平面凸四邊形、凸五邊形頂角的合分角正弦值、餘弦值關係方程式(上)

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

壹、前言

描述一般形平面凸多邊形的各種關係式其型態結構必然較圓內接多邊形的各 相對應關係式更為複雜多樣；當沒有在圓的框架特別加持下，其各種關係式也較難被發掘證明出來。本文是要來探討一般形平面凸四邊形、五邊形各頂角的合分角正弦值、餘弦值關係方程式，要來查明頂角、分角與各邊長及對角線長之間的相關性關係式。然而，圓內接多邊形的一切性質必是平面凸多邊形所擁有相對應性質的特例;所以要研究一般形平面凸多邊形也需要預先藉助於較有規律性質的圓內接多邊形的引領帶路思考,始能清晰明確地擬定規劃出思索創見方向來。

首先，先來證明：圓內接四邊形頂角的合分角正弦函數值關係方程式；展示此證明時直接由圓內接四邊形圖形藉著輔助線幾何圖形作圖法出發,先試作出適宜的輔助線來連繫相關的幾何形量，以增益多方思考路線，襄助快速解題並詳實解說由這些新輔助線建構完成圖形所具體呈現的幾何意義；見圖 1.，半徑為 的圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ ，令其邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$ ， $\overline{A_2A_3}=V_2$ ， $\overline{A_3A_4}=V_3$ ， $\overline{A_4A_1}=V_4$ ，

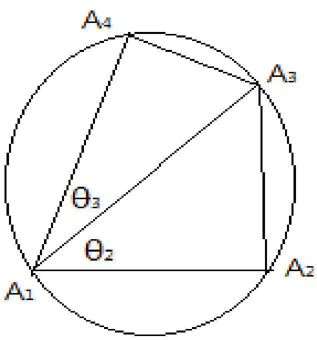

圖 1

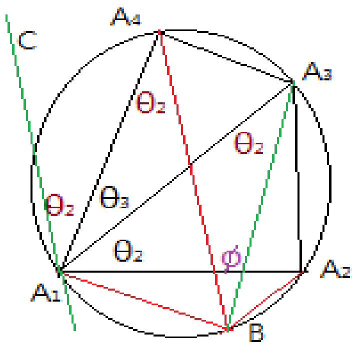

圖 2.

對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$，今設定選取頂角 $A_1=\theta_3+\theta_2$， θ_3是弧長 A_3A_4的圓周角， θ_2

是弧長 A_2A_3 的圓周角，頂角 A_1 是合角，而 θ_3 與 θ_2 則是頂角 A_1 的分角。

[1]　作幾何輔助線圖：

(a)　請看圖 2. 通過頂點 A_2 作一直線平行對角線長 $\overline{A_1A_3}$ 且與圓周交於 B 點，

(b)　連接線段 $\overline{A_1B}$、$\overline{BA_4}$、$\overline{BA_3}$，得一新構的四邊形 $A_1BA_2A_3$，檢視這圖形的幾何意義，

得知其恰為一個等腰梯形，因此又得 $\overline{A_1B}=\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_1A_2}=V_1=\overline{BA_3}$，

(c)　見圖 2.，再通過頂點 A_1 作一直線 A_1C 平行線段 $\overline{BA_4}$。再參閱下圖 3.，

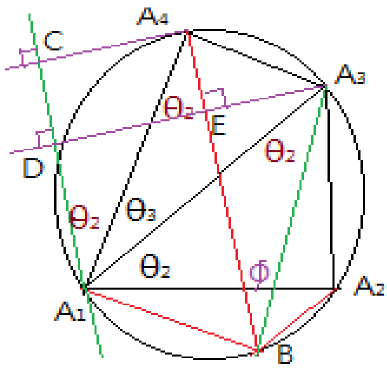

圖 3.

(d)　通過頂點 A_3 作一直線 A_3D 垂直於直線 A_1C，使相交於垂直點 D，且 A_3D 又與 BA_4 垂直相交於 E 點。另通過頂點 A_4 作一直線 A_4C 垂直於直線 A_1C，使相交於垂直點 C，所有相對應的圓周角皆標示在圖中的正確適當位置。輔助線作圖完成。

[2]　圖 3.輔助線圖形的正弦式幾何意義：

(a)　上圖 3.，就直角三角形 ΔA_1A_3D 言，斜邊長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$，得一股線段長

$\overline{A_3D}=\overline{A_1A_3}\sin(\theta_3+\theta_2)=d_{13}\sin(\theta_3+\theta_2)=d_{13}\sin A_1$。

(b) 就直角 $\Delta A_1 A_4 C$ 言，斜邊長 V_4，線段長 $\overline{CA_4} = V_4 \sin\theta_2$。

(c) 就直角 ΔBA_3E 言，斜邊長 $\overline{BA_3} = V_1$，線段長 $\overline{EA_3} = V_1 \sin\phi = V_1 \sin\theta_3$。

(d) 線段長 $\overline{DA_3} = \overline{DE} + \overline{EA_3}$，由線段長 $\overline{CA_4} = \overline{DE}$，得 $\overline{DA_3} = \overline{CA_4} + \overline{EA_3}$。

將上述各線段長代入，得； $d_{13} \sin A_1 = d_{13} \sin(\theta_3 + \theta_2) = V_1 \sin\theta_3 + V_4 \sin\theta_2$ (1)

$$\Rightarrow \qquad \frac{\sin A_1}{V_4 V_1} = \frac{\sin(\theta_3 + \theta_2)}{V_4 V_1} = \frac{\sin\theta_3}{V_4 d_{13}} + \frac{\sin\theta_2}{d_{13} V_1} \qquad (2)$$

方程式(1)式、(2)式就是被證明出的圓內接四邊形頂角的合分角正弦值關係方程式！方程式(2)式對圖 1.而言，因頂角 $A_1 = \theta_3 + \theta_2$，兩相比較，等式型態類似；兩個圓周角 θ_3 與 θ_2 相加等於頂角 A_1，而分別由 $\sin\theta_3$ 與 $\sin\theta_2$ 組成的各自分式型式相加等於由頂角 $\sin A_1$ 組成的分式型式，可看出方程式(2)式也具類似加法性等式型態。而(2)式的特別處是各項的分母皆為角度兩側的邊長乘積。

[3] 再由方程式(1)式 $\Rightarrow$ $\mathbf{2}\,R\,d_{13} \sin A_1 = \mathbf{2}\,R\,V_1 \sin\theta_3 + \mathbf{2}\,R\,V_4 \sin\theta_2$

$$\Rightarrow \qquad d_{13} d_{24} = V_1 V_3 + V_2 V_4 \qquad (3)$$

對角線長 $\overline{A_2 A_4} = d_{24} = 2R \sin A_1$，此方程式(3)式就是圓內接四邊形的托勒密定理 (Ptolemy's theorem) 兩對角線長乘積與各邊長乘積關係方程式。

由對照此方程式(1)式、(2)式，接下來即開始就平面凸四邊形、五邊形分析起。

貳、本文

考慮一平面凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，見圖 3-1.令其邊長線段 $\overline{A_1A_2} = V_1$，$\overline{A_2A_3} = V_2$，

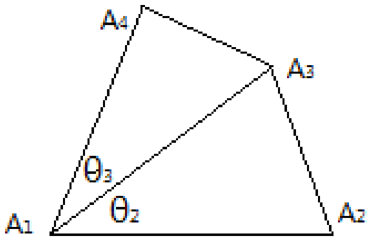

圖 3-1

$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_1}=V_4$，對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$，今設定選取頂角 $A_1=\theta_3+\theta_2$，頂角 A_1是合角，而 θ_3與 θ_2則是頂角 A_1的分角。而在以下內文的敘述推論驗證過程中，所有須使用的四邊形邊長線段表示式均以此處明列的表示式為準，且當演繹證明時需要應用到下列 3 個數學基礎性質----引理；

一、數學基本性質--引理；

引理 1. 三角函數角度的和差轉換公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

引理 2. 任給一個圓內四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，則此四邊形的頂角組合；

$A_1+A_3=A_2+A_4=\pi$　　，即對角必互為補角。

引理 3. 三角形正弦定理：請見下圖 3-2.，半徑 R 的圓內接三角形 $A_1A_2A_3$，令邊長

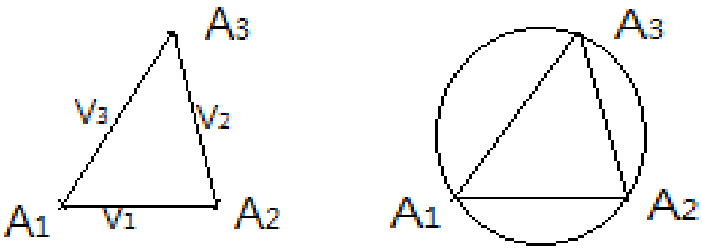

圖 3-2

線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_1}=V_3$，則精簡、對稱的正弦定理公式為：

$$\frac{V_1}{\sin A_3}=\frac{V_2}{\sin A_1}=\frac{V_3}{\sin A_2}=2R \tag{L-1}$$

證明：略。

二、一般形平面凸四邊形頂角的合分角正弦值、餘弦值性質關係方程式

(一) 一般形平面凸四邊形頂角的合分角正弦值關係方程式

由前言的思維中知道；一般形平面凸四邊形其四頂點是不一定共圓的，但它的任意三個頂點必共圓，以此共圓的觀點出發並展開下列的推理演繹運算過程；平面凸四邊形其任意三個頂點必共圓的情形(在選取 A_1 為合角時)有下列 2 類；

1. 選取三角形 $A_1A_2A_3$ 為共圓的情形；此情形下也有 2 種相異圖形如下；

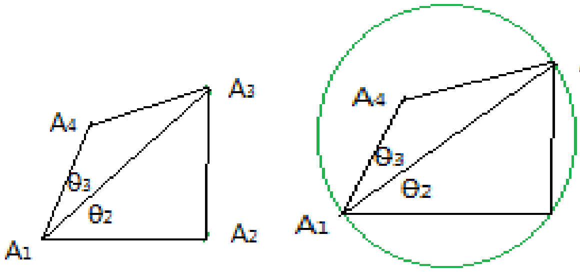

圖 4

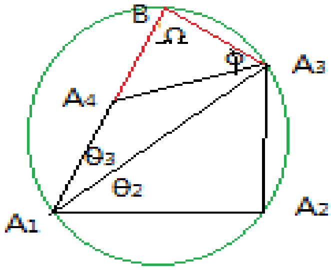

圖 5

[1.1] 第 1 種圖形是頂點 A_4 落在共圓圓周內，見圖 4.。

(a) 現在延長邊長線段 $\overline{A_1A_4}$ 直至與圓周相交於 B 點，見圖 5.，再聯結 B 點與 A_3 點，得一新的圓內接四邊形 $A_1A_2A_3B$，並且由對角互補關係得； $\Omega=\pi-A_2$ 。

(b) 再由三角形 BA_4A_3 的外角與內角關係得； $\phi=A_4-\Omega=A_2+A_4-\pi$ 。

(c) 對 ΔBA_4A_3 言，由引理 3.的正弦定理關係得； $\dfrac{\overline{A_4B}}{\sin\phi}=\dfrac{\overline{A_3A_4}}{\sin\Omega}=\dfrac{V_3}{\sin\Omega}$

$$\Rightarrow \quad \overline{A_4B}\sin\Omega=V_3\sin\phi \qquad \Rightarrow \quad \overline{A_4B}\sin A_2=-V_3\sin(A_2+A_4)$$

(d) 對圓內接四邊形 $A_1A_2A_3B$ 言，由應用方程式(1)式可得下列關係式；

$$d_{13}\sin A_1=d_{13}\sin(\theta_3+\theta_2)=V_1\sin\theta_3+(V_4+\overline{A_4B})\sin\theta_2$$

$$\Rightarrow \quad d_{13}\sin A_1=d_{13}\sin(\theta_3+\theta_2)=V_1\sin\theta_3+(V_4-\frac{V_3\sin(A_2+A_4)}{\sin A_2})\sin\theta_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin A_1}{V_4V_1}=\frac{\sin(\theta_3+\theta_2)}{V_4V_1}=\frac{\sin\theta_3}{V_4d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1}-\frac{V_3\sin(A_2+A_4)}{d_{13}V_4V_1\sin A_2}\sin\theta_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin A_1}{V_4V_1}=\frac{\sin(\theta_3+\theta_2)}{V_4V_1}=\frac{\sin\theta_3}{V_4d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1}\left[1-\frac{V_3\sin(A_2+A_4)}{V_4\sin A_2}\right] \tag{4}$$

[1.2] 第 2 種圖形是頂點 A_4 落在共圓圓周外，見下圖 6。

(a) 令邊長線段 $\overline{A_1A_4}$ 與圓周相交於 C 點，聯結 C 點與 A_3 點，使 $\angle A_4A_3C=\phi$，$\angle A_4CA_3=\Omega$，得一新的圓內接四邊形 $A_1A_2A_3C$，由對角互補關係得；$\Omega=A_2$

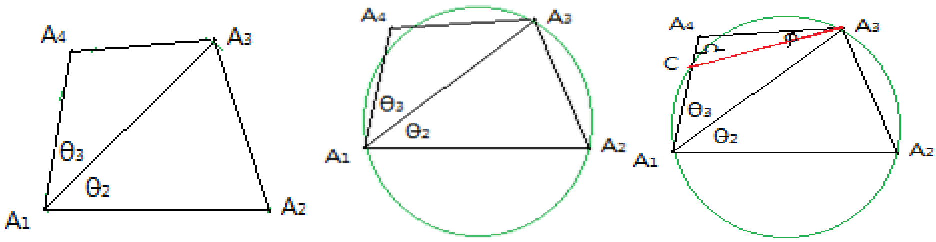

圖 6.

(b) 再由三角形 CA_4A_3 的外角與內角關係得；$\phi=\pi-A_2-A_4$。

(c) 對 ΔCA_4A_3 言，$\overline{A_4C}\sin\Omega=V_3\sin\phi \quad\Rightarrow\quad \overline{A_4C}\sin A_2=V_3\sin(A_2+A_4)$

(d) 對圓內接四邊形 $A_1A_2A_3C$ 言，由應用方程式(1)式可得下列關係式；

$$d_{13}\sin A_1=d_{13}\sin(\theta_3+\theta_2)=V_1\sin\theta_3+(V_4-\overline{A_4C})\sin\theta_2$$

$$\Rightarrow \quad d_{13}\sin A_1=d_{13}\sin(\theta_3+\theta_2)=V_1\sin\theta_3+(V_4-\frac{V_3\sin(A_2+A_4)}{\sin A_2})\sin\theta_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin A_1}{V_4V_1}=\frac{\sin(\theta_3+\theta_2)}{V_4V_1}=\frac{\sin\theta_3}{V_4d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1}\left[1-\frac{V_3\sin(A_2+A_4)}{V_4\sin A_2}\right] \tag{4}$$

以上推理出 2 種相異圖形皆得到完全相同的方程式(4)式，此方程式(4)式就是以三角形 $A_1A_2A_3$ 為共圓時一般形平面凸四邊形頂角的合分角正弦值關係方程式！

[1.3] 方程式(4)式的相關性檢驗

若令此一般形平面凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 是內接於半徑為 R 的一個圓形，下圖 6-1.

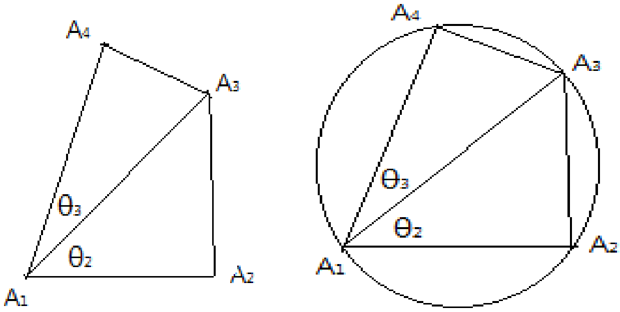

圖 6-1.

由引理 2.知其對角互補 $A_2+A_4=\pi$，得 $\sin(A_2+A_4)=0$，方程式(4)式中[ ]內的項就退化成為 1，此方程式(4)式也必退化成方程式(2)式，相關性驗證成立！

2. 選取三角形 $A_1A_3A_4$ 為共圓的情形；此情形下也有 2 種相異圖形如下；

[2.1] 第 1 種圖形是頂點 A_2 落在共圓圓周內，見圖 7. 與圖 8.。

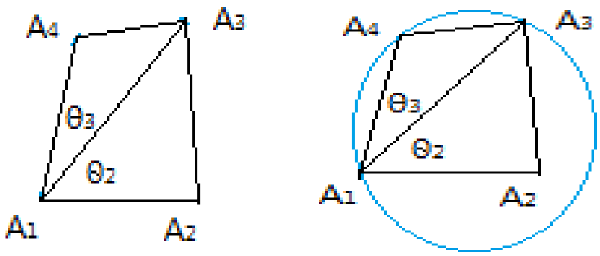

圖 7.

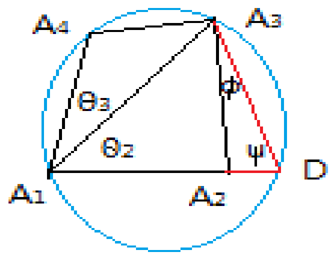

圖 8.

[2.2] 第 2 種圖形是頂點 A_2 落在共圓圓周外，見圖 9.。

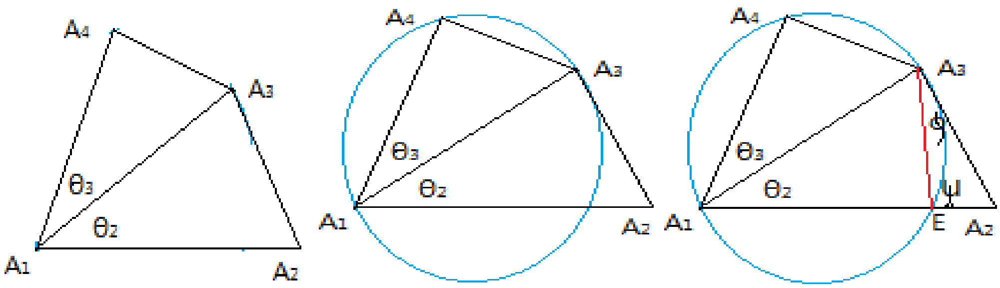

圖 9.

這 2 種圖形的推證處理手法完全與前述 **1.**的演繹證明過程相類同，簡化其敘述流程，而得下式；$d_{13}\sin A_1 = d_{13}\sin(\theta_3+\theta_2) = [V_1 - \dfrac{V_2\sin(A_2+A_4)}{\sin A_4}]\sin\theta_3 + V_4\sin\theta_2$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin A_1}{V_4V_1} = \frac{\sin(\theta_3+\theta_2)}{V_4V_1} = \frac{\sin\theta_3}{V_4 d_{13}}\left[1-\frac{V_2\sin(A_2+A_4)}{V_1\sin A_4}\right] + \frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1} \tag{5}$$

推理導證出這 2 種相異圖形皆得到完全相同的方程式(5)式，此方程式(5)式就是以三角形 $A_1A_3A_4$ 為共圓時平面凸四邊形頂角的合分角正弦值關係方程式！

※綜合上述完整的推理演繹運算過程，證明出方程式(4)式與(5)式俱為平面凸四邊形頂角的合分角正弦值關係方程式。今對照比較方程式(4)式、(5)式與(2)式，發覺(4)式、(5)式皆比(2)式多出了一個修正項，修正項分別為 $\left[1-\dfrac{V_3\sin(A_2+A_4)}{V_4\sin A_2}\right]$ 與 $\left[1-\dfrac{V_2\sin(A_2+A_4)}{V_1\sin A_4}\right]$，有趣的是當此四邊形 4 個頂角均內接於一圓時，此 2 個修正項內的 $\sin(A_2+A_4)=0$，因其對角互補 $A_2+A_4=\pi$，此 2 個修正項修正的結果都蛻變為 1，而(4)式與(5)式也都回歸為(2)式，(4)式與(5)式都涵蓋了(2)式！因此，方程式(2)式即成為平面凸四邊形一般化方程式(4)式與方程式(5)式的特例。

(二) 一般形平面凸四邊形頂角的合分角餘弦值關係方程式

A. 首先證明：圓內接四邊形頂角的合分角餘弦函數值關係方程式

見圖 10.，給定圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，令其邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_1}=V_4$，對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$，頂角 $A_1=\theta_3+\theta_2$，θ_3是弧長 A_3A_4的圓周角，θ_2是弧長 A_2A_3的圓周角，頂角 A_1是合角，而θ_3與θ_2則是頂角 A_1的分角。

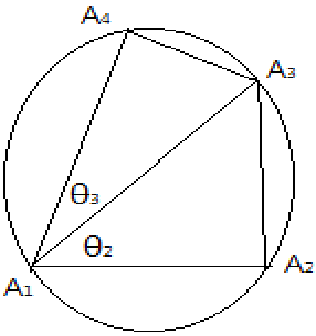

圖 10.

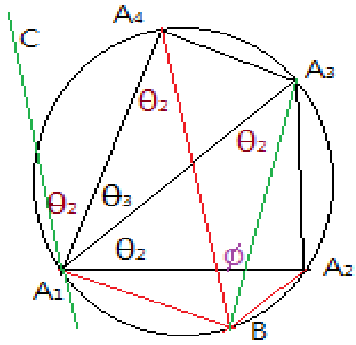

圖 11.

[A.1] 作幾何輔助線圖：

(a) 請看圖 11. 通過頂點 A_2 作一直線平行對角線長 $\overline{A_1A_3}$ 且與圓周交於 B 點，

(b) 連接線段 $\overline{A_1B}$、$\overline{BA_4}$、$\overline{BA_3}$，得一新構的四邊形 $A_1BA_2A_3$，檢視這圖形的幾何意義，得知其恰為一個等腰梯形，因此又得 $\overline{A_1B}=\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_1A_2}=V_1=\overline{BA_3}$，

(c) 見圖 11.，再通過頂點 A_1 作一直線 A_1C 平行線段 $\overline{BA_4}$ 。再參閱下圖 12.，

(d) 通過頂點 A_3 作一直線 A_3D 垂直於直線 A_1C，使相交於垂直點 D，且 A_3D 又與 BA_4 垂直相交於 E 點。另通過頂點 A_4 作一直線 A_4C 垂直於直線 A_1C，使相交於垂直點 C，所有相對應的圓周角皆標示在圖中的正確適當位置。輔助線作圖完成。

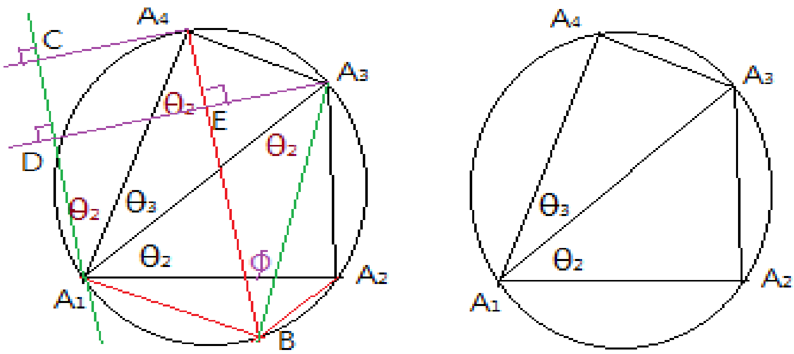

圖 12

[A.2] 圖 12. 輔助線圖形的餘弦式幾何意義：

(a) 上圖 12.，就直角三角形 ΔA_1A_3D 言，斜邊長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$，得一股線段長

$$\overline{A_1D}=\overline{A_1A_3}\cos(\theta_3+\theta_2)=d_{13}\cos(\theta_3+\theta_2)=d_{13}\cos A_1 \quad 。$$

(b) 就直角 ΔA_1A_4C 言，斜邊長 V_4，線段長 $\overline{A_1C}=V_4\cos\theta_2$ 。

(c) 就直角 ΔBA_3E 言，斜邊長 $\overline{BA_3}=V_1$，線段長 $\overline{BE}=V_1\cos\phi=V_1\cos\theta_3$ 。

(d) 線段長 $\overline{CD}=\overline{A_4E}=\overline{A_4B}-\overline{BE}$，由線段長 $\overline{A_1D}=\overline{A_1C}-\overline{CD}=\overline{A_1C}+\overline{BE}-\overline{A_4B}$，

圖 12.，圓內接四邊形 $A_1BA_3A_4$ 的邊長與對角線中有方程式(3)式的托勒密公式：

$$\overline{BA_4}\cdot\overline{A_1A_3}=\overline{A_1B}\cdot\overline{A_3A_4}+\overline{BA_3}\cdot\overline{A_4A_1}\quad\Rightarrow\quad\overline{BA_4}\cdot d_{13}=V_2\cdot V_3+V_1\cdot V_4\quad\Rightarrow$$

$\overline{BA_4}=\dfrac{V_4V_1+V_2V_3}{d_{13}}$ ，將此 $\overline{BA_4}$ 長度代入線段長 $\overline{A_1D}$ 的線段關係式中， $\Rightarrow$

由 $\overline{A_1D}=\overline{A_1C}+\overline{BE}-\overline{A_4B}$

$$\Rightarrow\quad d_{13}\cos A_1=V_1\cos\theta_3+V_4\cos\theta_2-\frac{V_4V_1+V_2V_3}{d_{13}}\qquad(6)$$

$$\Rightarrow\qquad\frac{\cos A_1}{V_4V_1}=\frac{\cos(\theta_3+\theta_2)}{V_4V_1}=\frac{\cos\theta_3}{V_4d_{13}}+\frac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1}-\frac{V_4V_1+V_2V_3}{V_4V_1d_{13}{}^2}\qquad(7)$$

方程式(6)式、(7)式就是被證明出的具有美妙規律性圓內接四邊形頂角的合分角餘弦值關係方程式！

現在將方程式(7)式與(2)式作比較，(7)式多出一個非角度分式項，這就是餘弦值關係式的特異處。而 (7)式的特別處是各餘弦項的分母皆為該角度兩側的邊長乘積，整體各分式項內容裡的角度、邊長、對角線長都是有規則性分佈的！

B. 一般形平面凸四邊形頂角的合分角餘弦值關係方程式

平面凸四邊形其任意三個頂點必共圓的情形(在選取 A_1 為合角時)有下列 2 類；

1. 選取三角形 $A_1A_2A_3$ 為共圓的情形；此情形下也有 2 種相異圖形如下；

[1.1] 第 1 種圖形是頂點 A_4 落在共圓圓周內，見圖 13.。

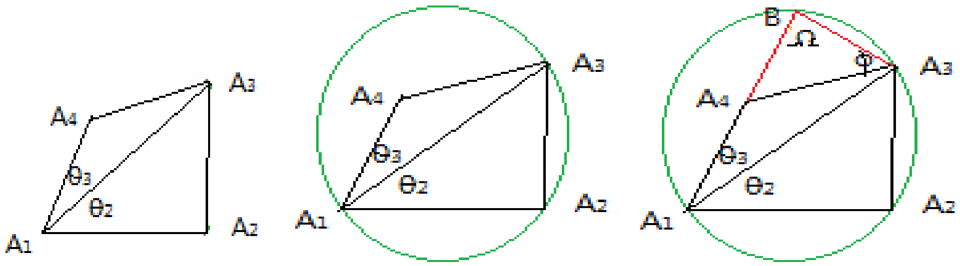

圖 13.

(a) 延長邊長線段 $\overline{A_1A_4}$ 直至與圓周相交於 B 點，見圖 13.，再聯結 B 點與 A_3 點，得一新的圓內接四邊形 $A_1A_2A_3B$，並且由對角互補關係得； $\Omega=\pi-A_2$ 。

(b) 再由三角形 BA_4A_3 的外角與內角關係得； $\phi=A_4-\Omega=A_2+A_4-\pi$ 。

(c) 對 ΔBA_4A_3 言，由引理 3.的正弦定理關係得； $\dfrac{\overline{A_4B}}{\sin\phi}=\dfrac{\overline{A_3A_4}}{\sin\Omega}=\dfrac{V_3}{\sin\Omega}=\dfrac{\overline{A_3B}}{\sin(\pi-A_4)}$

$\Rightarrow \quad \overline{A_4B}\sin\Omega=V_3\sin\phi \qquad \Rightarrow \quad \overline{A_4B}\sin A_2=-V_3\sin(A_2+A_4)$

(d) 又由 $\dfrac{V_3}{\sin\Omega}=\dfrac{\overline{A_3B}}{\sin(\pi-A_4)} \quad \Rightarrow \quad \overline{A_3B}\sin A_2=V_3\sin A_4$

(e) 對圓內接四邊形 $A_1A_2A_3B$ 言，由應用方程式(6)式可得下列關係式；

$$d_{13}\cos A_1=V_1\cos\theta_3+(V_4+\overline{A_4B})\cos\theta_2-\frac{(V_4+\overline{A_4B})\cdot V_1+V_2\cdot\overline{A_3B}}{d_{13}}$$

將(c).的 $\overline{A_4B}$ 值與(d).的 $\overline{A_3B}$ 值一起同步代入上述關係式中，得下列關係式；

$$d_{13}\cos A_1=V_1\cos\theta_3+[V_4-\frac{V_3\sin(A_2+A_4)}{\sin A_2}]\cos\theta_2$$
$$-\frac{1}{d_{13}}\left[\left(V_4-\frac{V_3\sin(A_2+A_4)}{\sin A_2}\right)\cdot V_1+\frac{V_2V_3\sin A_4}{\sin A_2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos A_1}{V_4V_1}=\frac{\cos(\theta_3+\theta_2)}{V_4V_1}=\frac{\cos\theta_3}{V_4d_{13}}+\frac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1}\left[1-\frac{V_3\sin(A_2+A_4)}{V_4\sin A_2}\right]$$

$$-\frac{1}{V_4V_1{d_{13}}^2}\left[\left(1-\frac{V_3\sin(A_2+A_4)}{V_4\sin A_2}\right)\cdot V_4V_1+\frac{V_2V_3\sin A_4}{\sin A_2}\right] \tag{8}$$

[1.2] 第 2 種圖形是頂點 A_4 落在共圓圓周外，見下圖 14.。

(a) 令邊長線段 $\overline{A_1A_4}$ 與圓周相交於 C 點，聯結 C 點與 A_3 點，使 $\angle A_4A_3C=\phi$，

$\angle A_4CA_3=\Omega$，得一新的圓內接四邊形 $A_1A_2A_3C$，由對角互補關係得；$\Omega=A_2$

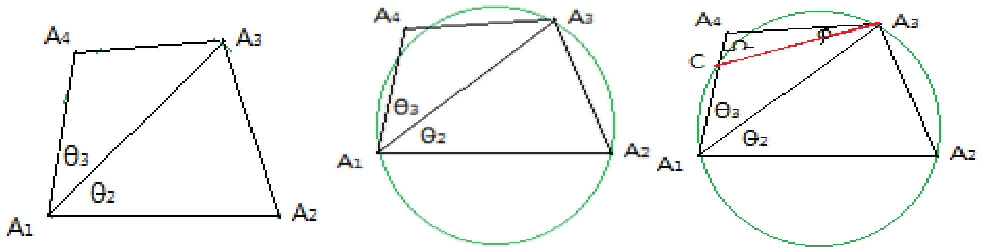

圖 14.

(b) 再由三角形 CA_4A_3 的外角與內角關係得；　$\phi=\pi-A_2-A_4$。

(c) 對 ΔCA_4A_3 言，$\overline{A_4C}\sin\Omega=V_3\sin\phi \quad\Rightarrow\quad \overline{A_4C}\sin A_2=V_3\sin(A_2+A_4)$

(d) 對 ΔCA_4A_3 言，由 $\dfrac{V_3}{\sin\Omega}=\dfrac{\overline{A_3C}}{\sin A_4} \quad\Rightarrow\quad \overline{A_3C}\sin A_2=V_3\sin A_4$

(e) 對圓內接四邊形 $A_1A_2A_3C$ 言，由應用方程式(6)式可得下列關係式；

$$d_{13}\cos A_1=V_1\cos\theta_3+(V_4-\overline{A_4C})\cos\theta_2-\frac{(V_4-\overline{A_4C})\cdot V_1+V_2\cdot\overline{A_3C}}{d_{13}}$$

將(c).的 $\overline{A_4C}$ 值與(d).的 $\overline{A_3C}$ 值一起同步代入上述關係式中，得下列關係式；

$$d_{13}\cos A_1=V_1\cos\theta_3+[V_4-\frac{V_3\sin(A_2+A_4)}{\sin A_2}]\cos\theta_2$$

$$-\frac{1}{d_{13}}\left[\left(V_4-\frac{V_3\sin(A_2+A_4)}{\sin A_2}\right)\cdot V_1+\frac{V_2V_3\sin A_4}{\sin A_2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos A_1}{V_4V_1}=\frac{\cos(\theta_3+\theta_2)}{V_4V_1}=\frac{\cos\theta_3}{V_4d_{13}}+\frac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1}\left[1-\frac{V_3\sin(A_2+A_4)}{V_4\sin A_2}\right]$$

$$-\frac{1}{V_4V_1d_{13}{}^2}\left[\left(1-\frac{V_3\sin(A_2+A_4)}{V_4\sin A_2}\right)\cdot V_4V_1+\frac{V_2V_3\sin A_4}{\sin A_2}\right] \tag{8}$$

以上推理出 2 種相異圖形皆得到完全相同的方程式(8)式，此方程式(8)式就是以三角形 $A_1A_2A_3$ 為共圓時平面凸四邊形頂角的合分角餘弦值關係方程式！

[1.3] 方程式(8)式的相關性檢驗

若令此一般形平面凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 是內接於半徑為 R 的一個圓形，由引理 2.知其對角互補 $A_2+A_4=\pi$，得 $\sin(A_2+A_4)=0$，且 $\sin A_2=\sin A_4$，方程式(8)式中第 1 個[ ]內的項就退化成為 1，第 2 個[ ]內的項也退化成為 $V_4V_1+V_2V_3$，此方程式(8)式也必退化成方程式(7)式，使(7)式成為(8)式的特例，驗證成立！

2. 選取三角形 $A_1A_3A_4$ 為共圓的情形；此情形下也有 2 種相異圖形如下；

[2.1] 第 1 種圖形是頂點 A_2 落在共圓圓周內，見圖 15.。

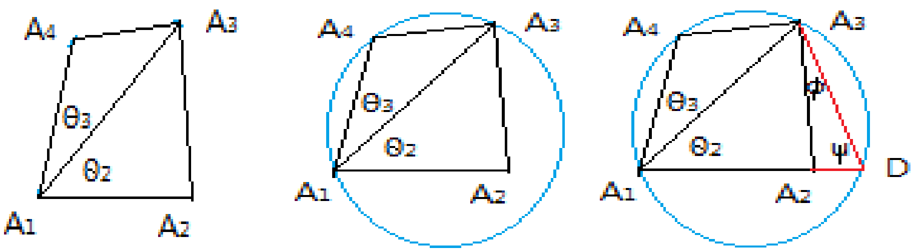

圖 15.

[2.2] 第 2 種圖形是頂點 A_2 落在共圓圓周外，見圖 9.　。

同樣地，這 2 種圖形的推證處理手法完全與前述 **1.**的演繹證明過程相類同，簡化其敘

述流程，而得下式； $d_{13}\cos A_1=[V_1-\dfrac{V_2\sin(A_2+A_4)}{\sin A_4}]\cos\theta_3+V_4\cos\theta_2$

$$-\frac{1}{d_{13}}\left[\left(V_1-\frac{V_2\sin(A_2+A_4)}{\sin A_2}\right)\cdot V_4+\frac{V_2V_3\sin A_2}{\sin A_4}\right]$$

$$\Rightarrow\qquad \frac{\cos A_1}{V_4V_1}=\frac{\cos(\theta_3+\theta_2)}{V_4V_1}=\frac{\cos\theta_3}{V_4d_{13}}\left[1-\frac{V_2\sin(A_2+A_4)}{V_1\sin A_4}\right]+\frac{\cos\theta_2}{d_{13}V_1}$$

$$-\frac{1}{V_4V_1{d_{13}}^2}\left[\left(1-\frac{V_2\sin(A_2+A_4)}{V_1\sin A_2}\right)\cdot V_4V_1+\frac{V_2V_3\sin A_2}{\sin A_4}\right]\tag{9}$$

同樣推演出這 2 種相異圖形皆得到完全相同的方程式(9)式，此方程式(9)式就是以三角形 $A_1A_3A_4$ 為共圓時平面凸四邊形頂角的合分角餘弦值關係方程式！

※ 綜合上述完整的推理演繹運算過程，證明出方程式(8)式與(9)式俱為平面凸四邊形頂角的合分角餘弦值關係方程式。今對照比較方程式(8)式、(9)式與(7)式，發覺(8)式、(9)式皆比(7)式多出了 2 個修正項，修正項分別為 $[1-\dfrac{V_3\sin(A_2+A_4)}{V_4\sin A_2}]$、$\dfrac{\sin A_4}{\sin A_2}$ 與 $[1-\dfrac{V_2\sin(A_2+A_4)}{V_1\sin A_4}]$、$\dfrac{\sin A_2}{\sin A_4}$，同理，當此四邊形 4 個頂角均內接於一圓時，此 2 個修正項內的 $\sin(A_2+A_4)=0$，因其對角互補 $A_2+A_4=\pi$，且 $\sin A_2=\sin A_4$，修正項修正的結果都蛻變為 1，而(8)式與(9)式也都回歸為(7)式，方程式(8)式與(9)式也都涵蓋統一了方程式(7)式！因此，方程式(7)式即成為平面凸四邊形一般化方程式(8)式與方程式(9)式的特例。

【待續】