 A2 的歷程如圖 7。

研究對象 a3 第一次晤談 a3 因為不同的論點而進行推理，推理數學內容面向之面向較為多元。

研究者：「以他們的答案來說的話，你會怎麼樣向他們表達你的想法？」

a3：「我會先看他們的答案還有他們的想法，之後再想要怎麼樣去討論，然後討論完之後再提出有什麼不合的地方這樣。」(2017/04/11, a3)

第二次晤談 a3 認為不同的論點中有許多不充分的地方，對於特定的論點進行深入的討論，但造成推理數學內容面向之面向減少。

研究者：「在討論的過程中，妳堅持自己的想法，是因為你認為你的想法是對的，還是受到對方想法的影響呢？」

a3：「我覺得他們的想法不太正確，然後也有受到他們想法的影響，其他人就一直覺得答案是 55，但是都沒有講出完整的理由。」(2017/04/21, a3)

第三次晤談 a3 比較不同的論點並進行推理後，研究對象對於論點產生確定的想法，並且具有多元的推理數學內容面向。

研究者：「在第三次討論之後，你的想法有改變嗎？」

a3：「跟不同人討論之後，有多知道一些

別人怎麼想的。他們也各說出其他的答案跟理由，有人說是 55，也有人說是 38 或 57，不過比較之後，我覺得我的理由比較有可能，答案應該是 61。」(2017/05/08, a3)

前測時，由於具有較好的數學學習背景，推理層級及數學內容面向已有一定的發展，所以分析架構複雜。第一次活動受到不同主張影響產生多面向推理，推理層級更加複雜，推理數學內容面向更加多元，a3 的

主張在活動時受到反駁，為了支持自己的主張而進行主動的推理。但第二次及第三次討論活動時，對不同論點進行深入討論，推理數學內容面向減少，推理過程中研究對象因團體中不同主張進行推理。後測統整三次推理活動後的想法，以不同主張及想法再加上自己推理所得之結果，推理數學內容面向增加，推理層級變為複雜，a3 為了支持自己的主張而進行主動推理。

整理 a3 的歷程如圖 8。

| 推理歷程 |      | 複雜度  | 簡單 → 複雜  |  |  |  |
|------|------|--|--|--|--|--|
|      |      | 項目特性   | 前測   | 第一次非形式推理活動   | 第二次非形式推理活動   | 第三次非形式推理活動   |
| 推理層級 | 定義主張 | 以證據定義主張  | 以證據定義主張  | 以推理及證據定義主張   | 以推理及證據定義主張   | 以推理及證據定義主張   |
|      | 反駁論點 | 具有反駁   | 具有反駁   | 具有反駁   | 具有反駁   | 無反駁  |
|      | 主張構成 | 組成適當   | 組成適當   | 組成適當   | 組成適當   | 組成適當   |
|      | 主張根據 | 主張具有許多證據   | 主張具有許多證據   | 主張具有許多證據   | 主張具有少量證據   | 主張具有許多證據   |
| 推理產物 | 數學面向 | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 乘除法運算</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 乘除法運算</li> <li>● 四則混合計算</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 乘除法運算</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 乘除法運算</li> <li>● 數字關係推理</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 圖像聯想推理</li> <li>● 四則混合計算</li> <li>● 數字關係推理</li> <li>● 乘除法運算</li> </ul> |
| 推理過程 | 主張特性 | 主張清晰且有價值   | 主張清晰且有價值   | 主張清晰且有價值並具有修正  | 主張清晰且有價值並具有修正  | 主張清晰且有價值並具有修正  |
|      | 學生參與 | 以問卷進行推理  | 因團體中不同的主張進行推理  | 學生主動推理以支持主張  | 學生主動推理以支持主張  | 以問卷進行推理  |

圖 7、研究對象 A2 五次非形式推理活動中之推理歷程。

| 推理歷程 |      | 複雜度  | 簡單 → 複雜  |   |  |  |             |
|------|------|------|--|---|--|--|-------------|
|      |      | 項目特性 | 前測   | 第一次非形式推理活動  | 第二次非形式推理活動   | 第三次非形式推理活動   | 後測          |
| 推理層級 | 推理   | 定義主張 | 以證據定義主張  | 以推理及證據定義主張  | 以證據定義主張  | 以證據定義主張  | 以推理及證據定義主張  |
|      | 層級   | 反駁論點 | 具有反駁   | 具有反駁  | 無反駁  | 具有反駁   | 具有反駁        |
|      |      | 主張構成 | 組成適當且充分  | 組成適當  | 組成適當   | 組成適當   | 組成適當且充分     |
|      |      | 主張根據 | 主張具有許多證據   | 主張具有許多證據  | 主張具有許多證據   | 主張具有少量證據   | 主張具有許多證據    |
| 推理產物 | 推理內容 | 數學面向 | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 乘除法運算</li> <li>● 四則混合計算</li> <li>● 數字關係推理</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 乘除法運算</li> <li>●</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 乘除法運算</li> <li>● 數字關係推理</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 乘除法運算</li> <li>● 圖像聯想推理</li> <li>● 數字關係推理</li> <li>● 四則混合計算</li> </ul> |             |
| 推理過程 | 主張特性 |      | 主張清晰且有價值   | 主張清晰且有價值  | 主張清晰且有價值   | 主張清晰且有價值   | 主張清晰且有價值    |
|      | 學生參與 |      | 以問卷進行推理  | 學生主動推理以支持主張   | 因團體中不同的主張進行推理  | 因團體中不同的主張進行推理  | 學生主動推理以支持主張 |

圖 8、研究對象 a3 五次非形式推理活動中之推理歷程。

研究對象 b3 第一次討論活動推理數學內容面向最多元，第一次晤談 b3 對於討論議題偏向以多元面向的方式進行討論，b3 能主動推理支持主張。

研究者：「你會去針對你的想法再去找資料嗎？還是妳會跟更多人討論這個問題？」

b3：「我會先跟其他的人討論這問題。」

(2017/04/11, b3)

第二次晤談 b3 因為論點偏向較為單一，推理數學內容面向之面向減少，但對於議題進行深入的討論。

研究者：「你跟第一次比較起來討論的內容好像有變少，你覺得是什麼原因？」

b3：「因為我跟別人討論還有在去查完資

料之後，我覺得答案應該就是 61 沒錯。」(2017/04/21, b3)

第三次 b3 認為討論過程中，對方所提出的論點較不具可信度，更加確定自己的論點，仍偏向單一固定的面向進行深度的討論，但在討論過程中所提出的證據較少，較多以自己的推理做為論點。

研究者：「你對於其他人提出來的答案看法是什麼？」

b3：「我覺得他們提出來的其他答案應該都不太對，我覺得我之前想的答案

比較有可能。」(2017/05/08, b3)

第一次討論 b3 針對特定的面向進行深入的多方面討論內容面向多元。但是第二次及第三次討論活動時，由於受到不同的論點影響，研究對象對於自己的論點「我覺得答案應該就是 61 沒錯」需要重新思考，推理層級由複雜變為簡單。在後測時，研究對象整理前三次討論的論點以及想法（卻無法說服同學），推理層級由複雜變為簡單。整理 b3 的歷程如圖 9。

| 推理歷程 |      | 複雜度  | 簡單 → 複雜  |  |  |  |  |
|------|------|------|--|--|--|--|--|
|      |      | 項目特性 | 前測   | 第一次非形式推理活動   | 第二次非形式推理活動   | 第三次非形式推理活動   | 後測   |
| 推理層級 | 推理   | 定義主張 | 以證據定義主張  | 以推理及證據定義主張   | 以證據定義主張  | 以推理及證據定義主張   | 以推理及證據定義主張   |
|      | 層級   | 反駁論點 | 無反駁  | 具有反駁   | 具有反駁   | 具有反駁   | 具有反駁   |
|      | 主張構成 |      | 組成適當   | 組成適當   | 組成適當   | 組成適當   | 組成適當   |
|      | 主張根據 |      | 主張具有許多證據   | 主張具有許多證據   | 主張具有許多證據   | 主張具有少量證據   | 主張具有許多證據   |
| 推理產物 | 推理內容 | 數學面向 | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 四則混合計算</li> <li>● 乘除法運算</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 乘除法運算</li> <li>● 圖像聯想推理</li> <li>● 四則混合計算</li> <li>● 數字關係推理</li> <li>● 因數倍數</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 乘除法運算</li> <li>● 四則混合計算</li> <li>● 圖像聯想推理</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 乘除法運算</li> <li>● 四則混合計算</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 加減法運算</li> <li>● 數字關係推理</li> <li>● 因數倍數</li> <li>● 乘除法運算</li> </ul> |
| 推理過程 | 主張特性 |      | 主張清晰且有價值   | 主張清晰且有價值   | 主張清晰且有價值   | 主張清晰且有價值   | 主張清晰且有價值   |
|      | 學生參與 |      | 以問卷進行推理  | 學生主動推理以支持主張  | 因團體中不同的主張進行推理  | 因團體中不同的主張進行推理  | 學生主動推理以支持主張  |

圖 9、研究對象 b3 五次非形式推理活動中之推理歷程。

部分學生前測就能針對主題進行非形式推理，已具有部分的推理產物。過程中能了解不同主張及想法，根據自己的論點組織想法及推理使得推理產物增加，並且因支持自己之主張而進行主動推理。學生會根據自己的思考習慣以不同的面向進行討論。若學生針對特定想法進行討論，則推理數學內容面向減少，但對於議題進行能有更深入的討論。後測經過多次推理活動大部分學生都能發展出自己想法及主張，相較於前測，學生之推理產物及過程皆更加複雜。

a1 的歷程由簡單到複雜，最符合歷程架構的數學內容面向。研究對象 A1 及 a3 在前測時具有較高的推理層級，在前測時的表現較為複雜，之後經過非形式推理活動在後測產生更複雜的推理產物。研究對象 a2 推理歷程並無太大的變化，但在後測時，由於能夠充分的表達自己的想法，推理層級複雜。研究對象 A2 在第二次非形式推理探究活動中立場轉換，學生在立場轉變時對於反論點進行重新思考，根據晤談資料中能看出，學生討論的面向更加廣泛，但對於原本該立場的論點不再具有反駁，並且以問卷進行推理，推理歷程相對由複雜變為簡單。研究對象 b3 的歷程由簡單到複雜，第一次討論時具有多元的推理數學內容面向，但在第一次討論後產生面向集中且過於深入的討論，反而推理數學內容面向減少。隨著活動進行，根據晤談對象表現出的非形式推理之推理歷程可以歸納出三種類型，第一類為逐漸變為複雜、第二類為立場改變、第三類為由複雜變為簡單後再變為更加複雜，其中晤談對象 A1、a1、a2 屬於第一類，晤談對象 A2 屬於第二類，晤談對象 a3、b3 屬於第三類。

因為數學一旦有正確答案，學生就比較容易遵從而不思考原因，所以教學活動始終不公布正確答案，活動中強調重點在於你能不能找出合理且無法被反駁的說明，除非同學能說出讓人信服的論證。多位同學於討論時都有提及答案「61」，如 a1、A1、a3 與 b3，但是 a1 又說「感覺 55 也蠻有可能的」，又如 A1：「我覺得答案是 38，不過有人說答案是 55，有人說答案是 61，我覺得他們的想法好像也有道理」…等，他們都使用「覺得、應該、好像、可能、那樣也對…」等模擬兩可的詞句，但卻又無法程序性如同其它大部分經驗的數學題目說服同學

## 伍、討論

前測學生推理面向有「乘除法運算面向」、「加減法運算面向」及「四則混合計算面向」。後測學生推理數學內容面向增加「因數倍數面向」、「圖像聯想推理面向」及「數字關係推理」3 個面向，相較於前測數學內容面向變為更複雜。前測較多人提出「加減法運算面向」，探究活動研究對象大部分能以不同的論點進行討論，產生多元的討論面向。第二次探究活動後，研究對象會針對特定面向進行深入的討論，因而推理數學內容面向相對減少。後測研究對象整理各次討論中的論點，能產生較多的推理之面向。由於受到數學教材熟練度及數學教材編排影響，討論所涉及之面向仍偏向於「加減法運算面向」較多。

後測學生會為了支持自己主張會主動推理，並以推理方式定義主張，組成更加

充分，且具有反駁的表現，比較前測後測，學生的推理層級由簡單變為更加複雜。部分研究對象前測推理層級具有一定的程度。第一次討論面對不同的論點時，研究對象可以重新思考自己的論點，但論點較為零碎且片段，推理層級之分數下降，因此由複雜變為簡單。但在各次探究討論研究對象逐步組織自己的論點，使得論點更加完備，推理層級之評分分數上升，推理層級逐漸由簡單變為複雜，而最後研究對象後測之推理層級相較於較前測變為更加複雜。

研究對象了解到不同主張及想法，並對自己論點進行延伸推理，使得推理產物（推理層級及推理數學內容面向）增加，並且會因支持自己之主張而進行主動推理。過程中學生針對特定想法進行討論而使其表現出之推理數學內容面向減少，但對於議題進行更深入的討論。在後測時學生表現出本身經過多次推理之想法及主張，相較於前測，學生之推理產物及過程皆更加複雜。根據非形式推理之推理歷程可以歸納出三種類型，第一類為逐漸變為複雜、第二類為立場改變、第三類為由複雜變為簡單後再變為更加複雜。

所以探究活動適合帶領學生推理，但不是一蹴可成，學生帶著「紙筆思考」的前置學習單，已經熟悉推理內容進入小組討論，因此都會發表意見，因為是非例行性問題，沒有壓倒性答案，所有人都不確定對錯，第二次帶著繼續思考的意見，再接再厲，有些接受其他人推理方向，有些繼續自己意見，就像帶小朋友「進入森林」，

有多元專注與關心的面向，依照自己的程度接受推理內容，練習「主張」、「證據」、「反主張」、「反駁」四面向

經過本研究的結果分析與文獻的整理，多數小學高年級的學生可以進行非形式推理的討論，社會性的與自然科學類議題的討論內容更合適、表現會更豐富，參與度更多，但是老師帶領的方式要求更高，例如選擇適當題目以及經營探究活動，引導學生推理的能力，若是依目前十二年國教數學領域草案的時間緊迫，相關單位應該加緊腳步在教材與教師的基本訓練上加強，要不然會蹈入二十年前實施「建構數學」的窘境。

## 參考書目

- 王美芬、熊召弟（1995）。**國民小學自然科教材教法**。台北市：心理出版社。
- 李松濤、林煥祥、洪振方（2010）。探究式教學對學童科學論證能力影響之探究。**科學教育學刊**, 18(3), 117-203。
- 林樹聲、黃柏鴻（2009）。國小六年級學生在社會性科學議題教學中之論證能力研究－不同學業成就學生間之比較。**科學教育學刊**, 17(2), 111-133。
- 林宗進、林樹聲、陳映均（2010）。大學生對基因改造作物議題的認知與論證能利之研究。**科學教育學刊**, 18(3), 229-252。
- 林秀珍（2007）。**經驗與教育探微－杜威教育哲學之詮釋**。臺北市：師大書苑。
- 教育部（2008）。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。臺北市。
- 教育部（2016）。**十二年國民基本教育課程綱要數學領域**。臺北市。
- 張春興（1989）。**推理**。載於張春興主編：張氏心理學辭典，544。台北：台灣東華書局股份有限公司。
- 張榮祥（2015）。**炮製新加坡數學題求解電**

- 話打爆南二中。中央通訊社。2010年1月12日, 取自 <http://www.cna.com.tw/news/firstnews/201505060237-1.aspx>
- 張緯文、林樹聲 (2014)。實施議論文寫作活動提升國小學生論證與寫作能力。**科學教育月刊**, 368, 2-19。
- 靳知勤、楊惟程、段曉林 (2010)。國小學童的非形式推理之研究—以生物複製議題之引導式論證為例。**課程與教學季刊**, 13 (1), 209-232。
- 劉湘瑤、李麗菁、蔡今中 (2007)。科學認識觀與社會性科學議題抉擇判斷之相關性探討。**科學教育學刊**, 15(3), 335-356。
- 劉新、林如愷、李秀玉、楊雯仙、張永達 (2006)。小組合作學習的教學理念與實務。**科學教育月刊**, 294, 34-46。
- 蘇衍丞、林樹聲 (2012)。在社會性科學議題情境下應用鷹架教學提升國小六年級學生論證能力。**科學教育學刊** 20 (4), 343-366
- Berland, L. K., & McNeill, K. L. (2010). A learning progression for scientific argumentation-understanding student work and designing supportive instructional contexts. *Science Education*, 94(1), 765-793.
- Colburn, A. (2004). Inquiring scientists want to know. *Educational Leadership*, 62(1), 63-66.
- Driver, R., Newton, P., & Osborne, J. (2000). Establishing the norms of scientific argumentation in classrooms. *Science Education*, 84(3), 287-313.
- Duschl, R.A. and Osborne, J. (2002) Supporting and Promoting Argumentation Discourse in Science Education. *Studies in Science Education*, 38, 39-72.
- Kuhn, D. (1991). *The skills of argument*. Cambridge, UK: Cambridge University press.
- Lawson, A. E. (1995). *Science teaching and the development of thinking*. Belmont, CA: Wadsworth Publishing Company.
- Means, M. L., & Voss, J. F. (1996). Who reasons well? Two studies of informal reasoning among children of different grade, ability, and knowledge levels. *Cognition and Instruction*, 14(2), 139-178.
- Osborne, J., Erduran, S., & Simon, S. (2004). Enhancing the quality of argumentation inschool science. *Journal of Research in Science Teaching*, 41(10), 994-1020.
- Polya, G. (1945) . *How to solve it?* Princeton University Press.
- Sadler, T. D. (2004) . Informal reasoning regarding socioscientific issues: A critical review of research. *Journal of Research in Science Teaching*, 41 (5) , 513-536.
- Sadler, T. D., & Zeidler, D. L. (2005) . The significance of content knowledge for informal reasoning regarding socioscientific issues: Applying genetics knowledge to genetic engineering issues. *Science Education*, 89 (1) , 71-93.
- Sadler, T. D., & Donnelly, L. A. (2006). Socioscientific argumentation: The effects of content knowledge and morality. *International Journal of Science Education*, 28, 1463-1488.
- Wu, Y. T., & Tsai, C. C. (2007) . High school students' informal reasoning on a socio-scientific issue: Qualitative and quantitative analyses. *International Journal of Science Education*, 29, 1163-1187.
- Zeidler, D., Osborne, J., Erduran, S., Simon, S., & Monk, M. (2003). *The role of argument during discourse about socioscientific issues*. In D. Zeidler (Ed.), *The Role of Moral Reasoning on Socioscientific Issues and Discourse in Science Education* (pp. 97 - 116). Kluwer Academic Publishers.

投稿日期：108年10月23日

接受日期：109年3月18日



# A Study on Performance of Informal Reasoning of Mathematical Non-routine Problems for 5<sup>th</sup> Graders

Hsungrow Chan<sup>1\*</sup> and Yu-Shiang Su<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Applied Mathematics, National Pingtung University

<sup>2</sup>Kaohsiung City Siaogang Elementary School

## Abstract

This study explored the performance of informal reasoning of mathematical non-routine problems and analyzes the differences and changes before and after the inquiry activities for the fifth-grade students.

The research method included qualitative analysis and supplemented by quantitative analysis. The participants were 1 teacher and 18 students. Through the analysis of questionnaires, activity records and interview records, it is found that after the mathematical inquiry activities, the mathematical content is oriented to increase the "factor multiple orientation", "image association reasoning" and "digital relationship reasoning". Because the student reasoning uses many evidence to establish claims and generate rebuttals, the level of reasoning is more complete. Finally, we apply the case study on chosen 6 students. The process of informal reasoning is divided into the first class gradually becoming complex, the second class changing position, and the third class becoming complex from simple to simple. Students can effectively improve the problem-solving ability of reasoning through activities with discussion and thinking, and inquiry activity is one of the teaching methods suitable for students to improve their reasoning ability.

**Keywords: informal reasoning, mathematical non-routine problems, 5<sup>th</sup> graders**

---

\* corresponding author