中學生通訊解題第 125-126 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
12501

欲從 $1!, 2!, 3!, \ldots, 2016!$ 中取出 1 個數，使得其他所有數的乘積為完全平方數，則取出的數為何？（$n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$）

簡答：$1008!$

【詳解】

由 $1!\times2!\times3!\times4!\times5!\times6!\times\cdots\times2015!\times2016!$

$=(1!)^2\cdot2\times(3!)^2\cdot4\times(5!)^2\cdot6\times\cdots\times(2015!)^2\cdot2016$

$=[(1!)\times(3!)\times(5!)\times\cdots\times(2015!)]^2\times2^{1008}\times1008!$

可知須刪去 $1008!$

【解題評析】

這樣的題目可以有幾個不同的想法入手，不過主要的精神就是配對，可以針對所有的質因數分解再配對，也可以直接拿階乘配對，最後把乘下的再略做調整，即可得到答案。大部分的同學都能找到切入的重點，表達也都非常詳盡，頗令人驚豔，希望各位同學能繼續努力，在數學中找到樂趣。

問題編號
12502

已知 $f(x)$ 是整係數多項式，且其各項係數均大於或等於 0，若 $f(1)=10$，$f(5)=206$，則 $f(3)$ 可能的值有哪些？

簡答：60, 64, 76

【詳解】

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，其中 $a_n>0$，$a_k\ge0$（$0\le k\le n-1$）。

考慮 $f(5)=206$，即

$5^na_n+5^{n-1}a_{n-1}+\cdots+5a_1+a_0=206$，

因 $5^4=625>206$ 且 $a_k\ge0$（$0\le k\le n-1$），所以 $n\le3$。

(1) 若 $n=3$，則 $a_3+a_2+a_1+a_0=10$

且 $125a_3+25a_2+5a_1+a_0=206$，

所以 $31a_3+6a_2+a_1=49$，

$(a_3,a_2,a_1,a_0)=(1,3,0,6)$，

$(1,2,6,1)$，

因此 $f(3)=60, 64$。

(2) 若 $n=2$，則 $a_2+a_1+a_0=10$

且 $25a_2+5a_1+a_0=206$，

所以 $6a_2+a_1=49$，

$(a_2,a_1,a_0)=(8,1,1)$，

因此 $f(3)=76$。

【解題評析】

本題的重點是要推論出 是一個最高三次的多項式，這次作答的 9 位同學皆能掌握這個要點。

問題編號
12503

學校舉辦籃球比賽，開放給一年級及二年級的同學自由報名。已知報名的隊伍數不超過 30 隊，且一年級比二年級多一隊。所有隊伍進行循環賽(即任兩隊均進行一場比賽)，每場比賽勝隊得積分 3 分，敗隊得積分 0 分，若兩隊平手則各得積分 1 分。所有比賽結束後，統計積分發現：

(1) 一年級彼此對戰的比賽中，分出勝敗的場數與平手的場數之比為 2:1，
(2) 二年級彼此對戰的比賽中，分出勝敗的場數與平手的場數之比亦為 2:1，
(3) 一年級對戰二年級的所有比賽中，分出勝敗的場數與平手的場數之比為 2:1。

此外，一年級所有隊伍的總積分比二年級所有隊伍的總積分多了 34 分。

請問：一年級和二年級各有多少隊伍參加比賽？

簡答：一年級 7 隊，二年級 6 隊

【詳解】

假設二年級隊伍數為 x，

一、二年級對戰的比賽中，一年級勝 y 場，二年級勝 z 場，平手 a 場。

由(3)得 $(y+z):a=2:1$，

且 $y+z+a=x(x+1)$

故 $a=\frac{1}{3}x(x+1)$， $z=\frac{2}{3}x(x+1)-y$

且

二年級對戰比賽中分出勝敗的場數為 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}x(x-1)$，

平手的場數為 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}x(x-1)$。

一年級對戰比賽中分出勝敗的場數為 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}x(x+1)$，

平手的場數為 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}x(x+1)$。

因一年級的總積分比二年級的總積分多 34 分，所以

$$3\times\frac{1}{3}x(x+1)+2\times\frac{1}{6}x(x+1)+3y+a$$

$$=3\times\frac{1}{3}x(x-1)+2\times\frac{1}{6}x(x-1)+3z+a+34$$

得 $9y=3x^2-x+51$，

因 x, y 均為整數，故 x 可被 3 整除，

令 $x=3k$，

$$9y=27k^2-3k+51$$

$$\Rightarrow\ y=3k^2+6-\frac{k+1}{3}$$

$\frac{k+1}{3}$ 為正整數，所以 $k=3t-1$，

故 $x=9t-3$

又 $x+(x+1)\le 30$

$$\Rightarrow\ x<\frac{29}{2}\ \Rightarrow\ t<\frac{35}{18}\ \Rightarrow\ t=1，$$

所以 $x=6$，

故一年級有 7 隊，二年級有 6 隊。

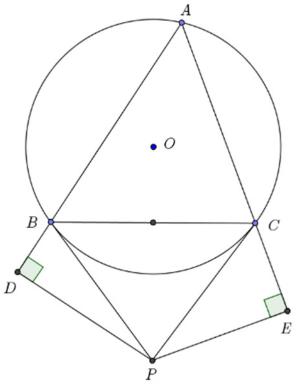
【解題評析】

本題需要視題目給的條件設定適當之變數，列出關係式以求解。

問題編號
12504

如圖，設銳角三角形 ABC 的外接圓 O 在點 B 與 C 處的切線相交於 P 點。

證明：若 D 和 E 分別是 P 向直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 和 $\overleftrightarrow{AC}$ 的投影，則三角形 ADE 的垂心是線段 $\overline{BC}$ 的中點 M。



【證明】

(1) 證明：$\overleftrightarrow{ME}\perp\overline{AB}$

設 M 為 $\overline{BC}$ 的中點。

由於三角形 BPC 為等腰三角形，

故 $\overline{PM}\perp\overline{BC}$。

因為 $\angle PMC=\angle PEC=90^\circ$，

所以 $MCEP$ 四點共圓且

$\angle MEP=\angle MCP$。

又 $\overline{CP}$ 為圓 O 之切線，

可得 $\angle MCP=\angle BAC$，

$\angle MEP=\angle BAC$。

因此，

$$\angle MEA+\angle BAC=(90^\circ-\angle MEP)+\angle BAC=90^\circ$$

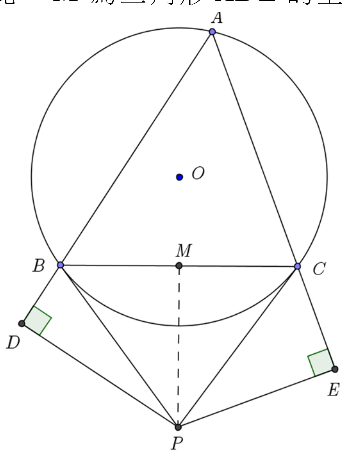
$$\angle MEA+\angle BAC$$

$$=(90°-\angle MEp)+\angle BAC=90°$$

從而 $\overleftrightarrow{ME}\perp\overline{AB}$ 。

(2) 與(1)同理可得 $\overleftrightarrow{MD}\perp\overline{AC}$。

因此，M 為三角形 ADE 的垂心。



問題編號
12505

符號 Π 代表〝連乘積〞，對於任意二整數 n, m（不妨假設 $m\ge n$）以及 k 的函數

$f(k)$，當 k 依序代入 n 至 m 間的所有整數時，定義

$$\prod_{k=n}^{m} f(k)=f(n)\cdot f(n+1)\cdot f(n+2)\cdot\cdots\cdot f(m)$$

試求 $\displaystyle\prod_{n=2}^{26}\frac{n^3+2n^2+2n+1}{n^3-2n^2+2n-1}$ 的值。

簡答：82251

【詳解】

$$\frac{n^3+2n^2+2n+1}{n^3-2n^2+2n-1}=\frac{(n+1)^3-n(n+1)}{(n-1)^3+n(n-1)}$$

$$=\frac{(n+1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}$$

$$=\frac{(n+2)-1}{n-1}\cdot\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{n^2-n+1}$$

$$\Rightarrow\prod_{n=2}^{26}\frac{n^3+2n^2+2n+1}{n^3-2n^2+2n-1}$$

$$=\left(\prod_{n=2}^{26}\frac{(n+2)-1}{n-1}\right)\cdot\left(\prod_{n=2}^{26}\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{n^2-n+1}\right)$$

$$=(\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{25}{23}\cdot\frac{26}{24}\cdot\frac{27}{25})\cdot(\frac{7}{3}\cdot\frac{13}{7}\cdot\frac{21}{13}\cdot\cdots\cdot\frac{703}{651})$$

$$=\frac{26\cdot 27}{1\cdot 2}\cdot\frac{703}{3}=82251$$

問題編號

12601

數列 $\langle a_n\rangle$ 定義如下：

$a_1=3,\ a_2=5757,$

$$a_{n+1}=\frac{7(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{n}\quad (n\geq 2)$$

證明數列 $\langle a_n\rangle$ 中的各項均為整數。

【證明】 $a_{n+1}=\dfrac{7(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{n}$

$$\Rightarrow S_{n+1}-S_n=\frac{7S_n}{n},\ n\geq 2$$

$$\Rightarrow S_{n+1}=\frac{n+7}{n}S_n$$

$$=\frac{(n+7)(n+6)\times\cdots\times 9}{n(n-1)\times\cdots\times 2}S_2$$

$$=\frac{(n+7)(n+6)\times\cdots\times(n+1)}{8\times 7\times\cdots\times 2}\times 5760$$

$$=\frac{(n+7)(n+6)\times\cdots\times(n+1)}{7}$$

由於連續 7 個整數中一定有一個數可以被 7 整數，因此當 $n\geq 2$ 時，S_{n+1} 均為整數，故數列 $\langle a_n\rangle$ 中的各項均為整數，得證。

【解題評析】

本題得到滿分的有 2 人，解題過程闡明詳盡，敘事條理分明，值得讚許；此題關鍵在於如何找出一般項，由一般項去說明每一項都是整數，主要的方法有利用級數和與遞迴關係式，而不是用前幾項的值所產生的規則去推測一般項的式子，這樣的作法不夠嚴謹。

問題編號
12602

某遊戲有紅、黃、綠三種代幣，已知 3 枚紅代幣可換 1 枚黃代幣，3 枚黃代幣可換 1 枚綠代幣，3 枚綠代幣可換 1 枚紅代幣。小偉有紅、黃、綠三種代幣各 2016 枚，並將其兌換至每色代幣至多剩下 2 枚，求兌換結束後所有可能的結果。

簡答：紅、黃、綠三種代幣各剩 2 枚。

【詳解】

設有 a 枚紅代幣、b 枚黃代幣、c 枚綠代幣，令 $f(a,b,c)=a+3b+9c$，則在每次兌換的過程中，無論是將 3 枚紅代幣換成 1 枚黃代幣，或是將 3 枚黃代幣換成 1 枚綠代幣，f 的值均不變；

但若將 3 枚綠代幣換成 1 枚紅代幣，則 f 的值減少 26；因此 f 模 26 不變。

最初 $f=2016\,(1+3+9)\equiv 0 \pmod{26}$，

若最後剩下 x 枚紅代幣、y 枚黃代幣、z 枚綠代幣，

其中 $x,y,z\in\{0,1,2\}$ 且 x,y,z 不全為 0，

則 $x+3y+9z\equiv 0 \pmod{26}$。

又 $0<x+3y+9z\le 2(1+3+9)=26$，故 $x+3y+9z=26$，

可推得 $x=y=z=2$，即紅、黃、綠三種代幣各剩 2 枚。

【解二】（台北市石牌國中 O 奕同學的解法改編）

設有 $3x$ 枚紅代幣換成 x 枚黃代幣，$3y$ 枚黃代幣換成 y 枚綠代幣，$3z$ 枚綠代幣換成 z 枚紅代幣；

設最後紅代幣、黃代幣、綠代幣分別剩下 m, n, k 枚，其中 $m, n, k\in\{0,1,2\}$，m, n, k 不全為 0，

$$\Rightarrow \begin{cases} 2016-3x+z=m\cdots(1) \\ 2016-3y+x=n\cdots(2) \\ 2016-3z+y=k\cdots(3) \end{cases}$$

$9\times(1)+(2)+3\times(3)$，可得 $13\times 2016-26x=9m+n+3k$，

$$\Rightarrow\ x=1008-\frac{9m+n+3k}{26}$$

因為 x 為正整數，所以 $\dfrac{9m+n+3k}{26}$ 為整數，

因為 $m, n, k\in\{0,1,2\}$，m, n, k 不全為 0，

所以 $0<9m+n+3k\le 2(1+3+9)=26$，

故 $9m+n+3k=26$，因此 $m=n=k=2$，

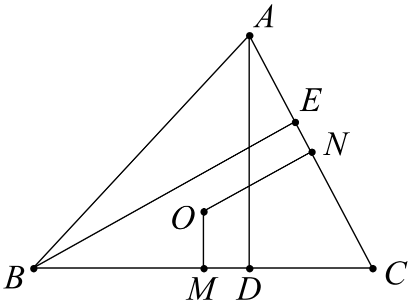
即紅、黃、綠三種代幣各剩 2 枚。

【解題評析】

1. 這一題換代幣的操作問題，按照題意操作幾次，找出紅代幣、黃代幣、綠代幣個數的"規律性"或是"不變性"，可以得到解決此題策略。
2. 同餘是解決問題的有力方法，對數學有興趣的學生可以多學習同餘的性質。
3. 部分同學的作答是藉由按照某個特定的順序換代幣，而得到兌換結束後的一種結果，尚需說明不論換代幣的順序如何，都是同樣的結果。

問題編號
12603

如圖，O 點是 $\triangle ABC$ 的外心，M, N 分別是 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AC}$ 的中點，$\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 分別是 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AC}$ 邊上的高，證明：$\triangle OAE$ 與 $\triangle OBD$ 的面積相等。



【證明】

(1) 因 $\triangle AEH \sim \triangle BDH$ (AA)，得 $\overline{AE}:\overline{BD}=\overline{HE}:\overline{HD}$。

(2) 因 $\overline{AD}//\overline{OM}$, $\overline{BE}//\overline{ON}$，所以

$\angle MON=\angle EHD$。

因 A, B, D, E 四點共圓，得

$\angle HED=\angle BAD=90°-\angle ABD$；

另因 $\overline{MN}//\overline{BA}$，所以

$\angle ABD=\angle NMD=90°-\angle OMN$，

得 $\angle HED=\angle OMN$。

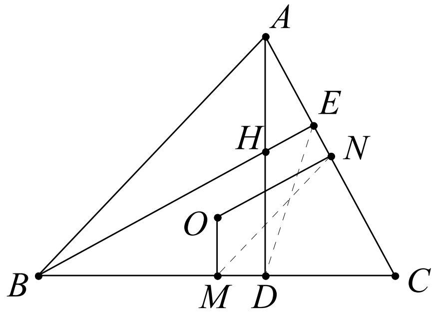
因此 $\triangle MON \sim \triangle EHD$ (AA)，

得 $\overline{HE}:\overline{HD}=\overline{OM}:\overline{ON}$。

由(1)(2)可知

$\overline{AE}:\overline{BD}=\overline{OM}:\overline{ON}$，

故 $\triangle OAE$ 與 $\triangle OBD$ 的面積相等。



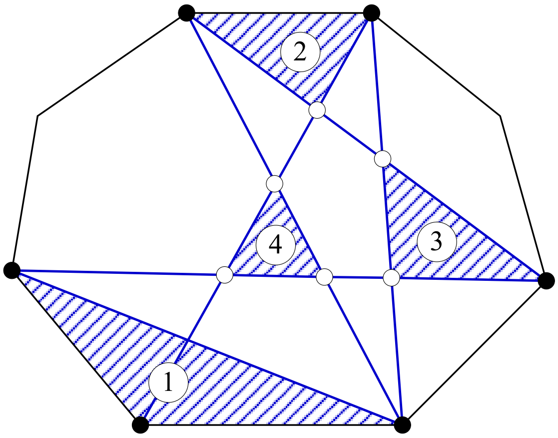
問題編號
12604

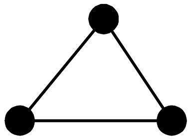
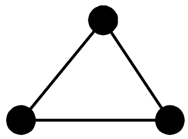
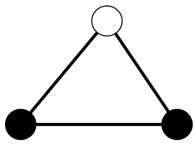
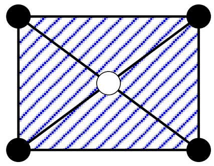
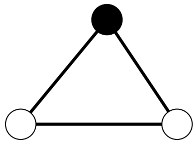
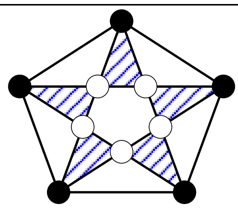
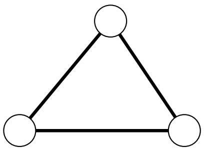
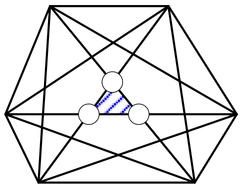
任給一凸八邊形，試問其各邊及對角線最多可交出多少個三角形？

簡答：644

【詳解】

如圖，將八邊形的頂點以「●」表示、任二條對角線的交點（內點）以「○」表示。則可將各邊及對角線交出的三角形分類如下：



類別	說明	圖例	形成條件	組合數
(1)	3 頂點			$C_3^8=56$
(2)	2 頂點 1 內點			$C_4^8\times 4=280$
(3)	1 頂點 2 內點			$C_5^8\times 5=280$
(4)	3 內點			$C_6^8=28$

由以上討論知一凸八邊形之各邊及對角線最多可交出 644 個三角形。

【解題評析】

本題僅有一位同學抓到正確的分類要點，值得讚許！惟最後在加總時計算錯誤。

問題編號
12605

設 a, b, c, d 是四個任意給定的整數，令 $p=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$，求證： p 是 12 的倍數。

【證明】

因為 $12=3\times4$，分別依 p 是 3 的倍數與 4 的倍數討論。

1. a,b,c,d 是任意給定的數，則至少有兩個除以 3 的餘數相同，所以 p 是 3 的倍數。
2. 考慮 a,b,c,d 除以 4 的餘數：
   (1) 若其中有兩個同餘，則 p 是 4 的倍數。
   (2) 若其中任兩個都不同餘，則 a,b,c,d 中有兩個偶數及兩個奇數，不妨令 a,b 是偶數， c,d 為奇數，則 $a-b$， $c-d$ 都是偶數，所以 p 是 4 的倍數。

   另外的方式，4 的倍數也可由奇偶性討論得知。

   設 a,b,c,d 四數不相等，考慮奇偶性，則 a,b,c,d 可能為 4 奇、3 奇 1 偶、2 奇 2 偶、1 奇 3 偶、4 偶。
   (1) 4 奇、4 偶： $(a-b)$ 與 $(c-d)$ 為偶數，得 p 是 4 的倍數；
   (2) 2 奇 2 偶：不失一般性，設 a,b 是奇數， c,d 是偶數，則 $(a-b)$ 與 $(c-d)$ 為偶數，得 p 是 4 的倍數；
   (3) 3 奇 1 偶、1 奇 3 偶：不失一般性，設 d 是與其他三 3 個不同的，則 $(a-b)$ 與 $(a-c)$ 為偶數，得 p 是 4 的倍數。

【解題評析】

本題目主要解題的方法是以 3 和 4 的倍數來討論，所有的同學解題的方向都掌握的很清楚。第一部分，利用 3 的同餘，由鴿籠原理得到的 6 個因數中，必有 1 個是 3 的倍數。第二部分，許多同學使用奇偶性來討論 6 個因數中至少會出現 2 個是偶數而得到 4 的倍數，因為需要分類討論，這部份比較容易出現說明不清楚的問題，比如未說明的選取。