中學生通訊解題第 124 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
12401

設 p, q, r 是質數，滿足 $3p^4-5q^4-4r^2=26$，求 $(p,q,r)=?$

簡答：$(p,q,r)=(5,3,19)$

【詳解】

將原式 mod 3，得 $q^4-r^2\equiv -1 \pmod 3$。
因整數的平方除以 3 餘 0 或 1，
所以 $q^4\equiv 0,\ r^2\equiv 1 \pmod 3$，
故 $q\equiv 0 \pmod 3$。
而 q 是質數，得 $q=3$，
代入原式得 $3p^4-4r^2\equiv 431$。
再將此式 mod 5，
得 $3p^4+r^2\equiv 1 \pmod 5$。
而整數的平方除以 5 餘 0, 1 或 4，四次方後除以 5 餘 0 或 1。
若 $p^4\equiv 1 \pmod 5$，則 $r^2\equiv 3 \pmod 5$，不合！
因此 $p^4\equiv 0 \pmod 5$，得 $p\equiv 0 \pmod 5$，而 p 是質數，得 $p=5$。
代回得 $r=19$。

【解題評析】

本題得到滿分的同學共有 11 位，其中利用同餘性質討論的同學有 5 位，直接就個位數字討論的同學有 6 位。

問題編號
12402

設 x, y, z 都是正實數，且滿足

$$x=\sqrt{y^2-\frac{1}{25}}+\sqrt{z^2-\frac{1}{25}},$$

$$y=\sqrt{z^2-\frac{1}{36}}+\sqrt{x^2-\frac{1}{36}},$$

$$z=\sqrt{x^2-\frac{1}{49}}+\sqrt{y^2-\frac{1}{49}}$$

，求 $x:y:z$。

簡答：5:6:7

【詳解 1】
（代數法）

$$x=\sqrt{y^2-\frac{1}{25}}+\sqrt{z^2-\frac{1}{25}}$$

$$\Rightarrow\ x-\sqrt{y^2-\frac{1}{25}}=\sqrt{z^2-\frac{1}{25}}$$

$$\Rightarrow\ (x-\sqrt{y^2-\frac{1}{25}})^2=\sqrt{z^2-\frac{1}{25}}^2$$

$$\Rightarrow\ x^2-2x\sqrt{y^2-\frac{1}{25}}+y^2-\frac{1}{25}=z^2-\frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow\ x^2+y^2-z^2=2x\sqrt{y^2-\frac{1}{25}}$$

$$\Rightarrow\ (x^2+y^2-z^2)^2=(2x\sqrt{y^2-\frac{1}{25}})^2$$

$$\Rightarrow\ x^4+y^4+2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$$

$$=4x^2y^2-\frac{4x^2}{25}$$

$$\Rightarrow x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$$

$$=\frac{4x^2}{25}$$

類似地，由 $y=\sqrt{z^2-\frac{1}{36}}+\sqrt{x^2-\frac{1}{36}}$ 可得

$$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$$

$$=\frac{4y^2}{36}，$$

由 $z=\sqrt{x^2-\frac{1}{49}}+\sqrt{y^2-\frac{1}{49}}$ 可得

$$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$$

$$=\frac{4z^2}{49}，$$

則 $\frac{-4x^2}{25}=\frac{-4y^2}{36}=\frac{-4z^2}{49}$ ，則

$$(\frac{x}{5})^2=(\frac{y}{6})^2=(\frac{z}{7})^2，$$

又 x,y,z 都是正實數，則 $\frac{x}{5}=\frac{y}{6}=\frac{z}{7}$ ，

$\therefore\ x:y:z=5:6:7$

【詳解 2】

（幾何法）

(1)　（存在性）

$$x=\sqrt{y^2-\frac{1}{25}}+\sqrt{z^2-\frac{1}{25}}<\sqrt{y^2}+\sqrt{z^2}$$

同理， $y<z+x$ 且 $z<x+y$ ，故以 x,y,z 為三邊長可以構成三角形。

(2)　（銳角三角形）

已知 $x=\sqrt{y^2-\frac{1}{25}}+\sqrt{z^2-\frac{1}{25}}$ ，

移項後得 $x-\sqrt{y^2-\frac{1}{25}}=\sqrt{z^2-\frac{1}{25}}$ ，

左右平方後得

$$x^2-2x\sqrt{y^2-\frac{1}{25}}+y^2-\frac{1}{25}=z^2-\frac{1}{25}$$

，整理後得

$$x^2+y^2-z^2=2x\sqrt{y^2-\frac{1}{25}}>0$$

即 $x^2+y^2>z^2$ ，同理可得 $y^2+z^2>x^2$ 且 $z^2+x^2>y^2$ ，

由餘弦定理可知，以 x,y,z 為三邊長之三角形必為銳角三角形。

(3)　（唯一性）

構造銳角三角形 ABC，其三邊長 $\overline{BC}=x$, $\overline{CA}=y$, $\overline{AB}=z$ ，

且三高 $\overline{AD}=p$, $\overline{BE}=q$, $\overline{CF}=r$ ，

則 $x=\overline{BC}=\overline{DC}+\overline{DB}$

$$=\sqrt{y^2-p^2}+\sqrt{z^2-p^2}$$

$$=\sqrt{y^2-\frac{1}{25}}+\sqrt{z^2-\frac{1}{25}}，$$

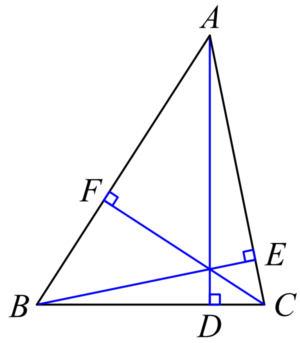
而 $f(p)=\sqrt{y^2-p^2}+\sqrt{z^2-p^2}$ 為嚴格遞減，

故　$p^2=\frac{1}{25}$,　$p=\frac{1}{5}$ ；

同理　$q=\frac{1}{6}$,　$r=\frac{1}{7}$ ，又

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\cdot y\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\cdot z\cdot\frac{1}{7}$

，$\therefore\ \ x:y:z=5:6:7$



【解題評析】

此題表面上屬於代數問題，因為三條代數式子都涉及到兩個根號，所以必須要平方兩次才能化簡，對一般國中生來說應該算是很困難的，不過仍有同學仍然能夠仔細地寫清楚推導過程，相當可喜！

當然此題也可以用幾何觀點來做，有些同學有很好的洞察力和想像力，可以由給定的三條代數式子描繪出對應的銳角三角形，可惜的是那些同學並沒有仔細證明出「存在性」和「唯一性」。邏輯上必須要像詳解 2 中的(1)先證明此三角形確實存在，接著再像(2)證明此三角形為銳角三角形，最後再像(3)證明滿足條件的銳角三角形只有一個。不過其中(2)要使用到餘弦定理，(3)要使用到函數遞增遞減的觀念，理論上要到高中才會學到，所以國中同學無法完整寫出也是合乎情理的。

部分使用代數推導方式的同學，此題可以獲得 7 分的滿分；另外使用幾何觀點的同學，雖然得到正確答案，可惜沒有嚴謹的證明，可以獲得 5 分；還有同學不小心計算錯誤，獲得 3 分。

問題編號
12403

從 983, 985, …, 1029, 1031 這連續 25 個奇數中任取 14 個數，證明所取出的 14 個數中一定有兩個數之和為 2016。

簡答：略。

【詳解】

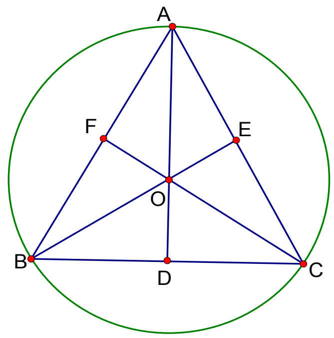
在 983, 985, ..., 1029, 1031 這連續 25 個奇數中，先將兩數之和為 2016 的組成一對，於是有(985, 1031), (987, 1029), ⋯⋯, (1007, 1009) 共 12 對；接著把 $(985,1031),(987,1029),\cdots\cdots,(1007,1009)$ 和 983 看作 13 對（983 只有一個數也當作一對），於是從這 13 對中取出 14 個數，根據鴿籠原理，至少有兩個數是出現在某一對中，而這兩個數之和為 2016。

【解題評析】

本題為組合簡易的問題，少數的同學沒寫出鴿籠原理，大部份的同學推論皆正確。

問題編號
12404

銳角 ΔABC 的外心為 O，外接圓半徑為 R。若延長 $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{CO}$ 分別與 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ 交於 D，E，F，試證：$\frac{1}{\overline{AD}}+\frac{1}{\overline{BE}}+\frac{1}{\overline{CF}}=\frac{2}{R}$



【證明】:

(1) 由面積比可知 $\frac{\overline{AO}}{\overline{AD}}=\frac{\Delta OAB}{\Delta DAB}=\frac{\Delta OAC}{\Delta DAC}$，

再利用和比性質，則

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{AD}}=\frac{\Delta OAB+\Delta OAC}{\Delta DAB+\Delta DAC}=\frac{\Delta OAB+\Delta OAC}{\Delta ABC}$$

(2) $$\frac{\overline{AO}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{BO}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{CO}}{\overline{CF}}=\frac{\Delta OAB+\Delta OAC}{\Delta ABC}+\frac{\Delta OBC+\Delta OBA}{\Delta ABC}+\frac{\Delta OCB+\Delta OCA}{\Delta ABC}$$

則 $\frac{R}{\overline{AD}}+\frac{R}{\overline{BE}}+\frac{R}{\overline{CF}}=2$，

故 $\frac{1}{\overline{AD}}+\frac{1}{\overline{BE}}+\frac{1}{\overline{CF}}=\frac{2}{R}$

【解題評析】

這個題目主要是希望同學可以藉由面積比與邊長比的關係，可以快速證得結果，同學也有用到高中的正弦定理幫忙，或者用解析幾何的方式處理，都是可以處理的手法，不過，利用解析的處理就要掌握兩個重點：好的坐標假設及強大的計算能力。大部分的同學都能找到面積比與邊長比的關係，表達也都非常詳盡，希望各位同學能繼續努力，在數學中找到樂趣。

問題編號
12405

x 的方程式 $4x^3+2ax^2+bx-7=0$，當常數 a,b 是正整數時，x 有正整數解，求 a,b 之值為？

詳解：

設 m 為其正整數解，

則 $2am^2+bm=7-4m^3$，

若 $m\geq 2 \Rightarrow 2am^2+bm<0$ 不合。

故 $m=1 \Rightarrow 2a+b=3 \Rightarrow a=1,b=1$

【解題評析】

本題屬於偏易的不定方程題目，同學們只要試著拆解算式再加上一些判斷，即可順利得出答案。從同學們各式各樣的拆解方式足見同學們對於解題思考的熱誠，可喜可佩。