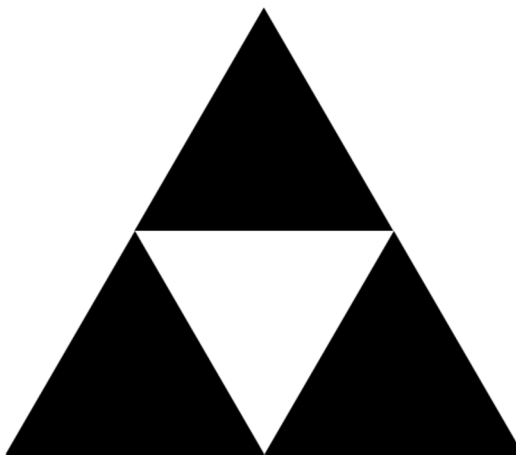

從謝爾賓斯基碎形談摺紙

李政憲^{1*} 王儷娟²

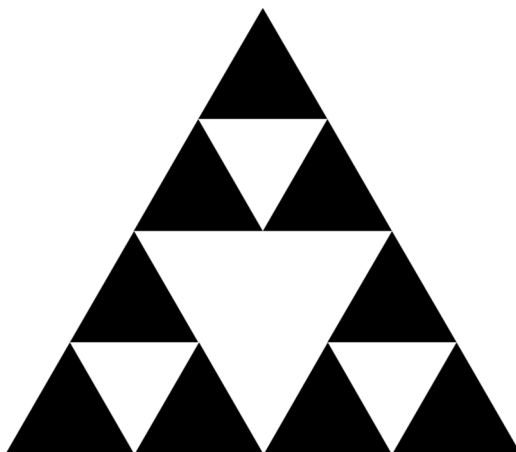
¹ 新北市林口國民中學

² 臺南市仁德文賢國民中學

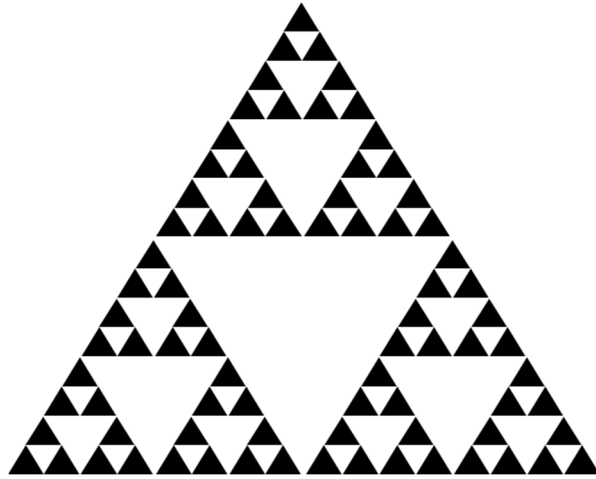
「謝爾賓斯基碎形」是中學老師們教等比概念時，很常提到的一個圖形。所指的是取一個正三角形(假設邊長為 1)的各邊中點後，從中挖下一個邊長為 $1/2$ 的正三角形(如圖一)，接著將剩下的三個小正三角形仿照前一個動作，再各挖一個邊長為 $1/4$ 的正三角形(如圖二)，以此動作持續進行數次，即可完成如圖三的謝爾賓斯基三角形。



圖一



圖二



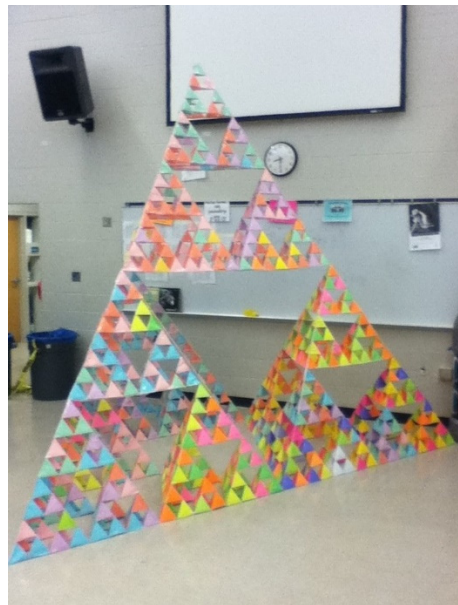
圖三

而這個三角形有不少數學概念可供學生討論，如在圖三中白色的三角形總數為何？每個三角形的邊長為若干？以及圖三中所有黑色的三角形之周長和為多少？都是很值得與學生探討的問題，不過如果可以有個模型可供參考討論，應該會讓學生更有感。

筆者長年推動摺紙數學，也發展了不少的課程內容與此模型相關。鳳山高中連崇馨老師曾帶領學生製作正八面體模型，視為謝爾賓斯基三角形挖去的部份（如圖四），而衛道中學的程瑋翔老師也分享直接以正四面體結構完成的謝爾賓斯基三角形（如圖五），都是這個模型立體化後我們可以看到的结果。只是課堂的時間有限，若我們想在一節課以內，每人完成一個模型，也能一併討論其數學概念，不曉得有什麼方法呢？



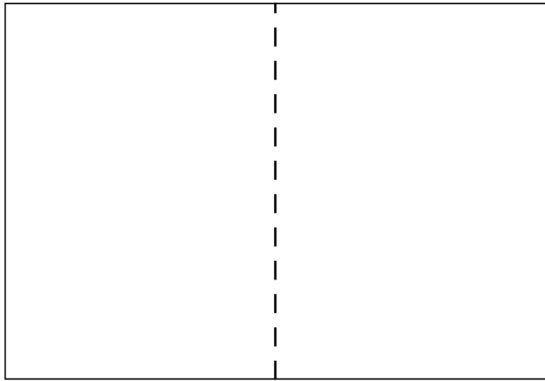
圖四



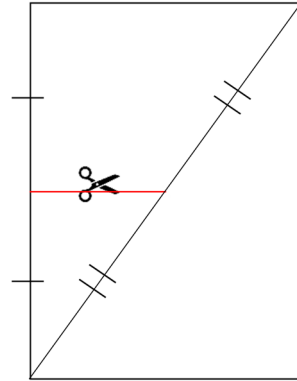
圖五

由程瑋翔老師於「快樂學習 玩出數學力」FB 社團曾分享以一張影印紙即可完成的謝爾賓斯基三角形，十分容易上手，簡單說明步驟如下【註一】：

一、將影印紙對摺後，取出摺線中點，向內剪開目前長方形短邊的二分之一長；(如圖六、圖七)

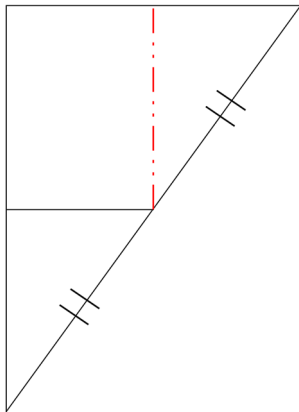


圖六

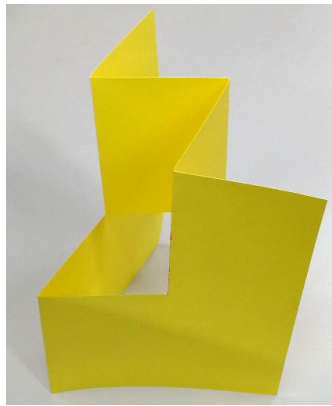


圖七

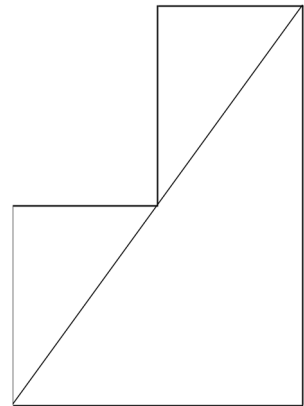
二、將摺下摺痕的上半部右側端點，沿目前的短邊摺一垂直線後，向內推入如圖八、圖九及圖十；



圖八

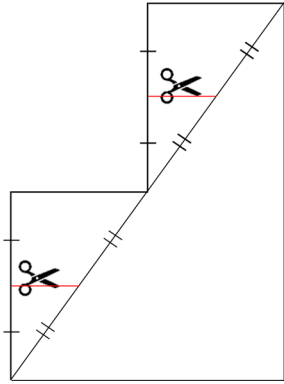


圖九

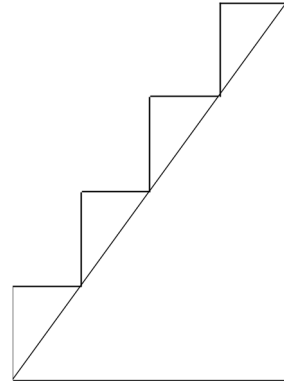


圖十

三、目前上半部有兩層互疊，下半部僅一層互疊，仿照步驟一、二，再從中剪開上一步驟剪痕的一半，再將其推入如圖十一、圖十二；

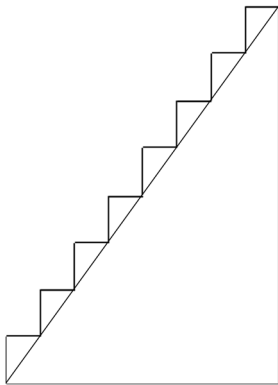


圖十一

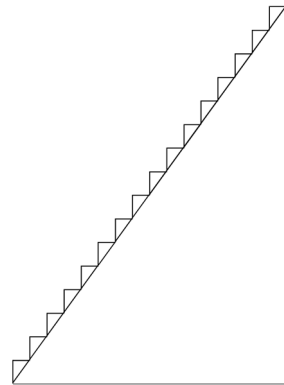


圖十二

四、沿續上述步驟，持續剪開並推入如圖十三、十四【註二】

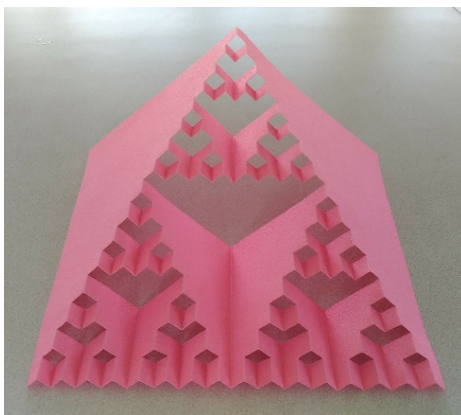


圖十三

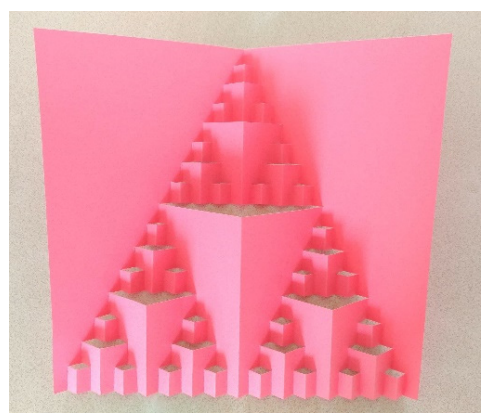


圖十四

五、將推入後的作品攤開，如可得到如圖十五的正面與圖十六的背面圖形



圖十五

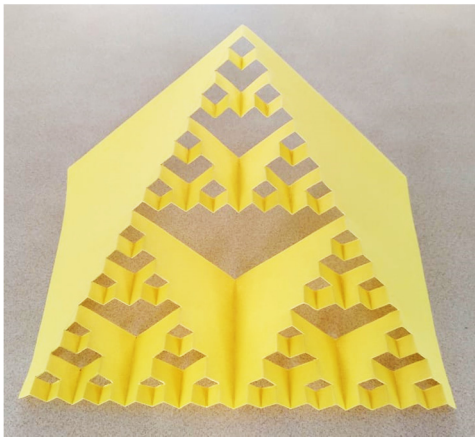


圖十六

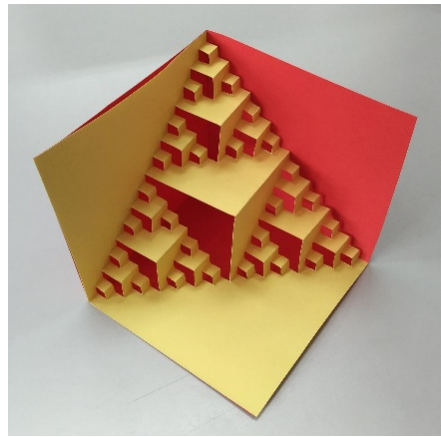
不曉得各位讀者看出上面成品與謝爾賓斯基三角形的關係了嗎？沒錯！從作品背面看起來，明顯有一個大三角錐，三個中三角錐，九個小三角錐，以及二十七個更小的三角錐，恰與我們的謝爾賓斯基三角形不謀而合！也就是目前突起來的三角錐，恰是我們在謝爾賓斯基三角形中挖掉的大小三角形。

只是我們挖掉的是正三角形，目前的三角錐很明顯看出應該不是正四面體，也就是其底部的三角形並不是正三角形，不曉得是否有機會調整紙張比例或剪法，製造出效果更好的作品嗎？

讓我們拿一張 2:1 的紙張來試作看看吧！依照上述步驟，我們可以完成一個作品如圖十七，翻至背面後，讓兩面張開 90 度如圖十八（可以在另一側加上襯底更適合觀察），不曉得各位讀者是否超有感的呢？



圖十七



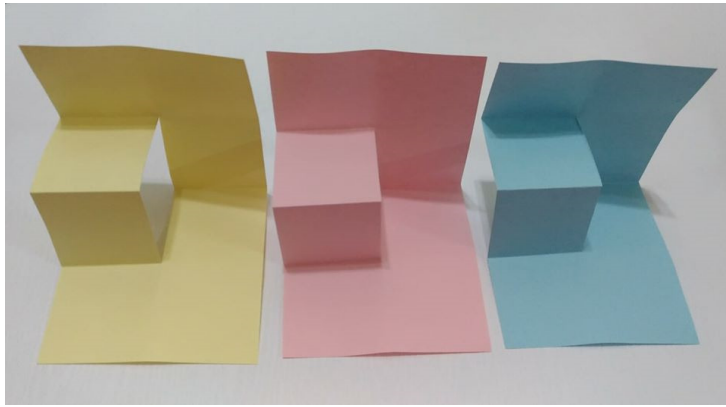
圖十八

這個作品在操作時，可以一併討論的幾個問題與答案：

1. 試問總共需要剪幾刀，才可完成這個作品？（15 刀）
2. 若第一刀剪開的長度為 1，請問在其他操作步驟中剪開的長度分別是多少？（2、3 刀：1/2，4~7 刀：1/4，8~15 刀：1/8）
3. 承上題，請問打開的作品（圖十七），山線、谷線各幾條？（山線 80 條、谷線 40 條）
4. 承第 2 題，請問打開的作品（圖十七），山線總長度與谷線總長度分別是多少？（山線 10，谷線 65/8）

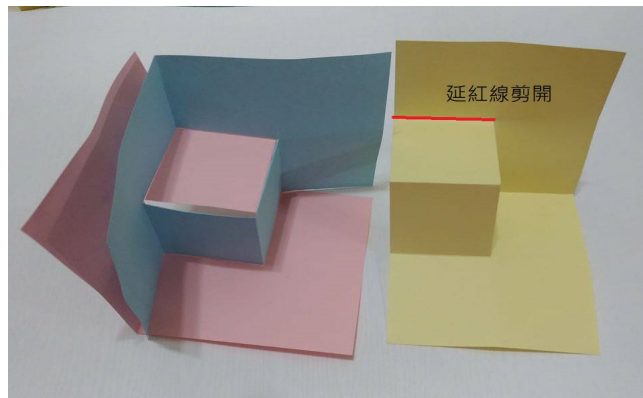
最後，我們再分享一個進階作品提供有興趣的讀者挑戰【註三】：

長寬比為 2:1 的紙張依圖六~圖十摺製)



圖十九

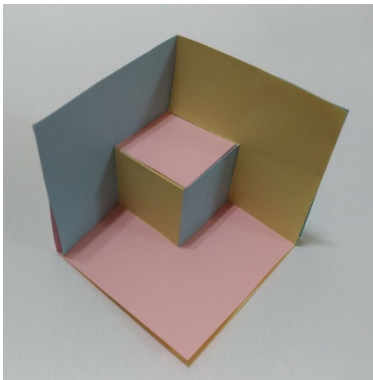
藍色及粉紅色紙張依下圖放置，黃色紙張沿紅線處剪開。



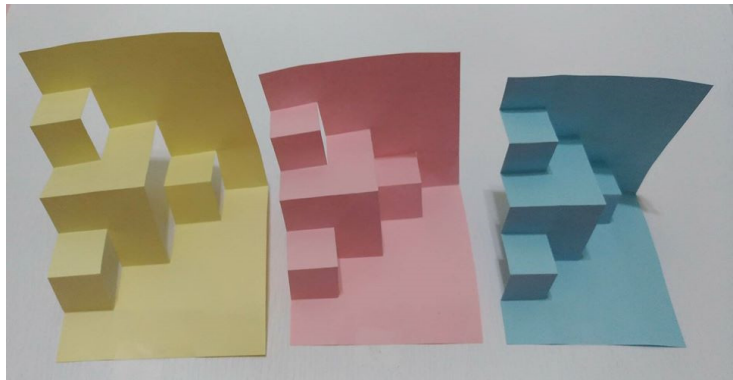
圖二十

將黃色紙張編入即完成

長寬比為 2:1 的紙張依圖六~圖十二摺製



圖二十一



圖二十二

藍色及粉紅色紙張依下圖放置，黃色紙張沿紅線處剪開。

將黃色紙張編入即完成

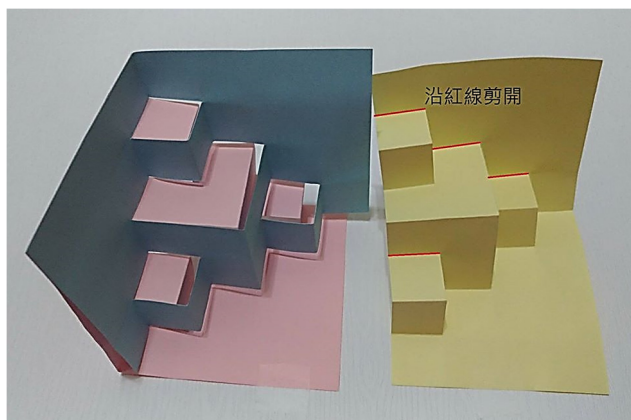


圖 二十三

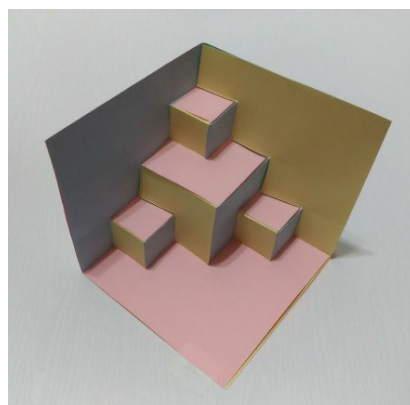


圖 二十四

長寬比為 2:1 的紙張依圖六~圖十三摺製

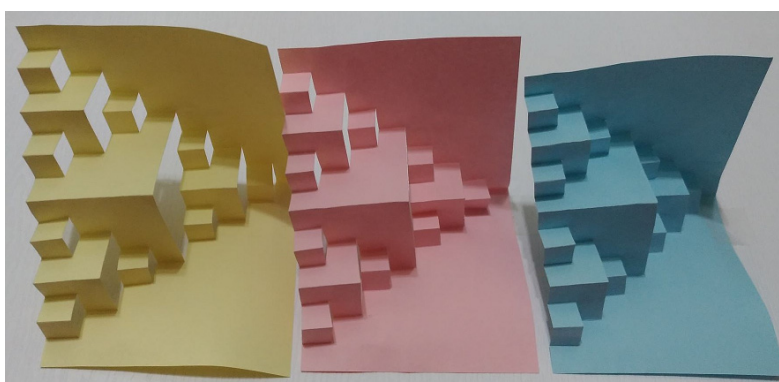


圖 二十五

藍色及粉紅色紙張依下圖放置，黃色紙張沿紅線處剪開。

將黃色紙張編入即完成

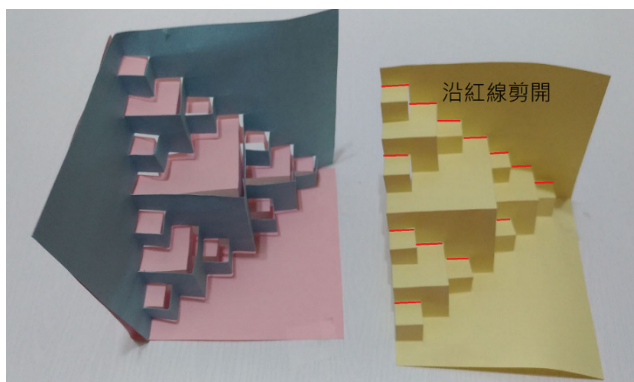


圖 二十六

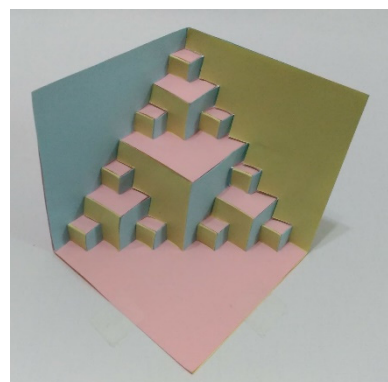
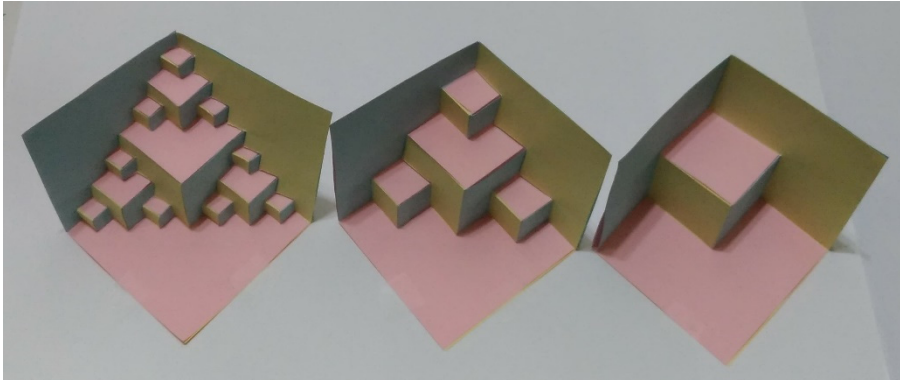


圖 二十七



圖二十八

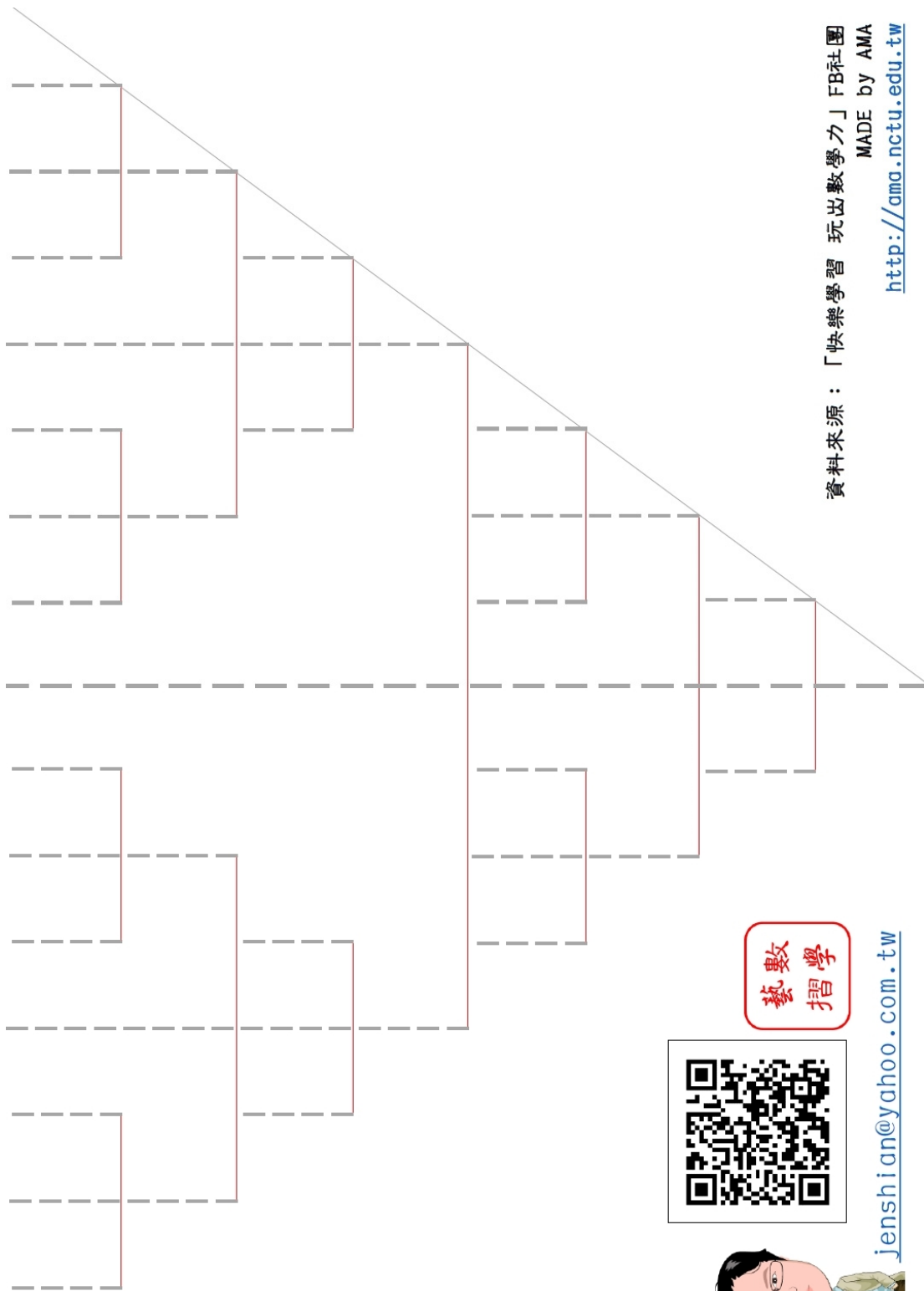
下次各位進行等比數列課程學習時，不妨參考這個作品進行實作，從動手開始，自己完成一個「藝數品」，並輔以數學討論，相信您會更有收穫！有興趣的朋友們還可以延伸閱讀由王儷娟老師於科教月刊 426 期所撰寫的「淺談臺南美術館二館的謝爾賓斯基三角形屋頂」一文，看看這個作品如何與我們的公共藝術作結合，您就會更有感覺了！

【註一】資料來源：

<https://www.facebook.com/groups/346855692144727/permalink/791659240997701/>

【註二】若層數太厚不易一次剪開，不妨可分 2-3 次完成剪開的動作（可參考文末附件剪摺，約末完成四層的作品，若讀者有興趣也可直接挑戰五層以上的作品）

【註三】本文相關文字暨延伸作品製作方式，承蒙鳳山高中連崇馨暨屏東女中陳哲成老師協助指導修正，特此致謝。



數學
藝術



jenshian@yahoo.com.tw

資料來源：「快樂學習 玩出數學力」FB社團
MADE by AMA
<http://ama.nctu.edu.tw>